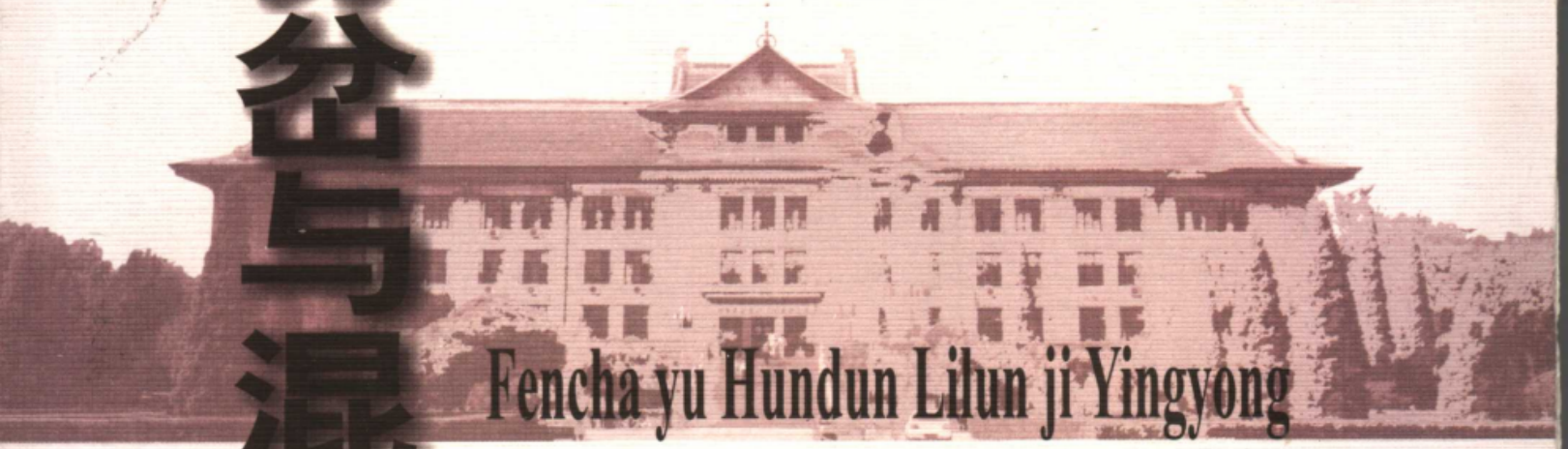
天津大学“211工程”丛书

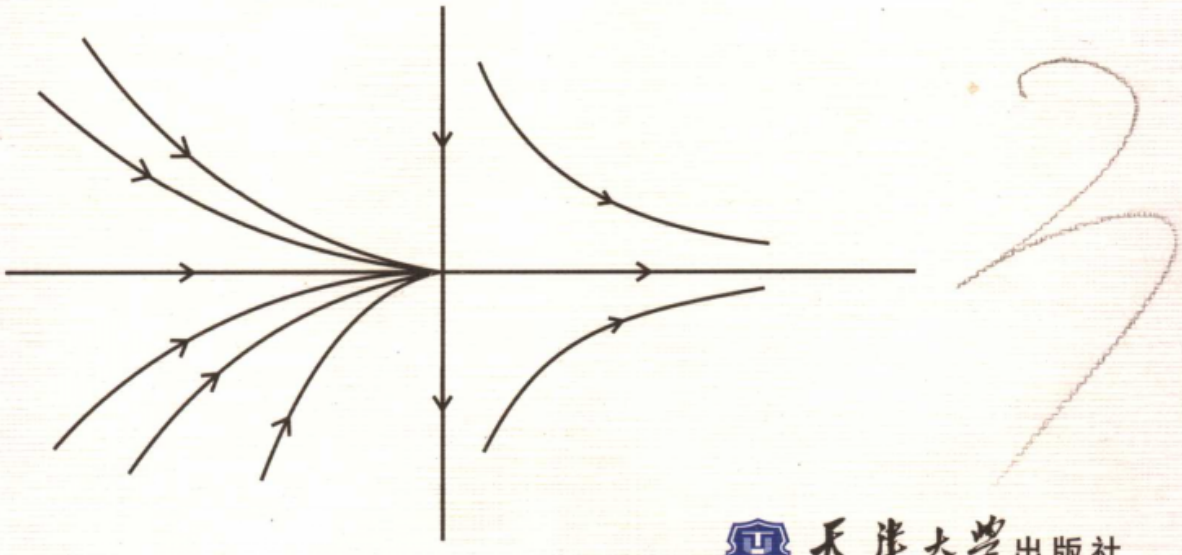
TIANJINDAXUE "211 GONGCHENG" CONGSHU

分岔与混沌理论及应用

Fencha yu Hundun Lilun ji Yingyong



张琪昌 王洪礼 竺致文
沈 菲 任爱娣 刘海英 编著



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

组稿编辑 田 达
责任编辑 张质文
装帧设计 谷英卉
技术设计 油俊伟

天津大学“211工程”丛书

分岔与混沌理论及应用

FENCHAYUHUNDUNLILUNJIYINGYONG

TIANJINDAXUE“211GCHENG”CONGSHU

ISBN 7-5618-2085-2

9 787561 820858 >

定价：28.00元

天津大学“211 工程”丛书

分岔与混沌理论及应用

张琪昌　王洪礼　竺致文
沈　菲　任爱娣　刘海英　编著

天津大学出版社
Tianjin University Press

内容提要

本书阐述了非线性系统分岔及混沌的基本概念，主要方法和在机电、航空、生态、经济等领域中的应用；介绍了中心流形理论、L-S方法、规范形理论、奇异性理论，混沌理论、混沌控制。在附录中附有用Mathematica语言编制的计算中心流形、规范形的程序。全书深入浅出，注意系统性，并有大量例题，以利读者迅速进入分岔理论及应用课题的研究。

本书也可作为力学专业研究生的专业课教材，也可作为机械、动力机械、土木结构、水利、自动化、化工及管理等专业研究生的选修课教材，还可作为自然科学和工程技术领域中的研究人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

分岔与混沌理论及应用/张琪昌等编著.—天津：天津大学出版社，2005.1
ISBN 7-5618-2085-2

Ⅰ.分… Ⅱ.张… Ⅲ.①非线性系统(自动化)-动力学②非线性系统(自动化)-混沌学
Ⅳ.TP271

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第003229号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地 址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编：300072)
电 话 发行部：022-27403647 邮购部：022-27402742
网 址 www.tjup.com
印 刷 昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司
经 销 全国各地新华书店
开 本 185mm×230mm
印 张 21.75
字 数 491千
版 次 2005年1月第1版
印 次 2005年1月第1次
印 数 1-2 000
定 价 28.00元

前　言

近年来随着非线性学科的发展、计算机技术的普及，分岔及混沌理论在各学科的研究领域中得到了广泛应用。本书是在作者多年的科学研究工作及研究生教学实践基础上编写而成的，共分 13 章。

第 1 章介绍了常微分方程定性及运动稳定性理论，包括解的稳定性的基本概念，进行定性分析的基本方法以及如何利用李雅普诺夫运动稳定性定理、后继函数法判定常微分方程解的稳定性。

第 2 章介绍了分岔的基本概念，包括结构稳定性的概念、分岔的类型及三种基本的一维静态分岔和霍普分岔的相关特性。

第 3 章、第 4 章介绍了两种常用的对高维非线性动力系统降维的方法——李雅普诺夫-史密特(Liapunov-Schmidt，简称 L-S 方法)方法和中心流形定理(Center Manifold Theorem)。

第 5 章介绍了规范形(Normal Form)理论和计算规范形的多种实用方法，包括规范形理论的 4 种基本方法，即矩阵表示法、共轭算子法、李代数方法、摄动法，还介绍了多种计算规范系数的实用方法以及相应的用 Mathematica 计算机代数语言编制的程序。

第 6 章至第 9 章介绍了奇异性理论，全局分岔理论、混沌理论，混沌控制的基本理论和方法。

第 10 章至第 13 章分别介绍了分岔、混沌理论在机电系统、海洋环境、社会经济系统、非线性机翼颤振系统中的应用。

本书不仅可以作为力学专业研究生的专业课教材，还可作为机械、动力机械、土木结构、水利、自动化、化工及管理等专业研究生的选修课教材。

限于作者水平，书中难免有疏漏和不足之处，敬希得到读者批评指正。

作者

2004 年 9 月于天津大学

目　录

第 1 章　常微分方程定性及运动稳定性理论 …… (1)
1.1　解的稳定性的定义 …… (1)
1.2　相平面上的奇点及其稳定性 …… (3)
1.3　按一次近似判断定常系统稳定性的准则 …… (13)
1.4　李雅普诺夫运动稳定性 …… (17)
第 2 章　分岔的基本概念 …… (35)
2.1　结构稳定性 …… (35)
2.2　分岔的基本概念 …… (36)
2.3　分岔的类型 …… (37)
2.4　三种基本的一维分岔 …… (40)
2.5　霍普夫分岔 …… (43)
第 3 章　李雅普诺夫-施密特理论 …… (47)
3.1　隐函数定理 …… (47)
3.2　李雅普诺夫-施密特方法 …… (49)
3.3　计算实例 …… (51)
第 4 章　中心流形理论 …… (53)
4.1　基本概念 …… (53)
4.2　稳定流形定理 …… (56)
4.3　中心流形定理 …… (58)
4.4　中心流形定理的电算程序及算例 …… (61)
第 5 章　规范形理论 …… (64)
5.1　概述 …… (64)
5.2　规范形理论的基本概念 …… (65)
5.3　矩阵表示法 …… (68)
5.4　共轭算子法 …… (72)
5.5　李代数法 …… (74)
5.6　计算高阶规范形的周期平均法 …… (83)
5.7　摄动(nayfeh)方法 …… (90)
5.8　用规范形理论研究强非线性振动问题 …… (98)
5.9　计算半单系统规范形的通用程序方法 …… (104)

5.10 用规范形理论研究霍普夫分岔系统的焦点量问题 …… (114)
第 6 章 奇异性理论 …… (122)
6.1 识别问题 …… (122)
6.2 开折问题 …… (133)
6.3 分类问题 …… (137)
6.4 计算实例 …… (138)
第 7 章 全局分岔 …… (145)
7.1 洛伦兹系统的起源 …… (145)
7.2 洛伦兹系统平衡点的叉形分岔 …… (147)
7.3 洛伦兹系统平衡点的霍普夫分岔 …… (150)
7.4 洛伦兹系统的吸引集 …… (152)
7.5 洛伦兹系统的奇异吸引子 …… (156)
7.6 洛伦兹系统的全局分岔 …… (159)
第 8 章 混沌理论 …… (169)
8.1 混沌研究的起源 …… (169)
8.2 混沌的定义 …… (170)
8.3 混沌运动的基本特征 …… (171)
8.4 通向混沌的道路 …… (173)
8.5 常见的几种研究混沌的方法 …… (175)
8.6 混沌域的结构 …… (179)
第 9 章 混沌控制 …… (188)
9.1 OGY 方法 …… (188)
9.2 OGY 方法的改进和推广 …… (190)
9.3 参数自调节控制方法 …… (192)
9.4 实现控制的关键问题 …… (193)
9.5 神经网络控制方法 …… (195)
第 10 章 分岔与混沌理论在机电系统中的应用 …… (203)
10.1 形状记忆合金的非线性力学性能分析 …… (203)
10.2 转子系统的非线性动力学分析 …… (211)
10.3 转子系统的主动控制 …… (224)
第 11 章 非线性动力学理论在赤潮研究中的应用 …… (232)
11.1 单种群赤潮生态模型的非线性动力学研究 …… (232)
11.2 多种群赤潮生态模型的非线性动力学研究 …… (243)
第 12 章 非线性动力学理论在社会经济系统研究中的应用 …… (256)
12.1 非线性动力学理论在金融研究中的应用 …… (256)

12.2　国内生产总值的非线性混沌预测 …… (271)
12.3　人口预测中的分岔与混沌 …… (275)
第 13 章　具有立方非线性机翼极限环颤振的研究 …… (281)
13.1　机翼颤振系统的霍普夫分岔研究 …… (282)
13.2　给定系统的霍普夫分岔 …… (287)
13.3　系统的极限环颤振分析 …… (291)
13.4　立方非线性颤振系统的分岔行为分析 …… (298)
附录 1 …… (305)
附录 2 …… (316)
参考文献 …… (329)

第 1 章　常微分方程定性及运动稳定性理论

本章介绍常微分方程定性及其运动稳定性理论。所谓定性理论，又称几何方法，就是把微分方程的解看成是充满平面或空间(或其中某一区域)的曲线族。对于已给的方程要求设法描绘出曲线族的大致分布概况，研究它们(局部或大范围)的几何性质，并从中引出有用的结论。在这里自变量和未知函数一般是实数。在常微分方程的定性理论中，一个重要的部分是关于解的稳定性理论，它是 19 世纪由俄国著名的数学家李雅普诺夫奠基的数学分支。由于其应用的广泛性，几乎已经发展成微分方程的一个单独的重要分支，而且由于科学技术，特别是自动调节、系统工程、人造地球卫星、宇宙飞船等最新科学技术发展的需要，使得这一分支的研究工作日趋蓬勃，不断出现新的支派和成果，并引起了广大数学工作者与工程技术人员的密切注意和研究兴趣。

1.1　解的稳定性的定义

考虑下列微分方程组

$$\dot{y}_i = F_i(y_1, y_2, \cdots, y_n, t) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.1.1}$$

其中 y_i 是与运动有关的变量，例如位移、速度、加速度等满足解的存在性和唯一性条件，其矢量微分方程形式为

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) \tag{1.1.1a}$$

其中：$\boldsymbol{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) = [F_1 \quad F_2 \quad \cdots \quad F_n]^{\mathrm{T}}$ 为 n 维列向量函数。

在今后的讨论中，均假定方程组(1.1.1)的右端在所讨论的$(y_1, \cdots, y_n, t)$是在 $n+1$ 维空间的某区域 D 内，满足解的存在唯一性定理、解的延拓与连续性定理以及可微性定理所要求的条件。

稳定性这个词最先出现在力学中，它描述了一个刚体运动的平衡状态。如果说这个平衡状态是稳定的，就是说刚体在受到干扰的作用下从原来位置微微移动后，仍回到它原来的位置。反之，如果它趋于一个新位置，这时的平衡状态就是不稳定的。

在实际应用中，微分方程所描述的乃是物质系统的运动规律。从实际问题中所提出的微分方程，人们只能考虑影响该过程的主要因素，而不得不忽略一些看来较次要的因素，即干扰因素。干扰因素可以瞬时地起作用，也可以持续地起作用。从数学上来看，前者引起初值的变化，而后者则引起微分方程本身的变化。因此，研究下述问题就有着极其深远的理论意义和现实意义。这就是：初始条件或微分方程本身的微小变化是否只引起对应解的微小

变化？如果由于初始条件或微分方程“差之毫厘”却使对应的解“失之千里”，那么这样的定解问题在实用上显然是没有什么价值的。

运动系统的稳定性概念是平衡稳定性概念的直接扩大。李雅普诺夫定义下的运动稳定性理论，是研究微小干扰性因素对于物质系统运动的影响。而微小的干扰因素（或者说涨落）总是存在的，且不可确定。

对于一些运动，微小干扰因素的影响并不显著，因而受干扰的运动与不受干扰的运动差别很小，这类运动称为稳定的；对于另外一些运动，无论干扰多么小，随着时间的发展，受干扰的运动与不受干扰的运动相差很大，这类运动称为不稳定的。由于干扰总是不可避免地存在，所以运动稳定性的问题就有其重要的理论和实际意义，在自然科学与工程技术领域受到了人们的普遍关注。

设式(1.1.1)在初始条件

$$\left.\begin{aligned} y &= y_0 \\ t &= t_0 \end{aligned}\right\} \tag{1.1.2}$$

下的解为

$$y_i = \tilde{y}_i(t) \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{1.1.3}$$

选取此式为干扰运动，考虑其稳定性。设初始条件有微扰动

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \tilde{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{y}_0 \\ t &= t_0 \end{aligned}\right\} \tag{1.1.4}$$

其中，$\boldsymbol{\eta}$ 为 n 维扰动向量，是一阶小量。此初始条件下的微分方程(1.1.1)的解为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t) \tag{1.1.5}$$

定义 1.1.1　如果对于任意小的正数 ε，总存在正数 $\eta(\varepsilon)$，使得对于所有受干扰的运动 $y_i = y_i(t)(i = 1,2,\cdots,n)$，当其在初始时刻 $t = t_0$ 时满足不等式

$$|y_i(t_0) - \tilde{y}_i(t_0)| \leqslant \eta(\varepsilon)(i = 1,2,3,\cdots,n) \tag{1.1.6}$$

而在所有 $t \geqslant t_0$ 时，满足不等式

$$|y_i(t) - \tilde{y}_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1,2,3,\cdots,n) \tag{1.1.7}$$

则未受干扰的运动就称为对变量是稳定的。

未受干扰的运动如果不是稳定的，则称为不稳定的。即对任意正数，至少有一种受干扰的运动，它满足不等式(1.1.6)，但如果在某一时刻不满足不等式(1.1.7)，那么未被扰动的运动就是不稳定的。

若未被扰动的运动不但是稳定的，而且当初始振动足够小时，随着时间的增加，所有受干扰的运动都逐渐趋近于未受干扰的运动，在这种情况下，未被扰动运动是渐近稳定的。

对于方程(1.1.1)，研究新解 $y_i = \tilde{y}_i(t)$ 相对变量 $y_i(t)$ 的稳定性还很复杂。为此对方程(1.1.1)进行坐标变换

$$x_i = y_i(t) - \tilde{y}_i(t) \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}y_i(t)}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}\tilde{y}_i(t)}{\mathrm{d}t}\\&=f_i[x_1+\tilde{y}_1(t),\cdots,x_n+\tilde{y}_n(t),t]-f_i[\tilde{y}_1(t),\cdots,\tilde{y}_n(t),t]\\&=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)\end{aligned}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,t) \tag{1.1.8}$$

由于 $f_i=0$ 时，$y_i(t)=\tilde{y}_i(t)$，所以方程(1.1.1)的未扰运动稳定性问题转化为方程(1.1.8)的零解稳定性问题。

定义 1.1.2　对于任意正数，存在 $\eta(\varepsilon)$，使得对于受到干扰的运动，在初始时刻 t_0 时满足 $|x_i(t_0)|\leqslant\eta(i=1,2,\cdots,n)$，当 $t>t_0$ 时，满足 $|x_i(t)|<\varepsilon$，则系统(1.1.8)在平衡位置($x_i=0,i=1,2,\cdots,n$)是稳定的。反之则称未扰运动($x_i=0,(i=1,2,\cdots,n)$)是不稳定的。

如果未扰运动($x_i=0(i=1,2,\cdots,n)$)是稳定的，且有 $\lim\limits_{t\to\infty}x_i(t)$ 成立，则称为是渐近稳定的。

设非自治系统的扰动微分方程为

$$\dot{x}=f(t,x) \tag{1.1.9}$$

在平衡位置 $x=0$ 的邻域 Ω：$\|x\|<H$ 内，解存在且唯一，其中 $\|x\|=(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2)^{1/2}$ 为欧氏范数；$\|x\|$ 表示在以原点为球心、H 为半径的球内。

定义 1.1.3　对任意 $\varepsilon>0(\varepsilon\subset H)$，可以找到 $\delta(\varepsilon)>0$，使得当初始扰动 $\|x_0\|<\delta$ 时对一切 $t>t_0$ 有

$$\|x\|<\varepsilon \tag{1.1.10}$$

则称系统(1.1.8)平衡位置 $x=0$ 为稳定。

定义 1.1.4　如果系统(1.1.8)平衡位置 $x=0$ 稳定，且有

$$\lim_{t\to\infty}\|x\|=0$$

则称平衡位置为渐近稳定。

定义 1.1.5　如果系统(1.1.8)平衡位置 $x=0$ 为渐近稳定，而 x_0 可以取任何值，则称平衡位置为全局渐近稳定。

定义 1.1.6　对任意给定的 $\varepsilon>0(\varepsilon\subset H)$，无论 x_0 如何选择，总能找到一个时刻 $\tau>t_0$，使得在此时刻之后的任意时刻 $t>\tau$，找不到一个 $\delta>0$，满足式(1.1.10)，则称系统(1.1.8)平衡位置为不稳定。

1.2　相平面上的奇点及其稳定性

定义 1.2.1　设系统的奇点(平衡点、临界点)为 u_s，若对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$，

使得当 $\| \boldsymbol{u}(0) - \boldsymbol{u}_e \| < \delta(\varepsilon)$ 时，有 $\| \boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{u}_e \| < \varepsilon$ 对任意 $t \geqslant 0$ 成立，则称系统的奇点 $\boldsymbol{u}_e$ 是稳定的，否则称为不稳定的。若奇点 $\boldsymbol{u}_e$ 是稳定的，且满足 $\lim\limits_{t \to +\infty} \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}_e$，则称奇点 $\boldsymbol{u}_e$ 是渐近稳定的。

下面研究相平面上奇点的性质。考虑系统

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) \tag{1.2.1}$$

其中

$$\boldsymbol{u} = [x \quad y]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^2$$

如果系统的平衡点 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_e$ 不是原点(0,0)，则可作线性变换：$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_e$，故式(1.2.1)变为 $\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})$，此时系统的奇点已变为原点(0,0)。因此，本节着重讨论奇点为原点的振动系统。设系统

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} f_1(u_1, u_2) \\ f_2(u_1, u_2) \end{pmatrix} \tag{1.2.2}$$

的平衡点为 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_e = \boldsymbol{0}$。显然，前面研究的系统(1.2.1)只是系统(1.2.2)的一个特例。

将系统(1.2.2)在 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_e = 0$ 处作泰勒展开，并忽略高次项，得

$$\dot{\boldsymbol{u}} = D\boldsymbol{f}(0)\boldsymbol{u} \tag{1.2.3}$$

式(1.2.3)称为式(1.2.1)的线性化系统，写成向量形式即为

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{1.2.4}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{1.2.5}$$

可以证明，当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都不具有零实部时，系统(1.2.2)与其线性化系统(1.2.3)在奇点附近具有相同的性态。故着重讨论线性系统(1.2.4)，并假设此时矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都不具有零实部。显然，此时 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$，即 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异的。由线性代数的知识可知，此时 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_1 和 λ_2 对应的特征向量或广义特征向量(当 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时) ξ_1 和 ξ_2 可以组成一个可逆(非奇异)实矩阵 $\boldsymbol{T} = [\xi_1 \quad \xi_2]$。利用该矩阵，通过线性变换

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{v} \tag{1.2.6}$$

其中

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

可把线性方程组(1.2.4)化成标准形式，其系统矩阵为下列四种形式之一：

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

其中 λ_1、λ_2、λ、α、β 为实数。

这些标准形式是根据方程组(1.2.4)的特征方程

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

即

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0 \tag{1.2.7}$$

的根(称为特征根)的性质来确定的。

由于线性变换(1.2.6)不改变奇点的位置,也不会引起相平面上轨线性态的改变,从而奇点的类型也保持不变。因此,为了简单起见,下面仅就标准形式的线性方程组介绍奇点的类型,至于一般方程组(1.2.4)在奇点邻域内轨线分布的面貌也同时附于相应的图中,以供比较。现按特征方程具有相异实根、重根或共轭复根,分 5 种情形进行讨论。

情形一　同号相异实根

这时方程的标准形式为

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \lambda_1 \xi \\ \frac{d\eta}{dt} &= \lambda_2 \eta \end{aligned}\right\} \tag{1.2.8}$$

其解为

$$\left.\begin{aligned} \xi &= Ae^{\lambda_1 t} \\ \eta &= Be^{\lambda_2 t} \end{aligned}\right\} \tag{1.2.9}$$

其中 λ_1、λ_2 为实特征根,而 A、B 为任意实常数。

首先假定 λ_1、λ_2 同为负实数,此时易见,零解是渐近稳定的。当 $B=0$ 时,ξ 的左半轴及右半轴本身为轨线;而当 $A=0$ 时,η 轴的上半轴及下半轴为轨线。若 $A \cdot B \neq 0$,则可分 $\lambda_1 > \lambda_2$ 和 $\lambda_1 < \lambda_2$ 两种情况讨论。

如果 $\lambda_1 > \lambda_2$,由解(1.2.9)有

$$\frac{\eta(t)}{\xi(t)} = \frac{B}{A} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \to 0 \quad (t \to +\infty)$$

故轨线切 ξ 轴于原点。相平面上轨线的形状如图 1-1(a)所示。

如果 $\lambda_1 < \lambda_2$,则有

$$\frac{\xi(t)}{\eta(t)} = \frac{A}{B} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \to 0 \quad (t \to +\infty)$$

这表明轨线切 η 轴于原点。相平面上轨线的形状如图 1-1(b)所示。

从图 1-1 中可以看到,除个别轨线外,所有轨线均沿同一个方向趋向原点,其邻域内轨线具有这样性态的奇点称为结点。如上所述,λ_1、λ_2 同为负实数时,方程的零解是渐近稳定的,称对应的奇点为稳定结点。

当 λ_1、λ_2 同为正实数时,上述讨论仍然有效,只需将 $t \to +\infty$ 改为 $t \to -\infty$,即图 1-1 中

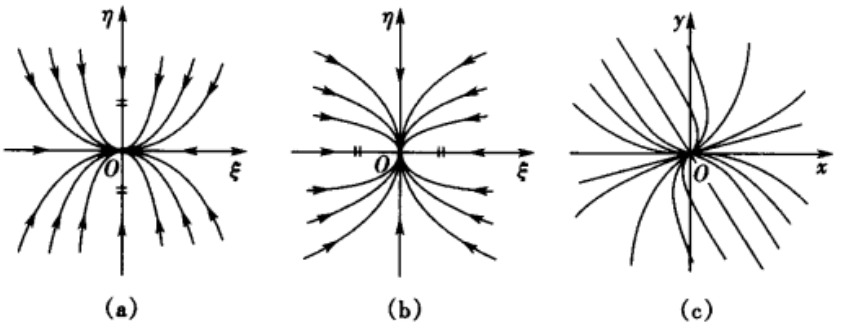


图 1-1 结点

(a)$0>\lambda_1>\lambda_2$;(b)$\lambda_1<\lambda_2<0$;(c)一般情况

轨线的走向均须改为相反的方向,这时方程的零解为不稳定,而对应的奇点称为不稳定结点。

情形二 异号实根

这时方程的标准形式及其解的表达式仍为式(1.2.8)和式(1.2.9),不过其中 λ_1 和 λ_2 的符号相异。

式(1.2.9)中当 $B=0$ 或 $A=0$ 时,其轨线分别为 ξ 轴的左、右半轴或 η 轴的上、下半轴,且其中一轴趋于原点,另一轴远离原点。

当 $A\cdot B\neq 0$ 时,如 $\lambda_1<\lambda_2$,则由式(1.2.9)可知,当 $t\to+\infty$ 时,$\xi(t)\to+0$,$\eta(t)\to+\infty$,轨线图貌如图 1-2(a)所示。如 $\lambda_2<0<\lambda_1$,当 $t\to+\infty$ 则有 $\xi(t)\to+\infty$,$\eta(t)\to 0$,轨线形状如图 1-2(b)所示。

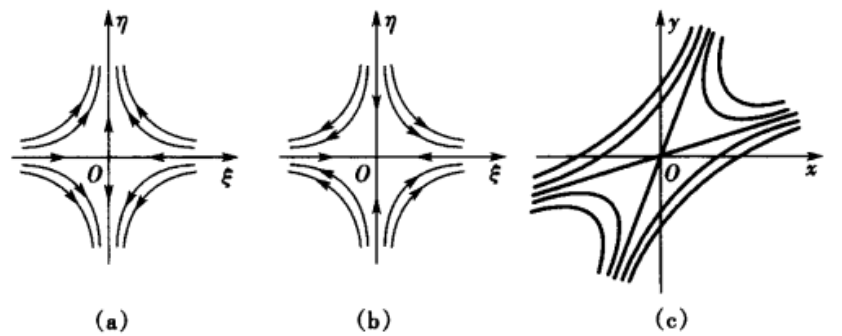


图 1-2 鞍点

(a)$\lambda_1<0<\lambda_2$;(b)$\lambda_1>0>\lambda_2$;(c)一般情况

由图 1-2 可见,在奇点邻域内,方程的轨线图貌如鞍形,这样的奇点称为鞍点。显然,鞍点只能是不稳定的。

情形三 重根

这时可分两种情况讨论。

①当 $b\neq 0$ 或 $c\neq 0$ 时，如前面所指出的，这时方程可化为如下标准形式：

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=\lambda\xi+\eta,\quad \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}=\lambda\eta \tag{1.2.10}$$

其解为

$$\xi=(At+B)\mathrm{e}^{\lambda t},\ \eta=A\mathrm{e}^{\lambda t} \tag{1.2.11}$$

当 $\lambda<0$ 时，显然有 $\xi(t)\to 0,\eta(t)\to 0(t\to+\infty)$，因而方程的零解是渐近稳定的。又由式(1.2.11)知，当 $A=0$ 时，ξ 轴左、右半轴本身也是轨线；而当 $A\neq 0$ 时，由于

$$\frac{\eta(t)}{\xi(t)}=\frac{A}{At+B}\to 0\quad (t\to+\infty)$$

且当 $t=-\dfrac{B}{A}$ 时，$\xi(t)=0$，可知轨线越过 η 轴而切 ξ 轴于原点，如图 1-3(a)所示。所有轨线毫无例外地沿同一个方向(ξ 轴)趋于奇点，其附近轨线具有这种性态的奇点称为退化结点。在此情形下，奇点是稳定的，因此便称为稳定退化结点。

假若 $\lambda>0$，这时只要将 $t\to+\infty$ 改为 $t\to-\infty$，则前面讨论仍然有效。轨线性态如图 1-3(b)所示，奇点是不稳定退化结点。

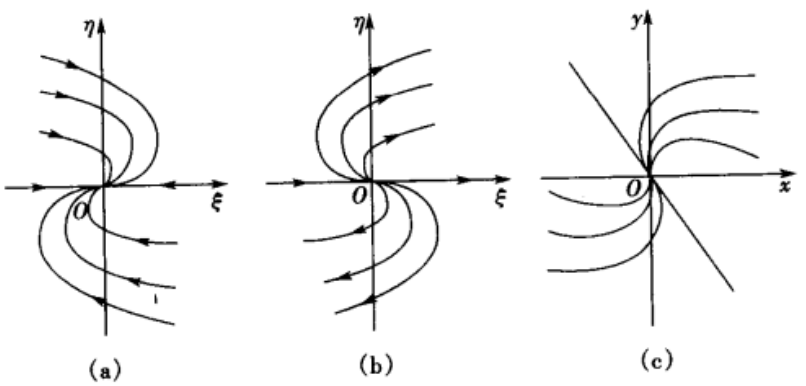


图 1-3　退化结点

(a)$\lambda<0$;(b)$\lambda>0$;(c)一般情况

②当 $b=c=0$ 时，这时方程组(1.2.4)取形式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\lambda x,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\lambda y,\quad \lambda=a=d$$

其解为

$$x(t)=A\mathrm{e}^{\lambda t},\ y(t)=B\mathrm{e}^{\lambda t}$$

于是

$$y=\frac{B}{A}x$$

此时，轨线是趋向(或远离)奇点的半射线，如图 1-4 所示。轨线均沿确定的方向趋于(或远离)奇点，且不同轨线其切向也相异，这样的奇点称为奇结点，且 $\lambda<0$ 时为稳定的，而 $\lambda>0$

时为不稳定的。

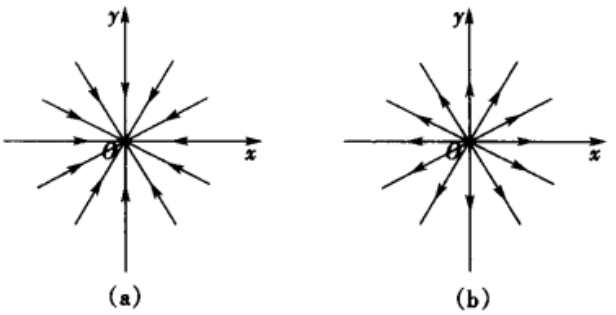


图 1-4 奇结点

(a)$\lambda<0$;(b)$\lambda>0$

情形四 非零实部复根

这时方程的标准形式为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}&=\alpha\xi+\beta\eta\\ \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}&=-\beta\xi+\alpha\eta\end{aligned}\right\}\tag{1.2.12}$$

这里 α、β 分别为特征根的实部和虚部。引入极坐标,即令 $\xi=r\cos\theta$,$\eta=r\sin\theta$,再注意到

$$r^2=\xi^2+\eta^2,\quad \frac{\partial r}{\partial\xi}=\frac{\xi}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial\eta}=\frac{\eta}{r}$$

$$\xi\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}+\eta\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}=r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\xi}{\mathrm{d}\eta\mathrm{d}t}-\eta\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

将由式(1.2.12)代入上式,经整理可以得到

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\alpha r,\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\beta$$

由此得到方程(1.2.12)的解的极坐标形式

$$r=A\mathrm{e}^{\alpha t},\quad \theta=\beta t+B\tag{1.2.13}$$

其中 $A>0$,B 为任意常数。

从式(1.2.13)可直接看出,轨线为一族对数螺旋线,依顺(逆)时针方向盘旋地趋近或远离原点,如图 1-5 所示。此时,奇点称为焦点,且 $\alpha<0$ 时为稳定的,而 $\alpha=0$ 时为不稳定的。

情形五 纯虚根

这相当于情形四中 $\alpha=0$ 的情形。易见这时轨线为以原点为中心的一族圆,如图 1-6 所示。此时,奇点称为中心,显然,在这种情形下零解为稳定但非渐近稳定的。

综上所述,可得下面定理。

定理 1.2.1 如果二阶线性驻定方程组(1.2.4)的系数满足条件式(1.2.5),则方程的零解(奇点)将依特征方程(1.2.7)的根的性质而分别具有如下的不同特性。

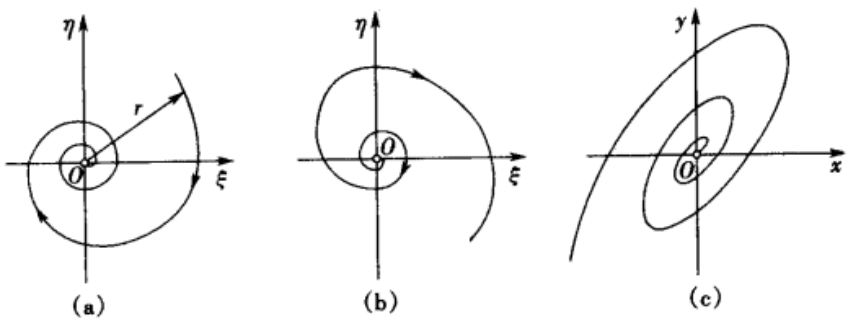


图 1-5　焦点

(a)$\alpha<0,\beta>0$;(b)$\alpha>0,\beta>0$;(c)一般情况

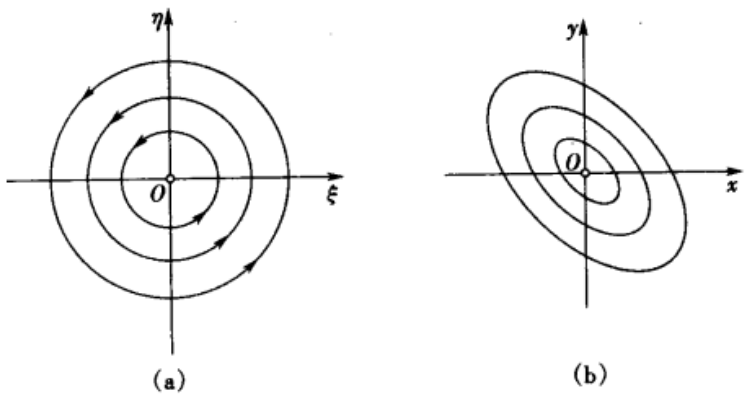


图 1-6　中心

(a)$\alpha=0,\beta<0$;(b)一般情况

①如果特征方程的根 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 为实根，则 $\lambda_1\lambda_2>0$ 时奇点为结点，且当 $\lambda_1<0$ 时结点是稳定的，而对应的零解为渐近稳定的，但当 $\lambda_1>0$ 时奇点和对应的零解均是不稳定的；当 $\lambda_1\lambda_2<0$ 时奇点为鞍点，零解为不稳定的。

②如果特征方程具有重根 λ，则奇点通常为退化结点，但在 $b=c=0$ 的情形奇点为奇结点。又当 $\lambda<0$ 时，这两类结点均为稳定的，而零解为渐近稳定的；但当 $\lambda>0$ 时奇点和对应的零解均为不稳定的。

③如果特征方程的根为共轭复根，即 $\lambda_1=\bar{\lambda}_2$，则当 $\mathrm{Re}\,\lambda_1\neq0$ 时奇点为焦点，且当 $\mathrm{Re}\,\lambda_1<0$ 时焦点是稳定的，对应的零解为渐近稳定的；而当 $\mathrm{Re}\,\lambda_1>0$ 时奇点和对应的零解均为不稳定的。当 $\mathrm{Re}\,\lambda_1=0$ 时奇点为中心，零解为稳定但非渐近稳定的。

上述奇点的类型和特征方程的根之间的关系还可以用图 1-7 来明了地表示。例如，引入符号

$$p=-(a+d),\ q=ad-bc$$

而特征方程(1.2.7)写成

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

则可以利用方程的根 λ_1、λ_2 与系数 p、q 之间的关系，通过 λ_1、λ_2 为媒介，在以 p、q 为直角坐标的平面(p,q)上明了地划分出各类型奇点的分布区域，如图 1-7 所示(图中抛物线的方程为 $p^2 - 4q = 0$)。

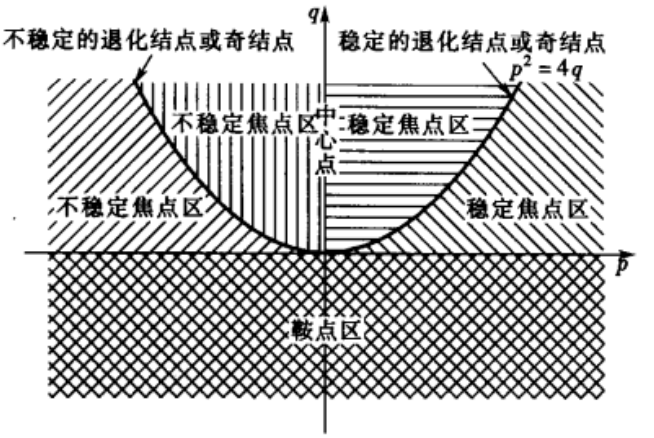


图 1-7 各类型奇点的分布区域

例 1.2.1 求二阶线性微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

奇点的特性。

解：通过变换$\frac{dx}{dt} = y$，可将方程化为下列一阶微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 3y \end{cases}$$

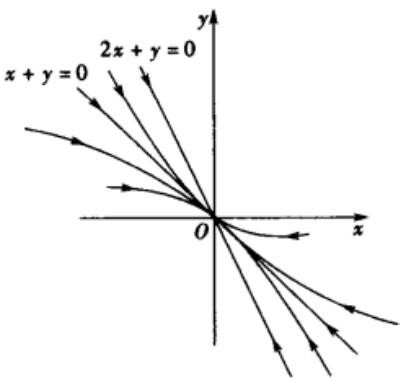


图 1-8 相平面上的轨线图貌

由直接计算可得其特征方程的根为 $\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = -2$，是一对相异负实根，根据定理 1.2.1 可知奇点是一个稳定结点。又 $\lambda_1 > \lambda_2$，根据前面的讨论知道，在 $\xi\eta$ 平面上于奇点附近轨线分布如图 1-1(a)所示。为画出轨线在 xOy 相平面上的图貌，必须根据线性变换式(1.2.6)具体求出 ξ 轴和 η 轴在 xOy 相平面上所对应的直线方程。

由前面的讨论，容易将它们写出如下：

$$x + y = 0 \quad 和 \quad 2x + y = 0$$

由此，不难画出轨线的图貌如图 1-8 所示。

另外，当“$q>0$ 且 $p^2-4q<0$ 且 $p=0$”时系统有一对纯虚根，而 $q=0$ 时系统有零根。这两种情况下非线性系统在奇点附近的性态难以确定。事实上，此时系统在奇点附近会产生非常复杂的动力学行为，包括出现分岔和混沌现象。在以后的章节会看到，“矩阵 $\boldsymbol{A}$ 至少有一个零根”是发生静态分岔的必要条件，而“矩阵 $\boldsymbol{A}$ 至少有一对纯虚根”是发生动态分岔中的 Hopf 分岔的必要条件。

一个线性部分是中心型的奇点本身既可能是中心也可能是焦点，区分这两种情况称为中心和焦点的判别。考虑方程

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\beta x_2 + f(x_1, x_2)\\ \dot{x}_2 &= \beta x_1 + g(x_1, x_2)\end{aligned}\right\} \tag{1.2.14}$$

将 $x_1=\dfrac{y_1+y_2}{2}$，$x_2=\dfrac{y_1-y_2}{2}$ 代入式(1.2.14)，经整理后得

$$\left.\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \mathrm{i}\beta y_1 + Y_1(y_1, y_2)\\ \dot{y}_2 &= -\mathrm{i}\beta y_2 + Y_2(y_1, y_2)\end{aligned}\right\} \tag{1.2.15}$$

这里 Y_1、Y_2 是高次项，满足 $\bar{Y}_1=Y_2$。共振关系具有下列形式：

$$q_1\lambda_1+q_2\lambda_2-\lambda_k=0,\ k=1,2,\ q_1+q_2\geqslant 2,\ q_1,q_2\in\mathbf{Z}_+$$

其中 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ 为线性化矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根。

$$q_1-q_2-1=0\quad(\text{当 } k=1 \text{ 时})$$

$$q_1-q_2+1=0\quad(\text{当 } k=2 \text{ 时})$$

这意味着存在一个形式正规化变换

$$\left.\begin{aligned}y_1 &= u_1 + h_1(u_1, u_2)\\ y_2 &= u_2 + h_2(u_1, u_2)\end{aligned}\right\} \tag{1.2.16}$$

将式(1.2.15)变为它的标准正规形：

$$\left.\begin{aligned}\dot{u}_1 &= \mathrm{i}\beta u_1(1+P_1(u_1u_2))\\ \dot{u}_2 &= -\mathrm{i}\beta u_2(1+P_2(u_1u_2))\end{aligned}\right\} \tag{1.2.17}$$

这里 P_1、P_2 是关于 u_1u_2 的复系数形式幂级数，$\bar{P}_1=P_2$ 成立，

$$P_1(u_1u_2)=R(u_1u_2)+\mathrm{i}G(u_1u_2)$$

则

$$P_2(u_1u_2)=R(u_1u_2)-\mathrm{i}G(u_1u_2)$$

其中 G、R 都是关于 u_1u_2 的实系数形式幂级数，满足 $R(0)=G(0)=0$。

通过变换

$$\left.\begin{aligned}u_1 &= v_1+\mathrm{i}v_2\\ u_2 &= v_1-\mathrm{i}v_2\end{aligned}\right\} \tag{1.2.18}$$

式(1.2.17)可进一步转化为实数形式的微分方程

$$\left.\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -\beta(v_2 + v_2 R(r^2) + v_1 G(r^2)) \\ \dot{v}_2 &= \beta(v_1 + v_2 R(r^2) - v_2 G(r^2)) \\ r^2 &= v_1^2 + v_2^2 \end{aligned}\right\} \tag{1.2.19}$$

这便是式(1.2.14)的实标准正规形。令

$$G(r^2) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m r^{2m} \tag{1.2.20}$$

情况(ⅰ) 存在自然数 N 满足

$$\left.\begin{aligned} g_N &\neq 0 \\ g_i &= 0 (i < N) \end{aligned}\right\} \tag{1.2.21}$$

考虑标准正规化变换式(1.2.16)的 $2N+1$ 阶截断

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= u_1 + h_1^{2N+1}(u_1, u_2) \\ y_2 &= u_2 + h_2^{2N+1}(u_1, u_2) \end{aligned}\right\} \tag{1.2.22}$$

这里 $h_k^{2N+1} = \sum_{|q|}^{2N+1} h_k^q u_1^{q_1} u_2^{q_2} (k = 1, 2)$。

通过变换式(1.2.22),式(1.2.15)变为它的 $2N+1$ 阶正规形

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \mathrm{i}\beta u_1 + \beta g_N (u_1 u_2)^N u_1 + \mathrm{i}\beta u_1 \mathbf{R}^N(u_1 u_2) + U_1 \\ \dot{u}_2 &= \mathrm{i}\beta u_2 + \beta g_N (u_1 u_2)^N u_2 - \mathrm{i}\beta u_2 \mathbf{R}^N(u_1 u_2) + U_2 \end{aligned}\right\} \tag{1.2.23}$$

这里 $\mathbf{R}^N$ 是 $\mathbf{R}$ 的 N 阶截断,$U_2 = \bar{U}_1$ 不包含低于 $2N+2$ 次项,进一步通过变换

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= v_1 + \mathrm{i}v_2 \\ u_2 &= v_1 - \mathrm{i}v_2 \end{aligned}\right\} \tag{1.2.24}$$

式(1.2.23)变为如下的实解析系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -\beta(v_2 + v_2 \mathbf{R}^N(r^2) + v_1 g_N r^{2N}) + o(r^{2N+1}) \\ \dot{v}_2 &= \beta(v_1 + v_1 \mathbf{R}^N(r^2) - v_2 g_N r^{2N}) + o(r^{2N+1}) (r^2 = v_1^2 + v_2^2) \end{aligned}\right\} \tag{1.2.25}$$

通过极坐标变换

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= r\cos\theta \\ v_2 &= r\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{1.2.26}$$

式(1.2.25)变为

$$\left.\begin{aligned} \dot{r} &= g_N r^{2N+1} + o(r^{2N+1}) \\ \dot{\theta} &= \beta(1 + o(r)) \end{aligned}\right\} \tag{1.2.27}$$

当 $r \ll 1$ 时,$\dot{r}$ 与 g_N 同号。由此可知,当 $g_N < 0$ 时,原点是稳定的;当 $g_N > 0$ 时,原点是不稳定的。

定义 1.2.2 $g_i, i \geqslant 1$ 称为系统(1.2.14)的第 i 个焦点量,第一个非零焦点量 g_N 所对应的自然数 N 称为焦点的阶,线性部分为中心型的焦点称为细焦点。

一个细焦点在小扰动下可能改变其稳定性，从而“跳出”闭轨，这种分岔现象称为 Hopf 分岔。一个 n 阶细焦点经过小扰动至多产生 n 条闭轨。

情况(ⅱ)　假设

$$g_m = 0, \forall\, m \geqslant 1 \tag{1.2.28}$$

则 $G \equiv 0$，推出 $P_1 = P_2$。标准正交化变换(1.2.16)收敛，因此式(1.2.14)实解析系统等价于下列系统：

$$\left.\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -\beta(v_2 + v_2 R(v_1^2 + v_2^2)) \\ \dot{v}_2 &= \beta(v_1 + v_2 R(v_1^2 + v_2^2)) \end{aligned}\right\} \tag{1.2.29}$$

作极坐标变换式(1.2.26)，式(1.2.29)变为

$$\left.\begin{aligned} \dot{r} &= 0 \\ \dot{\theta} &= \beta(1 + R(r^2)) \end{aligned}\right\} \tag{1.2.30}$$

因此，原点是中心。

$r = c$ 是以 $\dfrac{2\pi}{\beta(1 + R(c^2))}$ 为周期的闭轨。若 $R \equiv 0$，则这些闭轨的周期不依赖于 c。

1.3　按一次近似判断定常系统稳定性的准则

1.3.1　一阶线性常微分方程组的稳定性

常系数微分方程组是最重要的一类常微分方程，可以通过初等函数表示其解答。大量的工程实际问题可以近似地用线性系统理论来研究设计。下面首先考虑常系数线性微分方程组。

1.一般理论

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{1.3.1}$$

其矩阵形式为

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \tag{1.3.2}$$

其中 $\boldsymbol{X} = [x_1 \quad \cdots \quad x_n]^{\mathrm{T}}$ 为 n 维矢量，$\boldsymbol{A}$ 为 $(a_{ij})_{n\times n}$ 矩阵，方程组解的形式可设为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b} \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} \tag{1.3.3}$$

$\boldsymbol{b} = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n]^{\mathrm{T}}$ 为 n 维矢量，代入式(1.3.2)得

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{b} = 0 \tag{1.3.4}$$

式(1.3.4)具有非零解的条件是 $\boldsymbol{b}$ 的系数行列式为零，即

$$D(\lambda) = |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0 \tag{1.3.5}$$

$D(\lambda)$称为特征行列式，行列式展开后得相应的特征方程

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{1.3.6}$$

λ 为特征方程的特征根。它们的重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_m$，称为对应特征值的代数重数。选取非奇异矩阵 $\boldsymbol{P}$ 作线性变换，则

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{PY}$$

代入式(1.3.2)得

$$\boldsymbol{PY} = \boldsymbol{APY}$$

即

$$\dot{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{APY} = \boldsymbol{JY} \tag{1.3.7}$$

其中 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似，具有相同的特征根及重数。不妨设 $\boldsymbol{J}$ 为若当型矩阵，即

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{J}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{J}_m \end{bmatrix}$$

是对角型分块矩阵，非对角线上的元素为零，对角线上共 m 个非零子阵，每个子阵也是 $n_i \times n_i (i = 1,2,\cdots,m)$ 阶的对角型分块子阵，即

$$\boldsymbol{J}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{i1} & & & \\ & \boldsymbol{J}_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_{i\alpha_i} \end{bmatrix} \quad (\alpha_i \leqslant n_i, i = 1,2,\cdots,m)$$

其中子阵

$$\boldsymbol{J}_{iK} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (K = 1,2,\cdots,\alpha_i)$$

称为对应于特征根的若当块，有 $n_{i1} + n_{i2} + \cdots + n_{i\alpha_i} = n_i$，特征值 λ_i 共有 α_i 个若当块；$1 \leqslant \alpha_i \leqslant n_i$，$\alpha_i$ 称几何重数。若 $\alpha_i = n_i$，即为对角阵，代数重数与几何重数相同。

2. 稳定性分析

①当 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异单根时，$\boldsymbol{J}$ 为对角阵，几何重数与代数重数均为 1，则解的形式为

$$y_i = c_i e^{\lambda_i t} \tag{1.3.8}$$

此时若 λ_i 具有正实部，无论 C_i 为何值，当 $t \to \infty$ 时，$|y_i| \to \infty$，平凡解是不稳定的；若所有特征值具有负实部，无论 C_i 为何值，当 $t \to \infty$ 时，$|y_i| \to 0$，平凡解是渐近稳定的。

②当 $\boldsymbol{A}$ 有重特征根时，且代数重数等于几何重数，$\boldsymbol{J}$ 仍为对角型矩阵，解的形式同式(1.3.8)，稳定性分析结果同上，若几何重数小于代数重数，这时方程的形式为

$$y_i = f_i(t)\cdot e^{\lambda_i t} \tag{1.3.9}$$

式中 $f_i(t)$为时间 t 的多项式。多项式的次数小于几何重数。由于指数函数的增大速度大于幂函数,故在特征值实部不为零时,稳定性分析结果同上。若有零实部特征值,此时因 $f_i(t)$为时间 t 的多项式,故 $t\to\infty$时$|y_i|$,必有趋向于无穷的子列,所以系统平凡解(零解)不稳定。

又由于所作的变换是线性变换,所以式(1.3.1)和式(1.3.7)解的稳定性是等价的。

依据以上讨论,总结如下。

①若 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征根都具有负实部(负实根或负实部的复根),则方程(1.3.1)的零解是渐近稳定的,即

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = 0 \quad (i = 1,\cdots,n)$$

②若特征根中至少有一个根有正实部(即正实根或有正实部的复根),则方程(1.3.1)的零解是不稳定的。

③若没有带正实部的根,但有实部为零的单根(零根或一对纯虚根),则系统的零解是稳定的,但非渐近稳定。

④若没有带正实部的根,但有多重零根或多重纯虚根,此时若每个重根的代数重数与几何重数相等,则零解为稳定;若至少有一个重根的几何重数小于代数重数,则系统零解是不稳定的。

3.霍尔维茨判据

由于特征根实部的符号在稳定性问题中有关键性的作用,这里列出 Routh-Hurwitz 判据或称霍尔维茨(Hurwitz)判据。它给出特征方程的根有负实部的充分必要条件。

系统(1.3.1)零解的稳定性问题,可以归结为特征方程(1.3.6)

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (a_0 = 1)$$

的根的性质的研究。

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \cdots, \Delta_n = a_n\Delta_{n-1}$$

特征方程(1.3.6)的所有根都具有负实部,其充要条件是不等式

$$\Delta_k > 0 \tag{1.3.10}$$

当 $k = 1,2,\cdots,n$ 时成立(最后的 $\Delta_n > 0$, 可用条件 $a_n > 0$ 代替)。

这个论断称为霍尔维茨定理,条件称为霍尔维茨条件。可以看出,所有根具有负实部的必要条件是 $a_i > 0 (i = 1,\cdots,n)$。若其中一个系数是 0 或负数,则不再计算行列式的值了。霍尔维茨条件有一个等价条件,为

$$\Delta_k > 0, k = 1,\cdots,n \Leftrightarrow a_i > 0, i = 1,\cdots,n \text{ 且 } \Delta_{n-3} > 0, \Delta_{n-5} > 0, \cdots$$

另有一个充分条件

$$\Delta_k > 0, k = 1,\cdots,n \Leftarrow a_i a_{i+1} \geqslant 3a_{i-1}a_{i+2}$$

例 1.3.1 求二阶方程 $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ 的霍尔维茨条件。

解:霍尔维茨条件为 $a_1 = 0, \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} > 0$ 或 $a_1 > 0, a_2 > 0$。

例 1.3.2 求三阶方程 $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$ 的霍尔维茨条件。

解:霍尔维茨条件为

$$a_1 > 0, \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_3(a_1a_2 - a_3) > 0$$

即 $a_1 > 0, a_3 > 0, a_1a_2 > a_3$。

1.3.2 按一次近似判定稳定性的准则

上一节的稳定性分析及霍尔维茨判据完全解决了线性常微分方程组零解的稳定性态，下面来考虑非线性微分方程

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}) \tag{1.3.11}$$

其中 $\boldsymbol{R}(0) = 0$,且满足条件

$$\frac{\| \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}) \|}{\| \boldsymbol{X} \|} \to 0 \quad (\text{当} \| \boldsymbol{X} \| \to 0 \text{时}) \tag{1.3.12}$$

不难证明若 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$的各分量能展为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的幂级数且展开式起始项不低于二次,则条件式(1.3.12)将自动满足。与式(1.3.11)对应的常系数线性微分方程

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$

称为式(1.3.11)的一次近似方程。对于非线性微分方程(1.3.11)零解的稳定性,人们自然要问:在什么条件下,式(1.3.11)的零解的稳定性能由其一次近似方程(1.3.2)的零解的稳定性来决定? 关于这个问题有下面的结论。

定理 1.3.1 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根均具有负实部或至少有一个特征根具有正实部,则非线性方程(1.3.11)与其一次近似方程组(1.3.2)的零解的稳定性态一致。若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 没有正实部的特征根但有零实部的特征根(包括零根),则非线性方程组(1.3.11)的零解的稳定性态不能由其一次近似方程组(1.3.2)来决定。

我们称不能由一次近似来判定的稳定性态问题为临界情形,对这种情形在此不作进一步研究,留待下一章进行研究。

例 1.3.3 判定三阶非线性微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2x + y - z + x^3\mathrm{e}^x \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - y + x^3y + z^2 \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = x + y - z - \mathrm{e}^x(y^2 + z^2) \end{cases}$$

的稳定性。

解:其一次近似方程组的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0$$

由此得

$$a_1 = 4, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 17, a_3 = 3$$

由霍尔维茨判据可知所有特征根均有负实部,由上节的稳定性分析结论可知,零解 $x = y = z = 0$ 是渐近稳定的。

1.4　李雅普诺夫运动稳定性

1.4.1　李雅普诺夫函数

李雅普诺夫对运动稳定性问题提出了两种解决问题的方法,第一种是级数展开法,第二种是通过构造李雅普诺夫函数来判别解的稳定性。第二方法已成为解决运动稳定性问题的基本方法。以下先行叙述第二方法的内容。

李雅普诺夫第二方法的基本思想是,构造一个李雅普诺夫函数,简称 V 函数,根据 V 函数及其导数符号的性质,直接判别方程解的稳定性,而不去求解方程。

例 1.4.1　考虑小阻尼线性振动系统

$$m\ddot{x} + H\dot{x} + Kx = 0 \tag{1.4.1}$$

其中 m、H、K 为大于零的常数。

系统的机械能

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Kx^2 > 0 \tag{1.4.2}$$

而机械能的变化率

$$\dot{E} = m\dot{x}\ddot{x} + Kx\dot{x} \tag{1.4.3}$$

将 $m\ddot{x}$ 从式 (1.4.1)中解出,代入上式得

$$\dot{E} = -H\dot{x}^2 < 0$$

从物理意义上讲,系统总能量 $E > 0$ 且有限,又 $\dot{E} < 0$,则说明总能量最后要消耗完,所以原点是渐近稳定的。

若 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$,式(1.4.1)可化为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= x_2 \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= -\frac{H}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 \end{aligned}\right\} \tag{1.4.4}$$

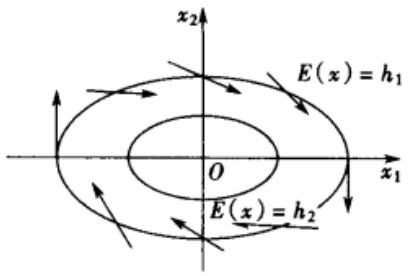


图 1-9 等能量线

从几何意义上看，在相平面上 $E=h=$常数为等能量线(即等高线)，$E=0$ 为原点，能量愈低，等能量线愈靠近原点，而且(显然各能量线互不相交，且自行封闭，等能量线是以原点为中心的一族同心椭圆)，轨线从高能量线向低能量线运动，最后等能量线逐渐收缩至原点，所以原点为渐近稳定。若 $H=0$，则 $\dot{E}=0$，则 $E=h=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ 仍表示以原点为中心的一族椭圆，如图 1-9 所示。当初始位移与初始速度足够小时(h 是由初始位置与式(1.4.1)初始速度决定的，这里 $h=\frac{1}{2}kx_0^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_0^2$)，那么它总是在原点足够小的邻域内，因此系统的零解是稳定的，但显然不是渐近稳定的。

这里借助 $E(x,\dot{x})$的性质而得出了系统(1.4.1)的稳定性，$E(x,\dot{x})$正是所要寻求的李雅普诺夫函数 $V(x_1,x_2)$。可以看出，只要找到一个满足下列条件的 $V(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，就可判断未扰运动的稳定性，即要求：

①仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 时，$V(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$；

②$V(x_1,x_2,\cdots,x_n)=h$ 是包含原点的一族封闭曲面；

③取不同的常数 h，这些曲面层层嵌套而不相交；

④再若方程组的全导数 $\dot{V}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$具有一定的符号特性，就可判断未扰运动的稳定性。

1.4.2 基本定义

1.定号、常号和变号函数

定义 1.4.1 对于自治系统，假设 $V(x_1,\cdots,x_n)$为在区域 $\|x\|\leqslant H$ 内定义的实连续函数，$V(0)=0$，其中 $\|x\|=(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)^{1/2}$。如果在此区域内恒有 $V(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0$，则称函数 V 为常正的。如果对一切 $x\neq 0$，都有 $V(x_1,\cdots,x_n)>0$，则称函数 V 为定正的。如果函数 $-V$为常正(或定正的)，称函数 V 为常负(或定负)的。

定义 1.4.2 若函数 $V(x_1,\cdots,x_n)$关于所有变量的偏导数存在且连续，则称

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}$$

为函数 $V(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的全导数。

定义 1.4.3 函数 $V(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为是变号的，如果它既不是定号的，也不是常号的，也就是说，无论 H 多么小，它在区域 $\|x\|\leqslant H$ 内既可取到正值，也可取到负值。

例如：

$V(x_1,x_2,x_2)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ 是正定的；

$V(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+x_2^2$ 是常正的；

$V(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2-x_3^4$ 是变号的。

最常见的是把二次型作为李雅普诺夫函数 V，因二次型有成熟的理论和判定准则，二次型可以用如下矩阵形式来表示：

$$V(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$

$\boldsymbol{X}$ 表示 n 行一列的矩阵；$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{X}$ 的转置，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，二次型的定号性与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的定号性一致，即二次型 V 正定(负定、常号)，当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 正定(负定、常号)时，这里的二次型为实二次型。

定理 1.4.1　对实二次型，$V(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 是实对称的，下列条件等价：

①$V(x_1,\cdots,x_n)$是正定的；

②存在一个非奇异矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}$，即 $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵合同；

③$\boldsymbol{A}$ 的特征值都大于零；

④行列式$|\boldsymbol{A}|$的所有顺序主子式 P_i 大于零，$\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵。

其中：$P_i=\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{vmatrix}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，称为矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的顺序主子式。

二次型 $V(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是常正的，当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 是常正的，常正的也称为半正定。

定理 1.4.2　对实二次型 $V(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 是实对称的，下列条件等价：

①$V(x_1,\cdots,x_n)$是半正定的；

②有可逆实矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$，其中 $d_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$；

③$\boldsymbol{A}$ 的特征值大于或等于零；

④$\boldsymbol{A}$ 的所有主子式皆大于或等于零；

⑤$\boldsymbol{A}$ 为半正定矩阵。

其中主子式为行指标与列指标相同的子式。不难得出负定与半负定的条件，因为 $V(x_1,\cdots,x_n)$是正定(半正定)时，$-V(x_1,x_2,\cdots,x_n)$就是负定(半负定)的。

2.含时间 t 的函数 $V(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$

对于非自治系统考虑形如 $V(t,x_1,\cdots,x_n)$的李雅普诺夫函数。

定义 1.4.4 在定义域 Ω 内，对 $t>t_0$，有函数 $V(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0$（或 $V\leqslant 0$），则称函数 V 为常正（或常负）。常正或常负函数称为常号函数。

定义 1.4.5 在定义域 Ω 内，函数 $V(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 显含时间 t，但能找到一个与时间无关的正定函数 $W(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，当 $t\geqslant t_0$ 时，使得

$$V\geqslant W(\text{或}-V\geqslant W)$$

则称函数 $V(t,x_1,\cdots,x_n)$ 为正定（负定）的函数。定正或定负函数称为定号函数。

定义 1.4.6 在定义域内，对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $\|x\|<\delta$ 时使得

$$|V(t,x)|<\varepsilon$$

成立，则称 V 具有无穷小上界。

对于所有不含时间 t 的 V 函数，由于其连续性，必有无穷小上界。但对于显含时间 t 的 $V(t,x)$ 函数，即使有界，也不一定有无穷小上界。

例 1.4.2 试证明 $V=t(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$ 为正定的。

证明：取 $w=t_0(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$，其中 $t_0>0$，显然 w 为正定的，则当 $t>t_0$ 时

$$V>W$$

因而 V 为正定的。证毕。

例 1.4.3 $V(t,x)=(x_1+\cdots+x_n)\sin t$ 具有无穷小上界，$V(t,x)=\sin[t(x_1+x_2+\cdots+x_n)]$ 不具有无穷小上界。

定义 1.4.7 若存在常数 $L>0$，对一切 $(t,y),(t,z)\in D$，使得 $\|f(t,y)-f(t,z)\|\leqslant L\|y-z\|$ 成立，则称 $f:D\subseteq\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 在 D 上满足关于 y 的利普希茨（Lipschitz）条件（或对 y 是利普希茨的）。

1.4.3 李雅普诺夫运动稳定性定理（第二方法）

1.考虑非自治系统

设扰动微分方程具有形式

$$\dot{x}=f(t,x_1,\cdots,x_n)=f(t,x) \tag{1.4.5}$$

当 $t\geqslant t_0$ 时，在原点邻域 $\Omega:\|x\|\leqslant H$ 内解存在且唯一。

定理 1.4.3 如果对于扰动运动方程的微分方程（1.4.5），可以找到定号函数 $V(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$，它对于时间 t 的全导数

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(t,x_1,\cdots,x_n) \tag{1.4.6}$$

是符号与 V 相反的常号函数，或者恒等于零，则式（1.4.5）的未扰运动（即平凡解 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$）是稳定的。

定理 1.4.4 如果对于扰动微分方程（1.4.5）可以找到定号函数 $V(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其通过式（1.4.5）的全导数式（1.4.6）是与 V 相反的定号函数，且具有无穷小上界，那么未被扰

动运动(即平凡解 $x_1 = x_2 = \cdots x_n = 0$)是渐近稳定的。

定理 1.4.4 比定理 1.4.3 增加两个条件：V 须具有无穷小上界；V 与 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ 是异号的定号函数。对自治系统而言，没有无穷小上界的条件，取 $V(x_1, \cdots, x_n)$为定号函数，$\dot{V} = \mathrm{grad}\ V \cdot f$ 与 V 为异号的定号函数，即可保证平凡解 $x_1 = \cdots = x_n = 0$ 为渐近稳定。

定理 1.4.5　在原点 Ω 邻域内，若存在一个具有无穷小上界的函数 V，它沿解的导数 $\dot{V} = \dfrac{\partial V}{\partial t} + \mathrm{grad}\ V \cdot f$ 是定号函数，同时对任意大的 $t > t_0$，无论 x_i 如何小，总可以使 V 与 $\dot{V}$ 的全导数值同正或同负，则未扰运动即式(1.4.5)的平凡解是不稳定的。

定理 1.4.6　**切达耶夫不稳定性定理**　如果在原点的邻域 Ω 内：①存在一个连续可微函数 V，使得在某个区域 $\Omega_1 \subset \Omega$ 内 $V(X) > 0(<0)$，在它的边界上 $V(X) = 0$；②当 $t \geqslant t_0$ 且无论 $\| x \|$ 多小它都存在，而 V 沿解关于 t 的全导数 $\dot{V}$ 在 $V > 0$ 的区域内取正(负)值，则式(1.4.5)的平凡解是不稳定的。

定理 1.4.6 比定理 1.4.5 条件宽松。定理 1.4.6 要求 V 在原点整个邻域内定号，V 具有无穷小上界；定理 1.4.5 只要有 $V > 0(<0)$的区域，在其内有 $\dot{V} > 0(<0)$及 V 在其内有界即可。

定理 1.4.7　若系统(1.4.5)存在无限大的正定函数 V，它沿解的全导数在整个相空间上 $\dot{V}$ 是全局负定的，则原点是渐近稳定的。

其中无限大正定函数是指 $\lim\limits_{\| x \| \to \infty} V = +\infty$。

2.考虑自治系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x) \tag{1.4.7}$$

其中函数 f 定义在区域

$$\| x \| \leqslant 0 \tag{1.4.8}$$

Ω 内。假定在上述区域内，函数 $f(x)$连续，$f(0, \cdots, 0) = 0$，并满足关于变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的李普希兹条件，以保证有唯一满足给定初始条件的解存在，这时 $V(x_1, \cdots, x_n)$关于时间的全导数变为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \mathrm{grad}\ V \cdot f \tag{1.4.9}$$

$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$也是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数，且在 $x_1 = \cdots = x_n = 0$ 变为零。

定理 1.4.8　**稳定性定理**　如果对于扰动运动的微分方程(1.4.5)可以找到一个定号函数 $V(x_1, \cdots, x_n)$，它对于时间 t 构成的全导数式(1.4.9)是常号函数，且正负号与 $V(x_1, \cdots, x_n)$相反或恒等于零，则未扰运动是稳定的。

定理 1.4.9　**渐近稳定性定理**　如果对于扰动运动的微分方程(1.4.7)可以找到一个定号函数 $V(x_1, \cdots, x_n)$，它对于时间 t 的全导数式(1.4.9)是与 V 异号的定号函数，则未扰运

动是渐近稳定的。

定理 1.4.10 渐近稳定性扩展定理 对于自治系统(1.4.7)存在定号函数 $V(x_1,\cdots,x_n)$使其对于解的全导数$\frac{dV}{dt}\leqslant 0$,并且 $\dot{V}=0$,除原点(0,0)外不含系统(1.4.7)的整条轨线,则系统(1.4.7)的未扰运动在李雅普诺夫意义下是渐近稳定的。

定理 1.4.11 全局稳定性定理 如果存在正定的具有无限大性质的函数 $V(x_1,\cdots,x_n)$,它关于 t 的由系统(1.4.7)构成的全导数

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}f_i$$

在相空间上是负定的,则系统(1.4.7)的未扰运动是全局稳定的。其中函数 $V(x_1,\cdots,x_n)$若对于任何 $A>0$,存在这样的 $R>0$ 使在球$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=R^2$ 之外不等式 $V(x_1,\cdots,x_n)>A$ 成立。

定理 1.4.12 全局稳定性扩展定理 如果对于系统(1.4.7)存在正定的,具有无限大性质的函数 $V(x_1,\cdots,x_n)$,使得

$$\frac{dV}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}f_i\leqslant 0$$

且在集合 $\dot{V}=0$ 上,除平凡解 $f(0,0)$,不包含系统(1.4.7)的整条轨线,则式(1.4.7)的零解是全局稳定的。

定理 1.4.13 运动的不稳定性定理 如果对于扰动运动的微分方程(1.4.7),可以找到函数 $V(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,它对于时间 t 由式(1.4.7)构成的全导数$\frac{dV}{dt}=\text{grad}\ V\cdot f$ 是定号的函数,而函数 V 本身不是与 dV/dt 的正负号相反的常号函数;则系统(1.4.7)的未扰运动是不稳定的。

定理 1.4.14 切达耶夫不稳定性定理 如果对于运动微分方程(1.4.7),可找到这样的函数 $V(x_1,\cdots,x_n)$,使得:

①在坐标原点的任意小邻域内存在 $V>0$ 的区域,在它的边界上有 $V=0$;

②在区域 $V>0$ 的所有点,全导数$\frac{dV}{dt}$取正值,则式(1.4.7)的未扰运动是不稳定的。

可以看出,自治系统的稳定性定理是非自治系统稳定性定理的直接推论。这些定理的证明过程在关于运动稳定性的专著上都可以找到。

例 1.4.4 研究

$$\begin{cases}\dot{x}_1=5x_1+x_2+x_1^2\\ \dot{x}_2=x_1-x_2+x_1x_2\end{cases}$$

原点的稳定性。

解:根据定理 1.4.14 取 $V=x_1x_2$ 在相平面第一象限内为 $V>0$ 的区域,$x_1=x_2=0$ 为边

界

$$\dot{V} = \dot{x}_1 x_2 + \dot{x}_2 x_1 = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 x_2 + 2x_1^2 x_2$$

显然在 $V>0$ 的区域及其边界上都有 $\dot{V}>0$,故原点不稳定。

例 1.4.5　研究

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3 \end{cases}$$

原点的稳定性。

解:取在全平面上的正定函数 $V = x_1^2 + x_2^2$,则

$$\dot{V} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2(x_1^4 + x_2^4)$$

所以原点全局渐近稳定。

例 1.4.6　研究

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1 \end{cases}$$

的原点稳定性。

解:取 $V = x_1^2 + x_2^2$ 为正定函数,则

$$\dot{V} = 2x_2 x_2 + 2x_1\dot{x}_1 = -2x_1^2$$

为常负函数,所以原点是稳定的。

1.4.4　李雅普诺夫函数的构造

对于自治的线性系统,构造李雅普诺夫函数的方法早已由李雅普诺夫本人指出。然而对于非线性系统而言,却没有一般的方法。

对于特殊类型的非线性系统的李雅普诺夫函数,很多都是按照对线性系统的李雅普诺夫函数类似地作出。这种方法已成为解决稳定性最有效的方法之一。

对同一个问题可以构造许多不同的李雅普诺夫函数,用不同的李雅普诺夫函数不会得出相反的结论。若原问题是稳定的,不会因 V 函数不同而得出相反的结论,但若原问题是渐近稳定的,选取不同的 V 函数,可以得到原点是稳定的或渐进稳定的结果,且吸引域大小可能不同。遗憾的是不存在一般的构造方法。

对于自治的线性系统,其稳定性问题早已解决,并不需用李雅普诺夫第二方法,但作出其李雅普诺夫函数,再经过一些变动,可以得到很大一类非线性方程的合适的李雅普诺夫函数。

1.类比法

对一个带有非线性项的系统,首先找出其相应的线性系统的李雅普诺夫函数 $V(x)$,然后对非线性系统选取类似的李雅普诺夫函数。

例 1.4.7　研究方程

$$\ddot{x} + \Psi(x)\dot{x} + f(x) = 0 \tag{1.4.10}$$

这个方程等价于下列一阶微分方程组

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -f(x) - \psi(x)y \end{aligned}\right\} \tag{1.4.11}$$

其对应的线性系统为

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -bx - ay \end{aligned}\right\} \tag{1.4.12}$$

对系统(1.4.12)而言,作出其李雅普诺夫函数

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{y^2}{2} + b\frac{x^2}{2} \\ \dot{V} &= -ay^2 \end{aligned}\right\} \tag{1.4.13}$$

为得到系统(1.4.11)的李雅普诺夫函数,仔细观察 V 中不包含参数 a,因此 $f(x)$ 不影响相应非线性系统李雅普诺夫函数的形式,但须找出 V 中表达式的 bx^2 相应的在非线性系统中的类似项,为此须考虑其物理意义。从力学观点来看,量 bx(或 $f(x)$)表示恢复力,而 $\frac{1}{2}bx^2$(即 $\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$)则对应于势能,因此,自然也可以取函数

$$V = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x f(x_1)\mathrm{d}x_1 \tag{1.4.14}$$

作为系统(1.4.11)的李雅普诺夫函数,其相应的全导数为

$$\dot{V} = -\psi(x)y^2$$

方程(1.4.10)平凡解全局稳定性条件为

①$f(x)x > 0$ (当 $x \neq 0$ 时);

②$\psi(x) > 0$;

③$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x \to 0$ (当$(x) \to \infty$时)。

容易验证,集合 $\dot{V} = 0$(即直线 $y = 0$)不包含除坐标原点外的整条轨线。

例 1.4.8 研究系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + by, f(0) = 0 \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned}\right\} \tag{1.4.15}$$

其相应的线性系统为

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned}\right\} \tag{1.4.16}$$

存在负的特征根条件为

$$\left.\begin{aligned} (a + d) &< 0 \\ ad - bc &> 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.4.17}$$

取 $V=(dx-by)^2+(ad-bc)x^2$ 作为李雅普诺夫函数，其相应的全导数为

$$\dot{V}=-2(a+b)(bc-ad)x^2$$

式(1.4.17)保证了 V 的正定性与 $\dot{V}$ 的常负性。

为找出非线性系统(1.4.15)的李雅普诺夫函数，需找出相应的类似项，由于 $f(x)$ 代替了 ax 的位置，V 中 $ax^2\left(=2\int_0^x ax_1\mathrm{d}x_1\right)$ 的位置类似地应由 $2\int_0^x f(x_1)\mathrm{d}x_1$ 来代替。因此取

$$V=(dx-by)^2+2d\int_0^x f(x_1)\mathrm{d}x_1-bcx^2$$

作为系统(1.4.15)的李雅普诺夫函数。其相应的全导数为

$$\dot{V}=-2\left(\frac{f(x)}{x}+d\right)\left(bc-\frac{f(x)}{x}d\right)x^2$$

因为 $V=(dx-by)^2+2\int_0^x(df(x_1)-bcx_1)\mathrm{d}x_1$，那么函数 V 的定号性条件为

① $\dfrac{df(x)}{x}-bc>0(x\neq 0)$；

② $\dfrac{f(x)}{x}+d<0(x\neq 0)$。

如果另有条件

③ $\int_0^x[d\cdot f(x_1)-bcx_1]\mathrm{d}x_1\to\infty$，$|x|\to\infty$ 时，

则可保证 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ 的常负性。$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t=0$(即 $x=0$)除原点外不包含整条轨线，则条件①、②、③保证了系统零解的全局稳定性。

2. 变量分离法

例 1.4.9　研究方程

$$\ddot{x}+\varphi(\dot{x})+g(\dot{x})f(x)=0 \tag{1.4.18}$$

其等价系统为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=y\\ \dot{y}&=-g(y)f(x)-\varphi(y)\end{aligned}\right\} \tag{1.4.19}$$

为了作出李雅普诺夫函数，利用变量分离法，寻找形如

$$V=F(x)+\varphi(y)$$

的函数 V，其相应的全导数为

$$\dot{V}=F'(x)\cdot y-\varphi'(y)[g(y)f(x)+\varphi(y)]$$

现要求 $\dot{V}$ 与 V 同样具有分离变量的结构，即要求

$$F'(x)-\varphi'(y)g(y)\cdot f(x)=0$$

即 $\dfrac{F'(x)}{f(x)}=\dfrac{\varphi'(y)\cdot g(y)}{y}=$ 常量，让常量等于 1，立即得到

$$F(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x, Z(y)=\int_0^y \frac{y}{g(x)}\mathrm{d}y$$

即有

$$V=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x_1+\int_0^y \frac{y_1\mathrm{d}y_1}{g(x)}$$

故系统(1.4.18)的全局稳定条件为

①$f(x)x>0 \quad (x\neq 0)$;

②$g(y)>0 \quad (y\neq 0)$;

③$\varphi(y)y>0 \quad (y\neq 0)$;

④$\int_0^x f(x_1)\mathrm{d}x_1\to\infty \quad (|x|\to\infty)$;

⑤$\int_0^y \frac{y_1\mathrm{d}y_1}{g(x)}\to\infty \quad (|y|\to\infty)$。

3.非线性自治系统的积分方法

考虑系统

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+g\left(x,\dot{x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right)=0 \tag{1.4.20}$$

其等价系统为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2\\ \dot{x}_2&=x_3\\ &\vdots\\ \dot{x}_{n-1}&=x_n\\ \dot{x}_n&=-g(x_1,\cdots,x_n)\end{aligned}\right\} \tag{1.4.21}$$

积分步骤如下：

①计算首次积分

$$\frac{\partial H}{\partial x_1}=h_1(x_1,\cdots,x_n)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_2}=h_2(x_1,\cdots,x_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_{n-2}}=h_{n-2}(x_1,\cdots,x_n)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_{n-1}}=g(x_1,\cdots,x_n)$$

$$\frac{\partial H}{x_n}=x_n+h_n(x_1,\cdots,x_n)$$

这里 $h_i=\int\frac{\partial}{\partial x_i}g(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)\mathrm{d}x_{n-1}$。

②定义 V 函数关于 x_i 的偏导数

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x_1}&=\frac{\partial H}{\partial x_1}+f_1\\ \frac{\partial V}{\partial x_2}&=\frac{\partial H}{\partial x_2}+f_2\\ &\vdots\\ \frac{\partial V}{\partial x_n}&=\frac{\partial H}{\partial x_n}+f_n\end{aligned}\right\}\tag{1.4.22}$$

f_i 是未确定函数，满足$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$。

③计算$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+\cdots+\frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}\\ &=x_2\frac{\partial V}{\partial x_1}+\cdots+\left[-g(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial V}{\partial x_n}\right]\end{aligned}$$

使$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$负定或者半负定，从而确定 $f_1,\cdots,f_n$。

④由方程(1.4.22)的线积分来确定 V，则

$$V=\int_0^{x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1,0,\cdots,0)\mathrm{d}x_1+\int_0^{x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1,x_2,0,\cdots,0)\mathrm{d}x_2+\int_0^{x_n}\frac{\partial v}{\partial x_n}(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_n$$

例 1.4.10　考虑

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2\\ \dot{x}_2&=x_3\\ \dot{x}_3&=-3x_1^2x_3-2x_2-6x_1x_2^2-x_1^3\end{aligned}\right\}\tag{1.4.23}$$

求非线性系统的李雅普诺夫函数积分步骤如下：

①计算首次积分

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x_1}&=\int\frac{\partial}{\partial x_1}g(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}x_2=\int(6x_1x_3+6x_2^2+3x_1^2)\mathrm{d}x_2\\ &=6x_1x_2x_3+2x_2^2+3x_1^2x_2\\ \frac{\partial H}{\partial x_2}&=3x_1^2+2x_2+6x_1x_2^2+x_1^3\\ \frac{\partial H}{\partial x_3}&=x_3+\int\frac{\partial}{\partial x_3}g(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}x_2=x_3+3x_1^2x_2\end{aligned}$$

②定义 V 函数关于 x_i 的偏导数

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 6x_1x_2x_3 + 2x_1^2 + 3x_1^2x_2 + f_1$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = 3x_1^2x_3 + 2x_2 + 6x_1x_2^2 + x_1^3 + f_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_3} = x_3 + 3x_1^2x_2 + f_3$$

③计算$\frac{dV}{dt}$

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_3}\cdot\frac{dx_3}{dt}\\ &= (6x_1x_2^2 - 9x_1^4x_2)x_3 + (2x_2^3 - 18x_1^3x_2 - 3x_1^5)x_2 - 3x_1^2x_2^2\\ &\quad + x_2f + x_3f_2 - f_3(3x_1^2x_3 + 2x_3 + 6x_1x_2^2 + x_1^3)\end{aligned}$$

如果取

$$f_1 = (2x_2^3 + 18x_1^3x_2^2 + 3x_1^5)$$

$$f_2 = (-6x_1x_2^2 + 9x_1^4x_2)$$

$$f_3 = 0$$

则 $\dot{V} = -3x_1^2x_2^2$ 是常负的。

④计算 V 函数

$$\begin{aligned}V &= \int_0^{x_1}\frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1,0,0)dx_1 + \int_0^{x_2}\frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1,x_2,0)dx_2 + \int_0^{x_3}\frac{\partial V}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3)dx_3\\ &= \frac{1}{2}(x_3 + 3x_1^2x_2)^2 + \frac{1}{4}x_1^6\end{aligned}$$

这是全局正定的李雅普诺夫函数,故系统(1.4.23)的零解为全局渐近稳定的。

1.4.5 李雅普诺夫第一运动稳定性定理

设系统的扰动运动微分方程为

$$\dot{x}_i = f_i(x_1,\cdots,x_n) \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{1.4.24}$$

$f_i(0) = 0, f_i(x_1,\cdots,x_n)$为 x_i 的非线性函数。将 f_i 在原点 $x_i = 0(i = 1,\cdots,n)$附近展开成泰勒级数

$$f_i(x) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + \sum_{(\sum m_i \geqslant 2)} p_i^{(m_1,\cdots,m_n)}x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n} \tag{1.4.25}$$

简写为

$$f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j + X_i(x_1,\cdots,x_n)$$

如果略去高次项,微分方程(1.4.24)可写为

$$\dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \tag{1.4.26}$$

式(1.4.26)称为微分方程(1.4.24)的一次近似方程。问题是在什么情况下能够根据一次近似方程决定系统(1.4.24)原点的稳定性,什么情况下不能根据它决定原点的稳定性。李雅普诺夫证明了以下定理。

定理 1.4.15　如果一次近似式(1.4.26)的所有特征根都具有负实部,则原非线性系统(1.4.24)的原点是渐近稳定的,而与高次项无关。

定理 1.4.16　如果一次近似式(1.4.26)至少有一个特征根具有正实部,则原非线性系统的原点是不稳定的,而与高次项无关。

定理 1.4.17　如果一次近似式有实部为零的特征根,而其余的特征根实部为负,则原非线性系统原点的稳定性取决于高次项,即原点可能稳定,也可能不稳定,称此为临界情况。

证明:对于定理 1.4.15,设一次近似式(1.4.26)原点为渐近稳定,根据类比法,可以构造一个二次正定型函数 $V(x_1,\cdots,x_n)$,使其沿(1.4.26)的积分曲线的导数为

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(a_{i1}x_1 + \cdots a_{in}x_n) = w$$

w 为负定的二次型函数,正定函数沿式(1.4.24)的积分曲线的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + X_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\left(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}X_i\right)\\ &= w + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}X_i\end{aligned}$$

右端第二项为不低于三次方的函数,所以在原点充分小邻域里 $\dot{V}$ 与 W 符号相同,即 $\dot{V}$ 负定。因此原系统(1.4.24)原点为渐近稳定的。

对于定理 1.4.16 可做类似的证明。

1.4.6　后继函数

研究平面自治系统

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= P(x,y)\\ \dot{y} &= Q(x,y)\end{aligned}\quad (x,y)\in\mathbf{R}^2\right\} \tag{1.4.27}$$

设 P、Q 在(x,y)平面上连续,且满足解的唯一性条件。

定义 1.4.7　如果任何与直线段$\overline{MN}$相交的轨线,当 t 增加时都只从$\overline{MN}$的一侧走向另一侧,且没有轨线相切(即轨线与$\overline{MN}$横截相交),则称$\overline{MN}$为无切线段。

显然,如果点 A_0 是系统(1.4.27)的一个常点,则必存在过点 A_0 的无切线段(亦称为截线)$\overline{MN}$。事实上,由于点 A_0 是常点,在该处的向量$(P,Q)|_{A_0}$有确定的方向。任取一条与

该向量的方向不同且过点 A_0 的直线 L。由于 $P(x,y),Q(x,y)$连续,那么可以取点 A_0 的足够小的邻域,使得在其中各点处(P,Q)的方向与直线 L 的方向不同。于是直线 L 在此 L 邻域中的部分$\overline{MN}$就是一条过点 A_0 的无切线段。

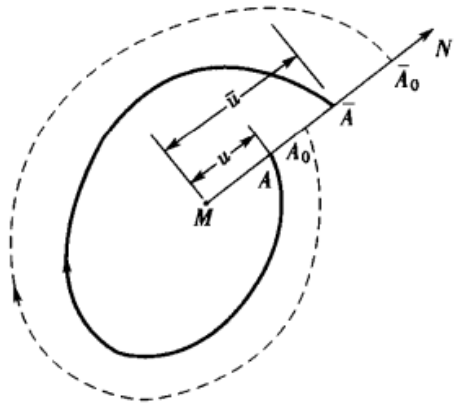


图 1-10 后继点示意图

考虑 $t=0$ 时从无切线段$\overline{MN}$上的点 A_0 出发的轨线。如果此轨线在以后时刻仍会与$\overline{MN}$再次相交,令 $\bar{A}_0$ 为在 $t>0$ 时刻的第一个交点,则称 $\bar{A}_0$ 为 A_0 的后继点(见图 1-10)。由于解对初值的连续依赖性,只要 $\bar{A}_0$ 不是无切线段$\overline{MN}$的端点,那么在点 $\bar{A}_0$ 附近存在$\overline{MN}$上的一个小段,使得 $t=0$ 时从这个小线段上的任何点出发的轨线都与$\overline{MN}$再次相交,即这个小线段上的点 A 都有后继点$\bar{A}$。于是得到一个关于这个小段上的点与其后继点的一一对应关系,也就是说在$\overline{MN}$上点 A_0 定义了一个点变换。

在无切线段$\overline{MN}$上取一个正向,就可以定义$\overline{MN}$上的点的坐标(例如取由点 M 沿$\overline{MN}$到该点的有向距离为坐标)。记$\overline{MN}$上的点 A 及其后继点$\bar{A}$ 的坐标分别为 u、$\bar{u}$,于是上述点变换给出一个函数:

$$\bar{u}=g(u) \tag{1.4.28}$$

定义 1.4.8 由式(1.4.28)给出的无切线段上的点与其后继点(如果存在的话)的坐标之间的函数关系称为后继函数。有时也把 $h(u)\triangleq g(u)-u$ 称为后继函数。

后继函数法是判定奇点 O 是中心还是焦点的一种重要方法。在下面假设 φ、ψ 在原点的邻域内是 x、y 的解析函数,且从二次项开始。此外,还设 $\beta>0$。

引理 1.4.1 设 $f(\theta)$是以 l 为周期的连续周期函数,即 $f(\theta+l)=f(\theta)$,则

$$\int_0^{\theta} f(\xi)\mathrm{d}\xi = g\theta+\varphi(\theta)$$

其中常数

$$g=\frac{1}{l}\int_0^{l} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$\varphi(\theta)$也是以 l 为周期的连续周期函数,即

$$\varphi(\theta+l)=\varphi(\theta)$$

取极坐标系,系统

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=-\beta y+\varphi(x,y)\\ \dot{y}&=\beta x+\psi(x,y)\\ \varphi(0,0)&=\psi(0,0)=0\end{aligned}\right\} \tag{1.4.29}$$

变为

$$\left.\begin{aligned}\dot{r} &= r^{-1}(x\dot{x}+y\dot{y})\\ &= \cos\theta\varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)+\sin\theta\psi(r\cos\theta, r\sin\theta)\equiv rR(r,\theta)\\ \dot{\theta} &= r^{-2}(x\dot{y}-y\dot{x})\\ &= \beta+r^{-1}[\cos\theta\psi(r\cos\theta, r\sin\theta)-\sin\theta\varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)]\\ &= \beta+Q(r,\theta)\end{aligned}\right\} \tag{1.4.30}$$

其中 R、Q 是 r 的幂级数，从 r 的一次方开始，系数是 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的多项式。当 $r\to 0$ 时，R、$Q\to 0$。因为 $\beta>0$，所以可取充分小的 $r_1>0$，使得在 $0\leqslant r<r_1$ 上有 $\beta+Q(r,\theta)>0$，从极坐标中消去 t，得到

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\frac{rR}{\beta+Q} \tag{1.4.31}$$

由前面所作的假设，可知式(1.4.31)的右端在 $0\leqslant r<r_1$，$-\infty<\theta<+\infty$ 上解析，故可展成 r 的幂级数。于是式(1.4.31)可写成

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=R_2(\theta)r^2+R_3(\theta)r^3+\cdots \tag{1.4.32}$$

其中 $R_2(\theta)$，$R_3(\theta)$，……都是 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的多项式。

由于点 O 是式(1.4.29)的奇点，因此对初始条件 $\theta=0$、$r=c$，有解 $r(\theta)\equiv 0(-\infty<\theta<+\infty)$，由解对初值的连续依赖性，存在 $0<c_1<r_1$，使得当 $0<c_1<r_1$ 时，满足初始条件 $\theta_0=0$，$r_0=c$ 的解 $r=r(\theta,c)$ 在 $\theta\in[-4\pi,4\pi]$，$r\in[0,r_1)$ 上存在。此外，$r(\theta,c)$ 是 c 的解析函数。于是 $r(\theta,c)$ 在 $-4\pi\leqslant\theta\leqslant 4\pi$ 上可以展成 c 的幂级数

$$r(\theta,c)=r_1(\theta)c+r_2(\theta)c^2+\cdots \tag{1.4.33}$$

由初始条件 $r(0,c)=c$，可知

$$\left.\begin{aligned}&r_1(0)=1\\ &r_2(0)=r_3(0)=\cdots=0\end{aligned}\right\} \tag{1.4.34}$$

将式(1.4.33)代入式(1.4.32)，得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}\theta}c+\frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}\theta}c^2+\frac{\mathrm{d}r_3}{\mathrm{d}\theta}c^3+\cdots\\ &=R_2(\theta)(r_1c+r_2c^2+\cdots)^2+R_3(\theta)(r_1c+r_2c^2+\cdots)^3+\cdots\end{aligned}$$

令上式两侧 c 的同次幂系数相等，可得一组关于 $r_k(\theta)$ 的方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}\theta}=0\\ \dfrac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}\theta}=R_2r_1^2\\ \dfrac{\mathrm{d}r_3}{\mathrm{d}\theta}=R_3r_1^3+2R_2r_1r_2\\ \vdots\end{cases}$$

结合初始条件式(1.4.34)去求解,得到

$$\begin{cases} r_1(\theta)=1 \\ r_2(\theta)=\int_0^{\theta} R_2(\xi)\mathrm{d}\xi \\ r_3(\theta)=\int_0^{\theta}[R_3(\xi)+2R_2(\xi)r_2(\xi)]\mathrm{d}\xi \\ \vdots \end{cases}$$

由于 $R_2(\theta)$是以 2π 为周期的连续周期函数,故由引理 1.4.1 得知

$$r_2(\theta)=g_2(\theta)+\varphi_2(\theta)$$

其中

$$g_2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_2(\xi)\mathrm{d}\xi,\ \varphi_2(\theta+2\pi)=\varphi_2(\theta)$$

如果 $g_2=0$,则 $r_2(\theta)=\varphi_2(\theta)$,即有 $r_2(\theta+2\pi)=r_2(\theta)$。于是 $R_3(\theta)+2R_2(\theta)r_2(\theta)$也是以 2π 为周期的连续周期函数。再由引理 1.4.1 得知

$$r_3(\theta)=g_3(\theta)+\varphi_3(\theta)$$

其中

$$g_3=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[R_3(\xi)+2R_2(\xi)r_2(\xi)]\mathrm{d}\xi$$

$$\varphi_3(\theta+2\pi)=\varphi_3(\theta)$$

如果 $g_3=0$,则 $r_3(\theta)=\varphi_3(\theta)$,即有 $r_3(\theta+2\pi)=r_3(\theta)$。如此进行下去,如果对一切 $k=2,3,\cdots$,都有 $g_k=0$,则有 $r_k(\theta+2\pi)=r_k(\theta)$,$k=2,3,\cdots$,从而对于一切 $0<c<c_1$,都有 $r(\theta+2\pi,c)=r(\theta,c)$,即 $r=r(\theta,c)$都是对 θ 以 2π 为周期的周期解。由此可见,在点 O 的充分小邻域内的轨线全为闭轨,此时点 O 是系统(1.4.29)的中心。

如果存在某个正整数 m,使得对 $k=2,3,\cdots,m-1$ 有 $g_k=0$,但 $g_m\neq 0$,则点 O 是系统(1.4.29)的(细)焦点。现证明如下:

在此情形下,根据式(1.4.23)和关于 $r_1(\theta),r_2(\theta),\cdots,r_m(\theta)$的结果,有

$$r(\theta,c)=c+\varphi_2(\theta)c^2+\cdots+\varphi_{m-1}(\theta)c^{m-1}+g_m\theta c^m+\varphi_m(\theta)c^m+\cdots \tag{1.4.35}$$

其中 $\varphi_2,\cdots,\varphi_{m-1},\varphi_m,\cdots$皆为 θ 的周期为 2π 的函数。

由前面知道,当 $0<r<r_1$ 时,有

$$\dot{\theta}=\beta+Q(r,\theta)>0$$

即在点 O 的这个小邻域内,θ 沿轨线单调增加。从 $\theta_0=0$、$r_0=c$ 处出发的轨线,绕原点一周到 $\theta=2\pi$ 时,有 $r=r(2\pi,c)$,称 $h(c)=r(2\pi,c)-r(0,c)$为后继函数。利用式(1.4.25)及 $\varphi_k(k=2,3,\cdots,m)$的周期性,可知后继函数

$$h(c)=r(2\pi,c)-r(0,c)=2\pi g_m c^m+\cdots \tag{1.4.36}$$

上式右端从第二项起，c 的幂至少是 $m+1$ 次。因此，当 c 充分小时，上式右端的符号与 g_m 相同。如果 $g_m<0$，则当 c 充分小时有

$$r(2\pi,c)<r(0,c)$$

这表明随着 t 增加，轨线以逆时针方向绕原点旋转一周时，轨线上的点更接近原点。由此可见，点 O 是稳定焦点。同理，如果 $g_m>0$，当 c 充分小时有

$$r(2\pi,c)>r(0,c)$$

此时，点 O 是不稳定焦点。总的来说，对于系统(1.4.19)，只要根据前面求得的 $g_k(k=2,3,\cdots)$的情况，就可以判定点 O 是中心还是稳定(不稳定)焦点。

例 1.4.11　考虑系统

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=-y\\ \dot{y}&=x+\alpha x^2+\beta y^2\end{aligned}\right\}\tag{1.4.37}$$

它有孤立奇点 $O(0,0)$，其线性近似系统以点 O 为中心。现在研究非线性系统的奇点 O 的性态。取极坐标，式(1.4.37)化为

$$\begin{cases}\dot{r}=\alpha r^2\cos^2\theta\sin\theta+\beta r^3\sin^4\theta\\ \dot{\theta}=1+\alpha r\cos^3\theta+\beta r^2\cos\theta\sin^3\theta\end{cases}$$

两式相除后，得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}&=\frac{\alpha r^2\cos^2\theta\sin\theta+\beta r^3\sin^4\theta}{1+\alpha r\cos^3\theta+\beta r^2\cos\theta\sin^3\theta}\\ &=\alpha r^2\cos^2\theta\sin\theta+r^3(\beta\sin^4\theta-\alpha^2\cos^5\theta\sin\theta)+\cdots\end{aligned}$$

设初始条件为 $\theta_0=0$、$r_0=c$ 的解为

$$r=r(\theta,c)=c+r_2(\theta)c^2+r_3(\theta)c^3+\cdots$$

且有 $r_2(0)=r_3(0)=\cdots=0$。将此解代入上面的方程中，令两端的 c^2 的系数相等，有

$$\frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}\theta}=\alpha\cos^2\theta\sin\theta$$

由此得到

$$g_2=\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=0$$

于是 $r_2(\theta)$是周期为 2π 的函数。直接求解上面的方程，得到

$$r_2(\theta)=\frac{\alpha}{3}(1-\cos^3\theta)$$

再令 c^3 的系数相等，得到

$$\frac{\mathrm{d}r_3}{\mathrm{d}\theta}=\beta\sin^4\theta-\alpha^2\cos^5\theta\sin\theta+2\alpha\cos^2\theta\sin\theta\cdot r_2(\theta)\equiv f(\theta)$$

因为

$$g_3=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{3\beta}{8}$$

所以当 $\beta \neq 0$ 时，点 O 是系统(1.4.37)的一阶细焦点。如果 $\beta > 0$，它是不稳定焦点；如果 $\beta < 0$，它是稳定焦点。而 $\beta = 0$ 时，点 O 是系统的中心，可由下面的定理得知。

定理 1.4.18 **对称定理** 考虑平面系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= P(x,y) \\ \dot{y} &= Q(x,y) \end{aligned}\right\} \tag{1.4.38}$$

设原点 O 是它的一个孤立奇点，P、Q 在点 O 的邻域内是 x、y 的解析函数。如果 P、Q 满足

$$P(-x,y) = P(x,y), Q(-x,y) = -Q(x,y)$$

或者

$$P(x,-y) = -P(x,y), Q(x,-y) = Q(x,y)$$

则当点 O 是系统(1.4.38)的线性近似系统的中心时，点 O 也是系统(1.4.38)的中心。

第 2 章　分岔的基本概念

2.1　结构稳定性

在研究分岔之前，先介绍系统的结构稳定性。结构稳定性是指动力系统受到扰动后，其拓扑结构保持不变的性质。结构稳定性理论与分岔理论有着密切的关系。

定义 2.1.1　设 f 是微分流形 M 上的 C^k 向量场，若存在 $\varepsilon>0$，使得在 f 的某邻域 $B_\varepsilon(f)$ 中的任何 C^k 向量场 g 都与 f 拓扑等价，则称向量场 f 是 C^k 结构稳定的；否则，称 f 为 C^k 结构不稳定的。

记 U 上全体 C^1 向量场的集合为 $æ^1(U)$，U 上全体 C^1 微分同胚的集合为 $\mathrm{Diff}^1(U)$，则有下面关于平面向量场的结构稳定性的重要定理。

定理 2.1.1　**安德罗诺夫-庞特里雅金定理**　记平面单位圆盘 $B^2=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$。考虑系统

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=P(x,y)\\ \dot{y}&=Q(x,y)\\ (x,y)&\in B^2\end{aligned}\right\}\tag{2.1.1}$$

设函数 P、$Q\in \mathbf{C}^1(B^2,\mathbf{R})$（即向量场 $(P,Q)\in æ^1(B^2)$），且向量场 (P,Q) 与 B^2 的边界 ∂B^2 是无切的，则系统为结构稳定的充要条件是：

①系统有有限个平衡点和闭轨，且它们都是双曲的；

②系统不存在从鞍点到鞍点的轨线。

该定理可推广到二维可定向的紧流形 M^2（例如 R^3 中的球面和环面等）上的系统，此时有以下定理。

定理 2.1.2　**皮郝图定理**　设 M^2 是二维可定向的紧流形，$f\in æ^1(M^2)$，则向量场为结构稳定的充要条件是：

①系统有有限个平衡点和闭轨，且它们都是双曲的；

②系统不存在从鞍点到鞍点的轨线；

③此系统的非游荡集仅由平衡点和闭轨组成。

定理 2.1.3　**皮郝图稠密性定理**　设 M^2 是二维可定向的紧流形，记 $æ^1(M^2)$ 中一切结构稳定的向量场构成的子集为 Σ，则 Σ 在 $æ^1(M^2)$ 中是开且稠密的。

皮郝图稠密性定理表明：在 $æ^1(M^2)$ 中，结构稳定系统是非常普遍的，即使是结构不稳定的系统，也可以用结构稳定的系统任意地逼近。为了进一步地说明，这里引入通有性的概

念。

定义 2.1.2 设 V 是一度量空间，S 是 V 的一个子集，如果 S 是可数个在 V 中稠密的开子集的交，则称 S 是一个剩余集或余集。

定义 2.1.3 若在 $æ^1(U)$（或 $\mathrm{Diff}^1(U)$）中，满足某个性质 P 的向量场（或微分同胚）的集合是一个剩余集，则称性质 P 是通有的；若满足某个性质 P 的向量场（或微分同胚）的集合的补集是一个剩余集，则称性质 P 是退化的。

由通有的定义和皮郝图定理可知，在向量场的集合 $æ^1(M^2)$ 中，结构稳定性是通有的，而结构不稳定性是退化的。

2.2 分岔的基本概念

分岔理论研究非线性常微系统由于参数的改变而引起的解的不稳定性从而导致解的数目的变化行为。如果一个动力系统是结构不稳定的，则任意小的适当的扰动都会使系统的拓扑结构发生突然的质的变化，这种质的变化称为分岔。

下面给出分岔的数学定义。

定义 2.2.1 考察系统

$$\dot{x} = f(x, \mu) \tag{2.2.1}$$

其中 $x \in U \subseteq \mathbf{R}^n$ 称为状态变量，$\mu = [\mu_1 \quad \cdots \quad \mu_m]^T \in J \subseteq \mathbf{R}^m$ 称为分岔参数，则对固定的 μ，$f(x, \mu) \in æ^1(U)$。当参数 μ 连续变动时，系统的拓扑结构在 $\mu_0 \in J$ 发生突然变化，则称系统在 $\mu = \mu_0$ 处出现分岔，并称 μ_0 为一个分岔值。在参数 μ 的空间中，由分岔值组成的集合称为分岔集。

为了清楚地表示分岔情况，在 (x, μ) 空间中画出系统(2.2.1)的极限集（如平衡点、极限环等）随参数 μ 变化的图形，称为分岔图。

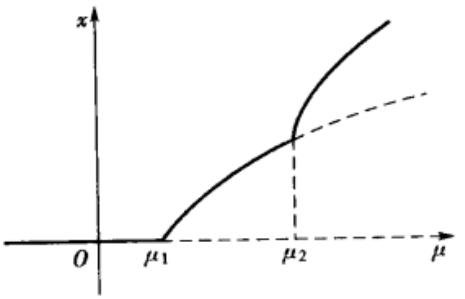


图 2-1 二次分岔图

需要指出的是，在分岔参数的变化范围内，系统可能在不同的参数值处相继出现分岔，如图 2-1 所示，系统在 $\mu = \mu_1$ 处从基本解 $x = 0$ 分岔出初级分岔解，接着在 $\mu = \mu_2$ 处又从初级分岔解分岔出二级分岔解。

现在考虑 $æ^1(U)$ 中所有含 m 个参数的向量场组成的子集：

$$D = \{f(x, \mu) \mid f \in æ^1(U), \mu \in J \subset \mathbf{R}^m\}$$

定义 2.2.2 设 $\mu_0 \in J$ 是 $f \in D$ 的一个分岔值，若存在 f 的某个邻域 $W \subseteq D$，使得对于任意 $g \in W$ 存在一个同胚 $h: U \times J \to U \times J$，$(x, \mu) \to (y(x, \mu), v(\mu))$，它把向量场 $f(x, \mu)$ 的轨线映为向量场 $g(y, v)$ 的轨线，并保持时间定

向，则称 f 在 μ_0 处的分岔为通有的；否则称 f 在 μ_0 处的分岔为退化的。

下面研究平面向量场的分岔。由安德罗诺夫-庞特里雅金定理可得到下面的定理。

定理 2.2.1　在 $\mathfrak{X}^1(B^2)$ 中出现分岔的充要条件是下面条件之一成立：

①存在非双曲平衡点；

②存在非双曲闭轨；

③存在同宿或异宿轨线。

最后，分岔问题的主要内容可归纳如下：

①分岔集的确定（即分岔的必要条件和充分条件的研究）；

②当分岔出现时系统的拓扑结构随参数变化的情况（即分岔的定性性态的研究）；

③分岔解（尤其是平衡点、极限环等）的计算；

④不同分岔的相互作用以及它们与动力系统的其他现象（如锁相、混沌等）的关系。

2.3　分岔的类型

根据研究的侧重点不同，可以将分岔划分为多种类型。这里介绍主要的几种划分方法。

2.3.1　一般系统的分岔类型

(1)按系统是否显含时间 t 划分

按系统是否显含时间 t 划分，分岔可分为自治系统分岔和非自治系统分岔。目前主要的分岔理论都是针对自治系统的分岔问题，对非自治系统的分岔问题，一般是先将其化为自治系统，再进行研究。具体做法有以下 3 种：

①直接把时间 t 看作参数，增补一个方程：$\dot{t}=0$，则系统成为自治系统；

②对周期性的时间项，可以运用平均化方法，在一个周期内对其进行平均，从而得到新的平均后的自治方程；

③对特别简单的周期性的时间项如 $\cos \omega t$、$\sin \omega t$，可以使用升维法，即直接增补两个系统方程 $\dot{u}=\omega v$，$\dot{v}=-\omega u$，则立即可知 $u=\sin \omega t$，用 u 替换系统方程中的 $\sin \omega t$ 后即得自治方程。

(2)按所研究的分岔的空间域划分

按所研究的分岔的空间域划分，分岔可分为局部分岔和全局分岔。只研究在平衡点或闭轨的某个邻域内的向量场的分岔称为局部分岔，考虑向量场的全局特性的分岔称为全局分岔。一般来说，目前主要的理论分析都只集中于局部分岔，而全局分岔除了依靠数值计算外，主要依靠根据相空间里各平衡点/闭轨的局部分岔特性得出轨线的局部流向，然后进行综合以推测出相空间全局的轨线性态。

(3)按研究对象划分

按研究对象划分，分岔可分为静态分岔和动态分岔。静态分岔是研究静态方程

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})=\boldsymbol{0} \tag{2.3.1}$$

的解的数目随参数 μ 变动而发生的突然变化，其中 $\boldsymbol{f}: U\times J\subseteq \mathbf{R}^n\times \mathbf{R}^m\to \mathbf{R}^n$。

定义 2.3.1 设$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)\in U\times J$ 是系统(2.3.1)的平衡点，取点$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)$的某个足够小的邻域 $\Omega\in U\times J$，记 $n(\boldsymbol{\mu})$为当 $\boldsymbol{\mu}$ 固定时系统在 Ω 内的解的数目。若当 $\boldsymbol{\mu}$ 经过 $\boldsymbol{\mu}_0$ 时，$n(\boldsymbol{\mu})$突然发生变化，则称$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)$为一个静态分岔点，$\boldsymbol{\mu}_0$ 为一个静态分岔值。在静态分岔点$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)$附近，系统的解$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$的集合称为 $\boldsymbol{f}$ 的静态分岔图或零点集。

上式的解对应系统的平衡点，因此静态分岔属于平衡点分岔的研究范围。根据第 3 章中将要介绍的隐函数定理，可推出静态分岔的必要条件。

定理 2.3.1 考察系统(2.3.1)，设点$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)$使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)=\boldsymbol{0}$，在点$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)$附近，$\boldsymbol{f}$ 对$\boldsymbol{x}$ 可微，且 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$和 $D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$对 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{\mu}$ 均连续。若$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)$是 $\boldsymbol{f}$ 的静态分岔点，则 $D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)$是奇异的。

同时还有如下定义。

定义 2.3.2 若在点$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)\in U\times J$ 处有$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)=\boldsymbol{0}$，且 $D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)$是奇异的，则称$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)$为向量场 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$的一个奇异点。

这里定义的奇异点与 1.2 节定义的相平面上的奇点(平衡点、临界点)不同，奇异点一定是奇点，反之则不一定成立。

动态分岔则是研究系统的拓扑结构发生的突然变化。解的数目的变化也属于系统拓扑结构的变化，因此动态分岔包括了静态分岔。

(4)按系统的维数划分

按系统的维数划分，分岔可分为一维分岔和多维分岔。一维分岔是指一维系统

$$f(x,\mu)=0 \tag{2.3.2}$$

的分岔行为，其中 $f: U\times J\subseteq \mathbf{R}\times \mathbf{R}\to \mathbf{R}$。常见的一维分岔有 3 种：鞍结分岔、跨临界分岔和叉形分岔，将在 2.4 节中进行详细研究。多维分岔是指多维系统(2.3.1)的分岔行为。多维系统的分岔行为十分复杂，这一直是国内外学者的研究重点。

(5)按系统的余维数划分

按系统的余维数划分，分岔可分为余维 1 分岔和高余维分岔。余维 1 分岔共有 4 种，包括 3 种一维分岔(鞍结分岔、跨临界分岔和叉形分岔)和 1 种二维分岔(霍普夫分岔)，将分别在 2.4 节和 2.5 节予以介绍。余维数$\leqslant 3$ 的分岔类型共有 17 种，将在第 6 章里以简表的形式予以介绍。高余维(余维数大于 3)系统的分岔问题是奇异性理论研究的主要内容，也是国内外的研究重点之一。

2.3.2 单参数平面自治系统的分岔类型

对于单参数 μ 的平面自治系统：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=P(x,y,\mu)\\ \dot{y}&=Q(x,y,\mu)\end{aligned}\right\} \tag{2.3.3}$$

其中$(x,y)\in B^2$,已经取得了比较完整的研究结果。设 μ_0 是一个分岔值,其分岔类型可分为以下 3 大类。

1.平衡点有关的分岔

设当 $\mu=\mu_0$ 时,系统有非双曲平衡点(x_0,y_0),令 A 为 $\mu=\mu_0$ 时系统在(x_0,y_0)处的线性化矩阵,则有:

①若 A 有零特征值,则有高阶平衡点分岔。如图 2-2(a)所示,当 $\mu=\mu_0$ 时系统有一个鞍结点(x_0,y_0),当 $\mu<\mu_0$ 时无平衡点,而当 $\mu>\mu_0$ 时有一个鞍点和一个结点,这种分岔称为鞍结分岔。

②若 A 有一对纯虚特征值,且当 $\mu=\mu_0$ 时(x_0,y_0)是系统的细焦点,则当 μ 变化时,就可能从平衡点产生极限环,称为霍普夫分岔。如图 2-2(b)所示,当 $\mu\leqslant\mu_0$ 时系统有稳定焦点(特别地,当 $\mu=\mu_0$ 时为稳定细焦点),在它附近无闭轨;当 $\mu>\mu_0$ 时此平衡点变为不稳定焦点,在它附近有一个极限环。当 $\mu\to\mu_0+0$ 时,此极限环趋于平衡点。

③若 A 有一对纯虚特征值,且当 $\mu=\mu_0$ 时(x_0,y_0)是系统的真中心,即在(x_0,y_0)附近全是闭轨,则当 μ 变化时,有可能从其中的某些闭轨分岔出极限环,而平衡点也不再是中心了。这种分岔称为庞加莱分岔。

2.闭轨分岔

设当 $\mu=\mu_0$ 时系统有非双曲闭轨 Γ。利用周期解稳定性定理可知,此时周期轨道 Γ 的特征指数$\oint\operatorname{div}(P,Q)\mathrm{d}t=0$,即 Γ 是多重环。当 μ 变化时,系统可能出现闭轨突然产生或消失的现象,称为多重环分岔。如图 2-2(c)所示,当 $\mu=\mu_0$ 时系统有一个二重半稳定极限环;当 $\mu<\mu_0$ 时无闭轨;而当 $\mu>\mu_0$ 时有两个极限环。当 $\mu\to\mu_0+0$ 时这两个极限环趋于一个环。这种分岔称为二重半稳环分岔。

3.同宿或异宿轨线分岔

设当 $\mu=\mu_0$ 时系统有同宿轨线,则当 μ 变化时,此同宿轨线可能突然消失,或从此同宿轨线中分岔出极限环,如图 2-2(d)所示。这种分岔称为同宿轨线分岔。

设当 $\mu=\mu_0$ 时系统有异宿轨线,则当 μ 变化时,此异宿轨线可能突然消失,或从几条异宿轨线相连而成的异宿环中分岔出极限环,如图 2-2(e)所示。这种分岔称为异宿轨线分岔。

上述分岔中,高阶平衡点分岔、霍普夫分岔、多重环分岔属于局部分岔,而同宿或异宿轨线分岔属于全局分岔。

需要指出,根据皮郝图定理,可以将上述结果推广到二维可定向的紧流形 M^2 上的向量场的分岔。

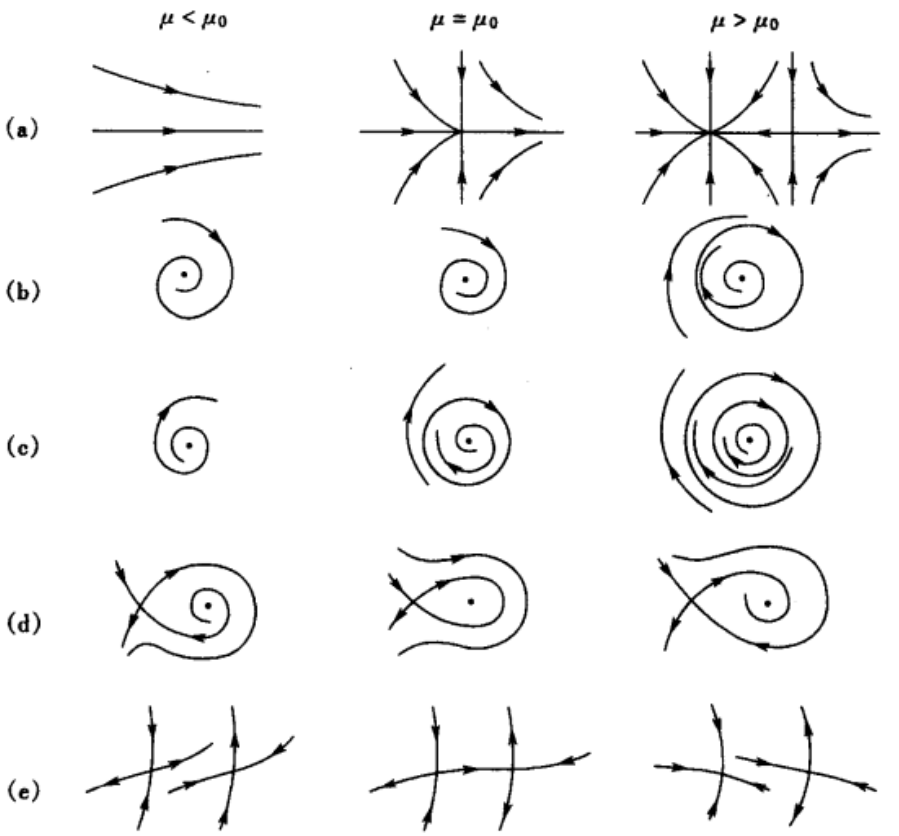


图 2-2 单参数平面自治系统的分岔类型

(a)鞍结分岔;(b)霍普夫分岔;(c)二重半稳环分岔;(d)同宿轨线分岔;(e)异宿轨线分岔

2.4 三种基本的一维分岔

下面介绍常见的 3 种一维分岔,它们都是静态分岔,也都是余维 1 分岔。这些研究结果在以后经常要用到。

考虑系统

$$f(x,\mu)=0 \tag{2.4.1}$$

其中 $f: U\times J\subseteq \mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$。设系统的奇异点为(0,0)。将上式按泰勒级数展开,并注意到 $f(0,0)=0$ 和 $D_xf(0,0)=0$,则有

$$f(x,\mu)=a\mu+\frac{1}{2}bx^2+cx\mu+\frac{1}{2}d\mu^2+\frac{1}{6}ex^3+\cdots=0 \tag{2.4.2}$$

其中 $a=D_\mu f(0,0)$, $b=D_{xx}f(0,0)$, $c=D_{x\mu}f(0,0)$, $d=D_{\mu\mu}f(0,0)$, $e=D_{xxx}f(0,0)$, $\cdots$;并定义 $\Delta=-\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}=b^2-ac$,则随着系数 a、b、c、$\cdots$、Δ 的不同,会发生不同的分岔。

2.4.1　鞍结分岔

若方程(2.4.2)满足非退化条件：

$$a \neq 0, b \neq 0 \tag{2.4.3}$$

则原点(0,0)为鞍结点，在该点的邻域内，方程(2.4.2)有解曲线

$$x = \pm\sqrt{\frac{-2a\mu}{b}} \tag{2.4.4}$$

则 $n(\mu)$在 $\mu=0$ 左右发生从 2 到 1 再到 0 的变化。

例 2.4.1　考虑系统

$$\dot{x} = f(x,\mu) = \mu - x^2 \tag{2.4.5}$$

的平衡解和稳定性。

解：系统的平衡方程为

$$f(x,\mu) = \mu - x^2 = 0$$

由此得解曲线

$$x = \begin{cases} \pm\sqrt{\mu}, \mu \geqslant 0 \\ \text{无解}, \mu < 0 \end{cases}$$

此外，在解曲线 $x = \pm\sqrt{\mu}$ 上，有

$$D_x f(x,\mu) = -2x = \mp 2\sqrt{\mu}(\mu \geqslant 0)$$

因此，解曲线 $x = \pm\sqrt{\mu}$ 的上半支稳定，下半支不稳定。分岔图如图 2-3 所示。

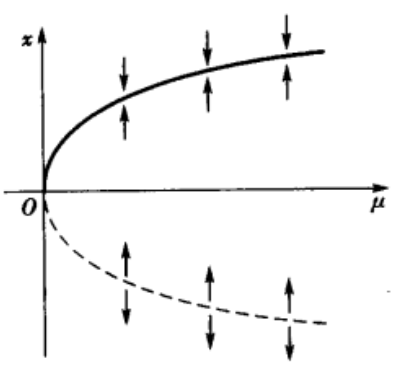


图 2-3　鞍结分岔

2.4.2　跨临界分岔

若方程(2.4.2)满足

$$\left.\begin{aligned} a = 0 \quad &(\text{限定条件}) \\ b \neq 0, \Delta > 0 \quad &(\text{非退化条件}) \end{aligned}\right\} \tag{2.4.6}$$

则原点 $O(0,0)$称为跨临界分岔点。在该点的邻域内，方程(2.4.6)有两条相交的解曲线

$$x = \frac{-c \pm \sqrt{\Delta}}{b}\mu + O(\mu^2) \tag{2.4.7}$$

则 $n(\mu)$在 $\mu=0$ 左右发生从 2 到 1 再到 2 的变化。

例 2.4.2　考虑系统

$$\dot{x} = f(x,\mu) = \mu x - x^2 \tag{2.4.8}$$

的平衡解和稳定性。

解：系统的平衡方程为

$$f(x,\mu)=\mu x-x^2=0$$

由此得解曲线：$x=0$ 和 $x=\mu$。

此外，在解曲线上，有

$$D_xf(x,\mu)=\mu-2x$$

对于解曲线 $x=0$，有 $D_xf(x,\mu)=\mu-2x=\mu$，故当 $\mu<0$ 时平衡点渐近稳定；$\mu>0$ 时不稳定。而对于解曲线 $x=\mu$，有 $D_xf(x,\mu)=\mu-2x=-\mu$，故当 $\mu>0$ 时平衡点渐近稳定；$\mu<0$ 时不稳定。分岔图如图 2-4 所示。

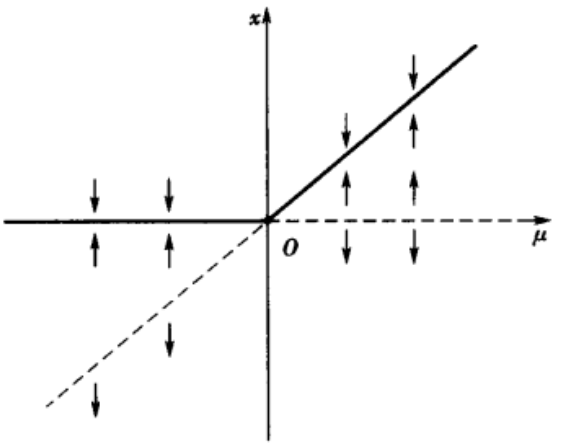


图 2-4 跨临界分岔

2.4.3 叉形分岔

若方程(2.4.2)满足

$$\left.\begin{aligned}&a=0,b=0 \quad \text{（限定条件）}\\&c\neq 0,e\neq 0 \quad \text{（非退化条件）}\end{aligned}\right\} \tag{2.4.9}$$

则原点 $O(0,0)$ 称为叉形分岔点。在该点的邻域内，方程(2.4.9)有两条相交的解曲线，即

$$x=\frac{-d}{2c}\mu+O(\mu^2)$$

和

$$\mu=-\frac{e}{6c}x^2+O(x^3)$$

则 $n(\mu)$ 在 $\mu=0$ 左右发生从 1 到 3 的变化。

例 2.4.3 考虑系统

$$\dot{x}=f(x,\mu)=\mu x-x^3 \tag{2.4.10}$$

的平衡解和稳定性。

解：系统的平衡方程为

$$f(x,\mu)=\mu x-x^3=0$$

由此得解曲线：$x=0$ 和 $x=\pm\sqrt{\mu}$，$\mu\geqslant 0$。

此外，在解曲线上，有

$$D_xf(x,\mu)=\mu-3x^2$$

对于解曲线 $x=0$，有 $D_xf(x,\mu)=\mu-3x^2=\mu$，故当 $\mu<0$ 时平衡点渐近稳定；$\mu>0$ 时不稳定。而对于解曲线 $x=\pm\sqrt{\mu}$，$\mu\geqslant 0$，有 $D_xf(x,\mu)=\mu-3x^2=-2\mu\leqslant 0$，故稳定。分岔图如图 2-5 所示。这种叉形分岔的特点是在 $\mu>0$ 时出现非平凡解（$x=x(\mu)\neq 0$），或者说非平凡解对应的参数大于临界值 $\mu=0$，故称为超临界叉形分岔。

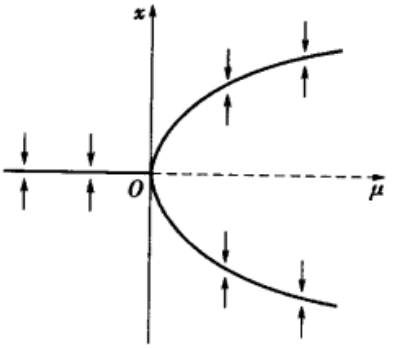


图 2-5　超临界叉形分岔

例 2.4.4　考虑系统

$$\dot{x}=f(x,\mu)=\mu x+x^3 \tag{2.4.11}$$

的平衡解和稳定性。

解：系统的平衡方程为

$$f(x,\mu)=\mu x+x^3=0$$

由此得解曲线：$x=0$ 和 $x=\pm\sqrt{-\mu}$，$\mu\leqslant 0$。

此外，在解曲线上，有

$$D_xf(x,\mu)=\mu+3x^2$$

对于解曲线 $x=0$，有 $D_xf(x,\mu)=\mu+3x^2=\mu$，故当 $\mu<0$ 时平衡点渐近稳定；$\mu>0$ 时不稳定。而对于解曲线 $x=\pm\sqrt{-\mu}$，$\mu\leqslant 0$，有 $D_xf(x,\mu)=\mu+3x^2=-2\mu\geqslant 0$，故不稳定。分岔图如图 2-6 所示。这种叉形分岔的特点是在 $\mu<0$ 时出现非平凡解（$x=x(\mu)\neq 0$），或者说非平凡解对应的参数小于临界值 $\mu=0$，故称为亚临界叉形分岔。

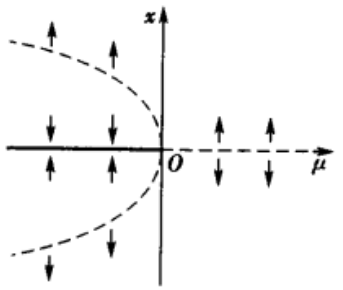


图 2-6　亚临界叉形分岔

2.5　霍普夫分岔

在 2.4 节研究了 3 种一维分岔，它们都是静态分岔，也都是余维 1 分岔。本节研究霍普夫分岔。霍普夫(Hopf)分岔是一种非常特殊的分岔，它是 4 种余维 1 分岔里仅有的一种二维分岔；而且霍普夫分岔不属于静态分岔，而是动态分岔的一种。

考虑单参数系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\mu)$$

其中 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，$\mu\in\mathbf{R}$。设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\mu)=0$，即对一切 μ，$(\boldsymbol{x}_0,\mu)$ 都是平衡点，且当 $\mu=\mu_0$ 时，$D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\mu_0)$ 有一对纯虚共轭特征值，而其他 $n-2$ 个特征值有非零实部，则 $(\boldsymbol{x}_0,\mu_0)$ 是一个

非双曲平衡点，故结构不稳定。由中心流形定理知，当 $\mu=\mu_0$ 时，系统在平衡点有二维中心流形，因此可以利用中心流形方法把 n 维系统的分岔问题化为二维系统的分岔问题去讨论。不失一般性，取$(\boldsymbol{x}_0,\mu_0)=(\boldsymbol{0},0)$。

设经由中心流形方法化简得到的二维系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\mu),\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2,\mu\in\mathbf{R} \tag{2.5.1}$$

将其泰勒展开得

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(\mu)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{f}_3(\boldsymbol{x})+\text{h.o.t}^{①},\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2,\mu\in\mathbf{R} \tag{2.5.2}$$

其中

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\mu)=\boldsymbol{A}(\mu)=\begin{bmatrix}d\mu & -(c\mu+\omega)\\ c\mu+\omega & d\mu\end{bmatrix},\boldsymbol{A}(0)=\begin{bmatrix}0 & -\omega\\ \omega & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}a_{20}x_1^2+a_{11}x_1x_2+a_{02}x_2^2\\ b_{20}x_1^2+b_{11}x_1x_2+b_{02}x_2^2\end{bmatrix},\boldsymbol{f}_3(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}a_{30}x_1^3+a_{21}x_1^2x_2+a_{12}x_1x_2^2+a_{03}x_2^3\\ b_{30}x_1^3+b_{21}x_1^2x_2+b_{12}x_1x_2^2+b_{03}x_2^3\end{bmatrix}$$

c,d 分别为雅可比矩阵 $D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\mu)$的特征值 $\lambda(\mu)=\alpha(\mu)\pm\mathrm{i}\beta(\mu)$的虚部和实部在$(\boldsymbol{0},0)$点的导数值，即 $c=\beta'(0),d=\alpha'(0)$。

定理 2.5.1 **霍普夫分岔定理** 设系统(2.5.1)满足：

①$f(\boldsymbol{0},\mu)$，且$(\boldsymbol{0},0)$为系统的非双曲平衡点；

②$\boldsymbol{A}(\mu)=D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0},\mu)$在 $\mu=0$ 附近有一对复特征值 $\alpha(\mu)\pm\mathrm{i}\beta(\mu)$。

当 $\mu=0$ 时，$\alpha(0)=0,\beta(0)=\beta_0>0$，且 $d=\alpha'(0)\neq0$，即当 $\mu=0$ 时，$\alpha(\mu)\pm\mathrm{i}\beta(\mu)$横穿虚轴，则存在 $\varepsilon_0>0$ 和一个解析函数

$$\mu(\varepsilon)=\sum_{i=2}^{\infty}\mu_i\varepsilon^i \tag{2.5.3}$$

当 $\mu=\mu(\varepsilon)\neq0$(其中 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$)时，系统在原点的充分小邻域内有唯一的闭轨(即周期解) Γ_ε，该周期解的解析表达式为

$$x(s,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i(\varepsilon)\varepsilon^i \tag{2.5.4}$$

其中 $s=\dfrac{2\pi}{T}t$。解的周期为

$$T(\varepsilon)=\frac{2\pi}{\beta_0}(1+\sum_{i=2}^{\infty}\tau_i\varepsilon^i) \tag{2.5.5}$$

当 $\varepsilon\to0$ 时，$\mu(\varepsilon)\to0,\Gamma_\varepsilon$ 趋于原点。记 μ_{j_1} 为展开式(2.5.3)中第一个不为 0 的系数，则当 μ_{j_1} 与 d 同号时，Γ_ε 是稳定极限环；当 μ_{j_1} 与 d 异号时，Γ_ε 是不稳定极限环。

下面讨论在霍普夫分岔定理的条件下系统(2.5.1)的分岔情况。由条件②知，当 $\mu=0$

① h.o.t = high order term(高阶项)。

时，有 $\alpha(0)=0$ 且 $d=\alpha'(0)\neq 0$，故对充分小的 $\mu\neq 0$（即 μ 在 $\mu=0$ 的充分小的邻域内），有 $\alpha(\mu)\neq 0$，且 $\alpha(\mu)$ 在 $\mu=0$ 的两侧异号。因此，当 $\mu\neq 0$ 时，原点是粗焦点（即稳定焦点或不稳定焦点）；当 $\mu=0$ 时，原点是细焦点（即中心）。当 μ 经过 0 时，系统的稳定性发生改变，产生分岔。

还可以讨论极限环的产生条件：当 $\mu_{j_1}>0$ 时，由式(2.5.3)知，有 $\mu(\varepsilon)>0$。故当 $\mu<0$ 时不可能有 $\mu=\mu(\varepsilon)$，因此不会产生极限环。只有当 $\mu>0$ 时才可能有 $\mu=\mu(\varepsilon)$，从而产生唯一的极限环。$\mu_{j_1}<0$ 时情况正好相反：$\mu>0$ 时无极限环，$\mu<0$ 时有唯一的极限环。

上述这种当分岔参数变化时系统从平衡点产生极限环的分岔现象称为霍普夫分岔。特别地，满足 $d\neq 0$ 和 $a_1\neq 0$ 的霍普夫分岔称为通有的。当 a_1 与 d 异号时，称为超临界霍普夫分岔；当 a_1 与 d 同号时，称为亚临界霍普夫分岔；若 $d=0$ 或 $a_1=0$，分别称为第一、二类退化情况。

下面研究通有的霍普夫分岔。由霍普夫分岔定理可知，极限环 Γ_ε 的稳定性取决于系数 μ_{j_1}。对于式(2.5.3)和式(2.5.5)，可以证明，当 $j=2$ 时，有第一项系数 $\mu_2=-\dfrac{a_1}{d}$、$\tau_2=-\dfrac{b_1+\mu_2 c}{\beta_0}$。此时 $d\neq 0$ 且 $a_1\neq 0$，故有 $\mu_2\neq 0$，则由 μ_{j_1} 的定义知，这时 μ_{j_1} 就是 μ_2。此时 Hopf 分岔定理中关于极限环的稳定性判据可以表达如下。

推论 2.5.1　若系统满足定理 2.5.1 的条件，且有 $a_1\neq 0$，则周期解(2.5.4)的稳定性由其范式系数 a_1 决定：如果 $a_1<0$，周期解是稳定的；如果 $a_1>0$，周期解是发散的。

若将推论 2.5.1 与上述极限环产生条件结合起来，可以得到下面的结论。

推论 2.5.2　若系统满足定理 2.5.1 的条件，且有 $a_1\neq 0$，则当 $a_1 d\mu<0$ 时系统产生极限环，且其稳定性与此时的平衡点$(0,\mu)$的稳定性相反。

例 2.5.1　考虑 van der Pol 系统

$$\ddot{x}-(\mu-x^2)\dot{x}+\omega_0^2 x=0$$

的分岔情况，式中 $x\in\mathbf{R}$，$\mu\in\mathbf{R}$。

解：令 $\dot{x}=y$，则原系统变为

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-\omega_0^2 x+(\mu-x^2)y\end{cases}$$

再令 $z=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$，则有

$$\dot{z}=\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\ -\omega_0^2 x+(\mu-x^2)y\end{pmatrix}=f(z,\mu)$$

容易验证

$$f(0,\mu)=0,\ \forall\,\mu\in\mathbf{R}。$$

且此时

$$\boldsymbol{A}(\mu)=\boldsymbol{D}\boldsymbol{f}(0,\mu)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & \mu\end{bmatrix}$$

当且仅当$|\mu|<2\omega_0$时，$\boldsymbol{A}(\mu)$有一对共轭特征值

$$\lambda_{1,2}(\mu)=\frac{\mu\pm \mathrm{i}\sqrt{4\omega_0^2-\mu^2}}{2}=\alpha(\mu)+\mathrm{i}\beta(\mu)$$

故有

$$\alpha(0)=0,\beta(0)=\omega_0>0,d=\alpha'(0)=\frac{1}{2}>0$$

且由式(2.5.5)可计算出

$$a_1=-\frac{1}{8}$$

可见 a_1 与 d 异号，故有超临界霍普夫分岔发生。由霍普夫分岔定理及推论知：

①当 $\mu<0$ 时，平衡点$(0,\mu)$是渐近稳定的焦点；

②当 $\mu=0$ 时，平衡点$(0,\mu)=(0,0)$成为中心；

③当 $\mu>0$ 时，平衡点$(0,\mu)$成为不稳定的焦点，在其附近出现一渐近稳定的极限环。

系统的分岔图见图 2-7。

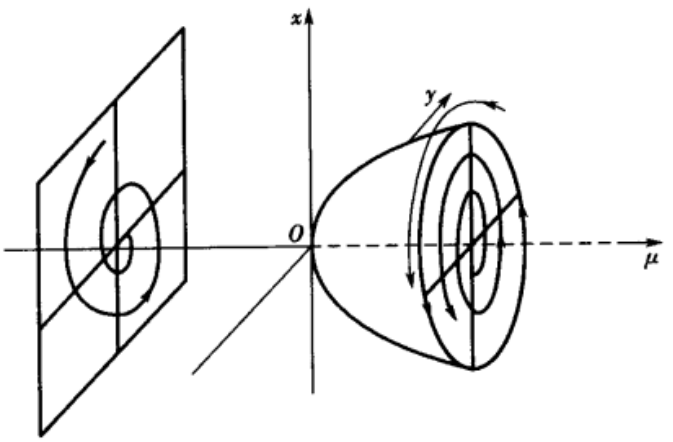


图 2-7 van der Pol 系统的分岔

第 3 章　李雅普诺夫-施密特理论

对于低维的动力系统，可以直接研究其动力学行为，例如在第 2 章里直接研究了 4 种余维 1 分岔。但对于高维动力系统来说，其分岔行为可能是很复杂的。对于这种系统，一般采取降维措施将其化为低维方程再进行研究。常用的降维方法有李雅普诺夫-施密特方法（Liapunov-Schmidt 方法，简称 L-S 方法）和中心流形方法。本章介绍李雅普诺夫-施密特方法。

3.1　隐函数定理

在介绍李雅普诺夫-施密特方法之前，先介绍在动力系统理论中占有重要地位的隐函数定理。

定理 3.1.1　**局部隐函数定理**　考虑方程：$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{x}\in X$，$\boldsymbol{\mu}\in Y$，$X$、$Y$、$Z$ 是 Banach 空间，$U\subset X\times Y$ 是开集，$\boldsymbol{f}:U\to Z$ 连续可微。若 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)=\boldsymbol{0}$，则称$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)$为系统的平凡解。若系统在$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)$处的雅可比矩阵 $\boldsymbol{A}=D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)$为同胚的，则在$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)$的邻域内可由方程中解出唯一解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\mu})$，使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu})=\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\mu}_0)=\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\mu})$连续可微，$D_{\boldsymbol{\mu}}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\mu})=-[D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu})]^{-1}D_{\boldsymbol{\mu}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu})$。

证明：先证明解的唯一性，再证明其连续性。

不失一般性，设原点为平衡点，即$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$。定义 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$。由于 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})=0$，故有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$$

再定义 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$，并将上式两边同乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$$

要证明 $\boldsymbol{x}$ 唯一，需先证明 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$是压缩的。

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{\mu})\\
&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{\mu})\\
&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)-\int_0^1 D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(t\boldsymbol{x}_1+(1-t)\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)\mathrm{d}t\\
&=(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)\int_0^1[D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})-D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(t\boldsymbol{x}_1+(1-t)\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{\mu})]\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{A}=D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)$在平衡点$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$为同胚的，故连续。所以存在与 ε 有关的δ 和σ_1，使得 $\|\boldsymbol{x}\|<\delta$、$\|\boldsymbol{\mu}\|<\sigma_1$ 时，有

$$\| D_x f(\mathbf{0},\mathbf{0}) - D_x f(tx_1 + (1-t)x_2, \mu) \| < \varepsilon$$

则

$$\| \boldsymbol{R}(x_1,\mu) - \boldsymbol{R}(x_2,\mu) \| = \| x_1 - x_2 \| \int_0^1 \varepsilon \mathrm{d}t = \varepsilon \| x_1 - x_2 \|$$

取 $A^{-1} \leqslant \frac{1}{2\varepsilon}$，由于 $g(x,\mu) = A^{-1}\boldsymbol{R}(x,\mu)$，故

$$\| g(x_1,\mu) - g(x_2,\mu) \| = A^{-1} \| \boldsymbol{R}(x_1,\mu) - \boldsymbol{R}(x_2,\mu) \| = A^{-1}\varepsilon \| x_1 - x_2 \| \leqslant \frac{1}{2} \| x_1 - x_2 \|$$

因而 $g(x,\mu)$是压缩的。

由不动点定理知，如果存在一个压缩映射 g 将某集合映射到该集合本身，即 $g: B_\delta \to B_\delta$，则存在唯一的不动点。其中 $B_\delta = \{x \mid \| x \| < \delta\} \subseteq X$。

现在需要证明 $g: B_\delta \to B_\delta$，只需证明 $g(x,\mu) = x$ 满足 $\| x \| < \delta$ 即可。

$g(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \mathbf{0}$，且 $g(x,\mu) = x$ 连续，故存在 σ_2，使得 $\| \mu \| < \sigma_2$ 时，有 $\| g(\mathbf{0},\mu) \| < \frac{\delta}{2}$。

又因为

$$x = g(x,\mu) = g(x,\mu) - g(\mathbf{0},\mu) + g(0,\mu)$$

故有

$$\| x \| = \| g(x,\mu) \| \leqslant \| g(x,\mu) - g(0,\mu) \| + \| g(0,\mu) \| \leqslant \frac{1}{2} \| x \| + \frac{\delta}{2}$$

所以 $\| x \| < \delta$。可见 $g(x,\mu)$满足 $g: B_\delta \to B_\delta$，故存在唯一的不动点 $x = \varphi(\mu)$，使 $f(\varphi(\mu),\mu) = \mathbf{0}$ 且 $\varphi(\mu_0) = x_0$。

下面证明 $\varphi(\mu)$为连续函数。

因为 $g(x,\mu) = x$，故 $\varphi(\mu) = x = g(x,\mu)$，则

$$\begin{aligned}\varphi(\mu_1) - \varphi(\mu_2) &= g(\varphi(\mu_1),\mu_1) - g(\varphi(\mu_2),\mu_2) \\ &= g(\varphi(\mu_1),\mu_1) - g(\varphi(\mu_2),\mu_1) + g(\varphi(\mu_2),\mu_1) - g(\varphi(\mu_2),\mu_2)\end{aligned}$$

对上式两边取范数，得

$$\| \varphi(\mu_1) - \varphi(\mu_2) \| \leqslant \frac{1}{2} \| \varphi(\mu_1) - \varphi(\mu_2) \| + \| g(\varphi(\mu_2),\mu_1) - g(\varphi(\mu_2),\mu_2) \|$$

则

$$\| \varphi(\mu_1) - \varphi(\mu_2) \| \leqslant 2 \| g(\varphi(\mu_2),\mu_1) - g(\varphi(\mu_2),\mu_2) \|$$

因为 $g(x,\mu) = x$ 连续，故当 $\mu_1 \to \mu_2$ 时，有 $\| g(\varphi(\mu_2),\mu_1) - g(\varphi(\mu_2),\mu_2) \| \to 0$，所以 $\| \varphi(\mu_1) - \varphi(\mu_2) \| \to 0$，故 $\varphi(\mu)$为连续函数。

因为 $f: U \to Z$ 连续可微，将 $f(\varphi(\mu),\mu) = 0$ 对 μ 求导，得

$$D_x f(\varphi(\mu),\mu) D_\mu \varphi(\mu) + D_\mu f(\varphi(\mu),\mu) = \mathbf{0}$$

整理得

$$D_{\mu}\varphi(\mu) = -[D_x f(\varphi(\mu),\mu)]^{-1} D_{\mu} f(\varphi(\mu),\mu)$$

证毕。

局部隐函数定理要求系统的雅可比矩阵 $A = D_x f(x_0,\mu_0)$为同胚的。若 $A = D_x f(x_0,\mu_0)$存在但不可逆，即 A^{-1}不存在，此时局部隐函数定理不再适用，应使用广义隐函数定理。

由于 A 不可逆，故 $\|A\| = 0$，即此时 A 至少有一个特征值为0。定义 A 的零空间$\eta(A) = \{x \in X \mid Ax = 0\}$和 A 的值空间 $R(A) = \{z \in Z \mid Ax = z, x \in X\}$。设 $\eta(A) = X_1 \subset X$，X_1 在 X 中的补空间为 X_2，即 $X = X_1 \oplus X_2$。此时 $x \in X$ 可写成$x = x_1 + x_2$，其中 $x_1 \in X_1$，$x_2 \in X_2$。此时有广义隐函数定理。

定理 3.1.2　**广义隐函数定理**　考虑方程：$f(x,\mu) = 0$，$x \in X$，$\mu \in Y$，X、Y、Z 是巴拿赫空间，$U \subset X \times Y$ 是开集，$f: U \to Z$ 连续可微。$f(0,0) = 0$，且系统在$(0,0)$处的雅可比矩阵 $A = D_x f(0,0)$存在但不可逆。若存在 $a > 0$、$b > 0$，a、b 均为小量，使得 $x_1 \in X$ 时，有 $\|x\| < a$，$\mu \in Y$ 时，有 $\|\mu\| < b$(注意这里的 $\|x\|$ 是按 X_1 空间的范数，$\|\mu\|$ 是按 Y 空间的范数)，则存在 $\varphi \in C^1: B_a(0) \times B_b(0) \to X_2$，其中 $B_a(0) \subset X_1$，$B_b(0) \subset Y$($B_a(0)$和 $B_b(0)$的定义请参看定理 3.1.1 证明中 B_δ 的定义)，$x_2 = \varphi(x_1,\mu)$，使得 $f(x_1 + \varphi(x_1,\mu),\mu) = 0$，$\varphi(0,0) = 0$。

证明　定义新的参数空间 $\tilde{Y} = X_1 \times Y$，并定义 $\tilde{y} = (x_1,\mu)$，映射 $G(x_2,\tilde{y}) = f(x_1 + x_2,\mu) = 0$，$G: \tilde{U} \subset X_2 \times \tilde{Y} \to Z$，则 $D_{x_2} G(0,0): X_2 \to Z$ 是同胚的，因此可以用局部隐函数定理求出 $x_2 = \varphi(x_1,\mu)$。证毕。

值得注意的是，隐函数定理只保证了解的存在和唯一。在许多实际问题中，系统的解不一定有解析表达式。因此对具体问题要具体分析。

根据隐函数定理可推出静态分岔的必要条件。

定理 3.1.3　考察系统(2.3.1)，设点(x_0,μ_0)使得 $f(x_0,\mu_0) = 0$，在点(x_0,μ_0)附近，f 对x 可微，且 $f(x,\mu)$和 $D_x f(x,\mu)$对 x、μ 均连续。若(x_0,μ_0)是 f 的静态分岔点，则 $D_x f(x_0,\mu_0)$是奇异的。

定义 3.1.1　若在点$(x_0,\mu_0) \in U \times J$ 处有$f(x_0,\mu_0)$，且 $D_x f(x_0,\mu_0)$是奇异的，则称(x_0,μ_0)为向量场 $f(x,\mu)$的一个奇异点。

3.2　李雅普诺夫-施密特方法

李雅普诺夫-施密特方法是将高维或无限维非线性方程化为低维方程的降维方法。它的基本思想如下：一个非线性系统，即使其雅可比矩阵 $A = D_x f(x_0,\mu_0)$是奇异的，但一般来说其零实部特征根的数量是较少的。若能够通过空间分解的方法，将非线性方程组分别投影到两个子空间上，得到两个方程组，其中一个方程组的雅可比矩阵是非奇异的，则由隐函

数定理,可以从该方程中解出唯一解,将该解代入另一个方程中,则可得到一个低维方程,从而实现系统的降维。

下面介绍李雅普诺夫-施密特方法的具体过程。仍考察系统

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})=\boldsymbol{0} \tag{3.2.1}$$

不失一般性,设奇点为$(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$(否则,若平衡点为$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)$,则可作线性变换:$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$,$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_0$,则系统变为:$\dot{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{v})$,从而$(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$成为新系统的平衡点)。

设$(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})\in\mathbf{R}^n\times J$是$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$的一个奇异点。记线性算子$\boldsymbol{L}=D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(0,0)$,$N(\boldsymbol{L})$为$\boldsymbol{L}$的零空间,$R(\boldsymbol{L})$为$\boldsymbol{L}$的值域,正交补空间$M_1=N(\boldsymbol{L})^{\perp}$,$M_2=R(\boldsymbol{L})^{\perp}$。设$\dim N(\boldsymbol{L})=k\geqslant 1$,即$\boldsymbol{L}$有$k$个零根(一般$k$为1或2),则$\dim M_2=k$,$\dim R(\boldsymbol{L})=\dim M_1=n-k$。于是$\mathbf{R}^n$可作如下分解:

$$\mathbf{R}^n=N(\boldsymbol{L})\oplus M_1 \tag{3.2.2}$$

和

$$\mathbf{R}^n=M_2\oplus R(\boldsymbol{L}) \tag{3.2.3}$$

令$\boldsymbol{P}:\mathbf{R}^n\to R(\boldsymbol{L})$为正交投影算子,则$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}:\mathbf{R}^n\to M_2$亦为正交投影算子。系统等价于:

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})=\boldsymbol{0} \tag{3.2.4}$$

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})=\boldsymbol{0} \tag{3.2.5}$$

由式(3.2.2)可知,对任意$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$有

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \tag{3.2.6}$$

其中$\boldsymbol{u}\in N(\boldsymbol{L})$,$\boldsymbol{v}\in M_1$,则式(3.2.4)可写为

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu})=\boldsymbol{P}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu})=\boldsymbol{0} \tag{3.2.7}$$

其中$\boldsymbol{\Phi}:N(\boldsymbol{L})\times M_1\times J\to R(\boldsymbol{L})$。显然有

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$$

由于$\boldsymbol{P}$是从$\mathbf{R}^n$到$R(\boldsymbol{L})$的投影算子,则有$\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}$,故

$$D_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\Phi}(0,0,0)=\boldsymbol{P}D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(0,0)=\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}$$

若限制$\boldsymbol{L}$作用在M_1上,则线性算子$\boldsymbol{L}:M_1\to R(\boldsymbol{L})$是1-1映射且是映上的,从而是可逆的。由隐函数定理知,在$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu})=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$的每个邻域内,式(3.2.7)有唯一解$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\mu})$,即$\boldsymbol{P}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu})=0$,且满足$\boldsymbol{\psi}(0,0)=0$,其中映射$\boldsymbol{\psi}:N(\boldsymbol{L})\times J\to M_1$。

将$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\mu})$代入式(3.2.5),得

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\mu})=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu})=\boldsymbol{0} \tag{3.2.8}$$

其中映射$\boldsymbol{F}:N(\boldsymbol{L})\times J\to M_2$。因为在奇异点$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$的某个邻域内,函数$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$的零点与函数$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\mu})$的零点一一对应:

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\mu}) \tag{3.2.9}$$

故原系统方程(3.2.1)的求解等价于$N(\boldsymbol{L})$中的方程(3.2.8)的求解。式(3.2.8)称为约化方程或分岔方程,它包含了研究方程(3.2.1)的解在奇异点附近的性态所需的全部信息,从而

简化了静态分岔分析。

在实际应用中，往往在 $N(\boldsymbol{L})$和 M_2 中引进坐标。令$\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_k\}$和$\{\boldsymbol{e}_1^*,\cdots,\boldsymbol{e}_k^*\}$分别为 $N(\boldsymbol{L})$和 M_2 的标准正交基。任何 $\boldsymbol{u}\in N(\boldsymbol{L})$均可写成

$$\boldsymbol{u}=\sum_{j=1}^{k}y_j\boldsymbol{e}_j \tag{3.2.10}$$

记 $\boldsymbol{y}=[y_1\quad\cdots\quad y_k]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^k$。将式(3.2.10)代入式(3.2.8)得

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\mu})=\boldsymbol{Qf}\Big(\sum_{j=1}^{k}y_j\boldsymbol{e}_j+\boldsymbol{\psi}\Big(\sum_{j=1}^{k}y_j\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{\mu}\Big),\boldsymbol{\mu}\Big)=\boldsymbol{0} \tag{3.2.11}$$

因为 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}$，且对任意 $\boldsymbol{z}\in\mathbf{R}^n$，有 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{z})\in R(\boldsymbol{L})=M_2^{\perp}$，故

$$\langle\boldsymbol{e}_i^*,\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{z})\rangle=\langle\boldsymbol{e}_i^*,(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})(\boldsymbol{z})\rangle=\langle\boldsymbol{e}_i^*,\boldsymbol{z}\rangle\quad(i=1,\cdots,k)$$

利用上式，可将式(3.2.11)改写为下面的关于 $y_1,\cdots,y_m$ 的方程组：

$$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\mu})=\langle\boldsymbol{e}_i^*,\boldsymbol{f}\Big(\sum_{j=1}^{k}y_j\boldsymbol{e}_j+\boldsymbol{\psi}\Big(\sum_{j=1}^{k}y_j\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{\mu}\Big),\boldsymbol{\mu}\Big)\rangle=\boldsymbol{0}\quad(i=1,\cdots,k) \tag{3.2.12}$$

式(3.2.12)与式(3.2.8)也是等价的，故也被称为约化方程或分岔方程。一般来说，式(3.2.8)便于理论分析，而式(3.2.12)便于应用。

在上文对 L-S 方法的叙述中，读者可能已经注意到：对式(3.2.7)，隐函数定理只保证了解的存在和唯一，不一定能求得解析解。此时，一般设方程(3.2.7)的解可以写成 ε 的级数形式(ε 为小量标志)，将假设的级数解代入式(3.2.7)中，利用 ε 的同次幂的系数相等的条件，逐步求出假设的级数解的各阶系数，从而得到近似解。此外，分岔方程(3.2.12)虽然已经过降维，但由于其在平衡点的雅可比矩阵仍为奇异阵，隐函数定理不适用，故其求解仍然有一定困难。

3.3　计算实例

下面举例说明 L-S 方法的应用。

例 3.3.1　考虑由 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\mu)=[\mu x_1+x_1x_2-x_1^3\quad x_1^2+x_2-x_2^2]^{\mathrm{T}}$ 给出的二维方程

$$F(\boldsymbol{x},\mu)=0 \tag{3.3.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^2$，参数 $\mu\in\mathbf{R}$。

解：由系统方程知系统的平衡点为(0,0)，此时系统在平衡点处的导算子矩阵

$$\boldsymbol{L}=D_xF(0,0)=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

有特征值 $\lambda_1=0$ 和 $\lambda_2=1$，分别对应特征向量 $\boldsymbol{\varphi}_1=[1\quad 0]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\varphi}_2=[0\quad 1]^{\mathrm{T}}$。$L$ 的零空间 $N(\boldsymbol{L})$和值域 $R(\boldsymbol{L})$分别为

$$N(\boldsymbol{L})=\{(x_1,x_2)\mid x_2=0\},R(\boldsymbol{L})=\{(x_1,x_2)\mid x_1=0\}$$

由于此时 $N(L)$与 $R(L)$正好是正交的,则由式(3.2.2)和式(3.2.3)知,有

$$N(L)=R(L)^{\perp}=M_2, R(L)=N(L)^{\perp}=M_1$$

此时 x 可分解为

$$x=x_1\varphi_1+x_2\varphi_2 \tag{3.3.2}$$

现在定义投影算子 $P:\mathbf{R}^n\to R(L)$。其实此时算子 P 正好就是算子 L,因为 L 将 $F(x,\mu)=0$ 映射为

$$LF(x,\mu)=\begin{pmatrix}0\\ x_1^2+x_2-x_2^2\end{pmatrix}\in R(L)$$

故式(3.2.4)变为

$$PF(x,\mu)=LF(x,\mu)=\begin{pmatrix}0\\ x_1^2+x_2-x_2^2\end{pmatrix}=0 \tag{3.3.3}$$

同时,由 Q 的定义知

$$Q=I-P=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

则式(3.2.5)变为

$$QF(x,\mu)=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\mu x_1+x_1x_2-x_1^3\\ x_1^2+x_2-x_2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu x_1+x_1x_2-x_1^3\\0\end{pmatrix}=0 \tag{3.3.4}$$

式(3.3.3)和式(3.3.4)最右端的 0 实际上是二维零向量。由式(3.3.3)解得

$$x_2=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1+4x_1^2})\approx\frac{1}{2}[1\pm(1+2x_1^2)]=\begin{cases}1+x_1^2\\-x_1^2\end{cases}$$

注意到此时平衡点为原点,故隐函数定理所保证的"存在且唯一"的根是在原点的邻域内。上式虽有两个根,但只有 $x_2=-x_1^2$ 在原点的邻域内,故 $x_2=1+x_1^2$ 应舍弃。将 $x_2=-x_1^2$代入式(3.3.4)得

$$\mu x_1-2x_1^3=0 \tag{3.3.5}$$

式(3.3.5)就是约化方程(或称分岔方程)。由例 2.4.3 的作法类似可知,系统平衡点具有超临界叉形分岔。

第 4 章　中心流形理论

对于低维的动力系统，可以直接研究其动力学行为，但对于高维动力系统来说，其分岔行为可能是很复杂的。对于这种系统，为了更好地抓住所要研究问题的本质，一般采取降维措施将其化为低维方程再进行研究。常用的降维方法有李雅普诺夫-史密特（Liapunov-Schmidt，简称 L-S 方法）方法和中心流形定理（center manifold theorem）。L-S 方法可用来研究自治和非自治系统，传统的中心流形定理适用于研究自治系统，通过增加一维状态变量可拓展中心流形定理的适用范围，使其可以研究非自治系统。中心流形定理的方法与 L-S 方法略有不同，L-S 方法是对值空间进行分割，最后研究向量场在值域的补空间上的投影方程；而中心流形方法是利用流形与对应子空间相切的特性，求出系统在中心流形上的约化方程。从计算过程上看，中心流形的计算过程要比用 L-S 方法简单明了。本章首先介绍动力系统的基本概念和分岔的基本定理，随后介绍中心流形定理，并用计算机符号语言 Mathematica 编制了通用程序，通过几个算例介绍该程序的使用方法。

4.1　基本概念

在介绍中心流形以前，先定义几个基本概念。需要指出的是，有些概念在前几章中已提到过，而本节所给出的定义则是前文中定义的深化和扩展。

定义 4.1.1　设 M、N 为 Banach 空间，若 $f: U\to V$ 为 C^0 映射（即双边单值的连续映射），其中 U、V 为开集，$U\subset M$、$V\subset N$；其逆映射 f^{-1} 存在且连续，则称 f 是 U 到 V 上的一个同胚。特别地，若 f、f^{-1} 均为 C^k 映射（即经过 k 次微分后仍连续的映射），则称 f 是 U 到 V 上的一个 C^k 同胚，也称 k 阶微分同胚。

定义 4.1.2　设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 为开集，$\varphi:\mathbf{R}\times E\to E$ 为映射，$\varphi=\varphi_t(x)$，其中 $t\in\mathbf{R}$、$x\in E$。若 φ 满足：

$$\begin{aligned}&①\varphi_0=I,\\&②\varphi_s\varphi_t=\varphi_{s+t},\ \forall\, s、t\in\mathbf{R},\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

则称 φ 或 $\{\varphi_t\mid t\in\mathbf{R}\}$ 为 E 上的**动力系统或流**。对流 φ_t 来说，$f(x)=\left.\dfrac{\mathrm{d}\varphi_t(x)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\varphi_{\Delta t}(x)-\varphi_0(x)}{\Delta t}$，称为流 φ_t 所对应的向量场。

以上两条性质是群的性质，故流 $\{\varphi_t\mid t\in\mathbf{R}\}$ 为 E 上的单参数变换群，t 为参数。

根据 φ 的性质不同，可对动力系统进行如下分类。

①若 $\varphi:\mathbf{R}\times E\to E$ 为 C^0 映射,则称为连续动力系统。

②若 $\varphi:\mathbf{R}\times E\to E$ 为 C^k 映射($k\geqslant 1$),则称为 k 阶微分动力系统。

③若 $\varphi=\varphi_k(x)$,其中 $k\in\mathbf{Z}$($\mathbf{Z}$ 为整数集),则称为离散动力系统。

④若 t、$s\geqslant 0$,则称为半动力系统。

⑤对于任意给定的 t,φ_t 都有其逆映射 φ_t^{-1},且 φ_t^{-1} 也是 C^0 的(或 C^k 的),故 φ_t 是一个同胚(或微分同胚)。

定义 4.1.3 对于固定的 $x\in E\subset\mathbf{R}^n$,集$\{\varphi_t(x)\mid t\in\mathbf{R}\}$称为流 φ_t' 过点 x 的轨线或轨道。特别地,集$\{\varphi_t(x)\mid t\geqslant 0,t\in\mathbf{R}\}$称为流 φ_t 过点 x 的正半轨线,$\{\varphi_t(x)\mid t\leqslant 0,t\in\mathbf{R}\}$称为流 φ_t 过点 x 的负半轨线。

定义 4.1.4 若点 $p\in E$ 对任意$t\in\mathbf{R}$满足 $\varphi_t(p)=p$,则称 p 为流φ_t 的平衡点。对于流 φ_t 所对应的向量场$f(x)$,显然有 $f(p)=0$,故 p 称为向量场$f(x)$的零点。若点 $q\in E$ 对某个 $T>0$ 满足 $\varphi_T(q)=q$,则称 q 为流 φ_t 的周期点。显然,平衡点是周期点的特例。T 值中的最小值称为最小正周期,简称为周期,流 φ_t 过周期点 q 的轨线称为流 φ_t 的闭轨或周期轨线。

定义 4.1.5 对流 φ_t 来说,若点集 F 满足$\varphi_t(x)\in F$,$\forall x\in F$,$t\in\mathbf{R}$,则称 F 为流φ_t 的不变集。若其中 $t>0$(或 $t<0$),则称 F 为流 φ_t 的正不变集(或负不变集)。

关于不变集有如下定理。

定理 4.1.1

①任一整轨线均为一不变集,正(或负)半轨线是正(或负)不变集。

②任一不变集都是由一些整轨线组成,正(或负)不变集都是由一些正(或负)半轨线组成。

定义 4.1.6 设对点 $p\in E$ 的任何邻域 U 和任意大的 $T>0$,存在 $t>T$ 使得 $U\cap\varphi_t(U)\neq\phi$,其中 $\varphi_t(U)=\{x\mid x=\varphi_t(y),y\in U\}$,则称 p 为流 φ_t 的一个非游荡点。φ_t 的全体非游荡点的集合称为非游荡集,记作 $\Omega(\varphi)$。若 $q\in E\setminus\Omega(\varphi)$,则称 q 为流 φ_t 的一个游荡点。

定义 4.1.7 在过点 x 的轨线 r 上,若存在点列$\{\varphi_{t_n}(x)\}$,使得当 $n\to\infty$ 时,$t_n\to+\infty$(或 $-\infty$),且 $\varphi_{t_n}(x)\to p$,则称 p 为过点 x 的轨线 r 的一个 ω 极限点(或 α 极限点)。过点 x 的轨线 r 的全体 ω 极限点(或 α 极限点)的集合称为 ω 极限集(或 α 极限集),记为 $\omega(x)$(或 $\alpha(x)$)。

有了 ω 极限集和 α 极限集的定义后,很容易得到以下结论。

①若轨线 $r=\varphi_t(x_0)$是平衡点,即 $\varphi_t(x_0)=x_0$,则 x_0 是过点 x_0 的轨线 r 的 ω 极限点,也是 α 极限点。

②闭轨线 $\varphi_t(x_0)$上的任一点均为该轨线的 ω 极限点和 α 极限点,故闭轨线是它自身的 ω 极限集和 α 极限集。

③若 x_0 是一个渐近稳定平衡点，则它是一切当 $t\to\infty$ 时趋于它的轨线的 ω 极限点。

④稳定的极限环是一切当 $t\to\infty$ 时，渐近地趋于它的轨线的 ω 极限集；不稳定的极限环是一切当 $t\to-\infty$ 时，渐近地趋于它的轨线的 α 极限集。

下面给出同宿轨道和异宿轨道的定义。

定义 4.1.8　若 t 沿着正和负的方向趋于无穷大时，轨道上的动点趋于同一点 p，则称该轨道为同宿轨道，点 p 称为同宿点。若 t 沿着正和负的方向趋于无穷大时，轨道上的动点趋于不同点，则称该轨道为异宿轨道。

对于给定轨线的极限集有以下性质。

①ω 极限集(或 α 极限集)是闭的不变集，因而是由整轨线组成的。

②ω 极限集(或 α 极限集)是空集的充要条件是：当 $t\to+\infty$(或 $t\to-\infty$)时，有轨线 $\varphi_t(x_0)\to\infty$。

③ω 极限集(或 α 极限集)只有唯一一点 $\bar{x}$ 的充要条件是：$\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi_t(x_0)=\bar{x}$(或 $\lim\limits_{t\to-\infty}\varphi_t(x_0)=\bar{x}$)。

④有界区域内的正(或负)半轨线的 ω 极限集(或 α 极限集)是连通的。

⑤若 F 是闭的不变集，$x_0\in F$，则 $\omega(x_0)$和 $a(x_0)$都属于 F。

⑥若 x 和 y 在同一轨线上，则 $\omega(x)=\omega(y)$。

⑦若 $x\in\omega(y)$，则 $\omega(x)\subseteq\omega(y)$。

定义 4.1.9　设 F 是一不变集，若对于 F 的每个 ε 邻域 $U_\varepsilon=\{x\mid d(x,F)<\varepsilon\}$，存在着一个 δ 邻域 $U_\delta=\{x\mid d(x,F)<\delta\}$，使得对任何 $p\in U_\delta$，有 $\varphi_t(p)\in U_\varepsilon(t\geqslant 0)$，则称 F 是稳定的。如果 F 是稳定的，此外，存在 $\alpha>0$，使得对任何 $q\in U_\alpha$，当 $t\to+\infty$ 时 $d(\varphi_t(q),F)\to 0$，则称 F 是渐近稳定的。

定义 4.1.10　若 F 是一闭的不变集，且是渐近稳定的，则称 F 为吸引集。集合 $B=\{x\mid\lim\limits_{t\to+\infty}d(\varphi_t(x),F)=0\}$称为 F 的吸引域。

在定义 4.1.9 和定义 4.1.10 中，若将“$t\to+\infty$”改为“$t\to-\infty$”，即得排斥集和排斥域的概念。此外，若在吸引集(或排斥集)中包含一条稠密的轨线，则称为吸引子(或排斥子)。点吸引子也称为汇，点排斥子也称为源。

下面介绍平面动力系统的极限集的重要性质，即庞加莱-班狄克逊定理。为此，先介绍约当曲线定理。

定理 4.1.2　约当曲线定理　$\mathbf{R}^2$ 上的简单闭曲线 C 将 $\mathbf{R}^2$ 分为两个互不相交的开集 P_1 和 P_2，P_1 是有界集，称为 C 的内域；P_2 是无界集，称为 C 的外域。P_1(或 P_2)中任意两点都可以用完全在 P_1(或 P_2)中的连续曲线来连接。

庞加莱-班狄克逊定理是由解的存在唯一性和约当曲线定理推得的，由于受约当曲线定理的限制，庞加莱-班狄克逊定理只对 $\mathbf{R}^2$ 成立。

定理 4.1.3　庞加莱-班狄克逊定理　设平面动力系统的轨线 $r=\{\varphi_t(x)\mid t\in\mathbf{R}\}$，$x\in$

$D, \omega(x) \subseteq K \subseteq D \subseteq \mathbf{R}^2$，$K$ 为紧集，且 $\omega(x)$不包含平衡点，则轨线 r 只可能属于以下两种情形。

①$r = \omega(x)$，即 x 位于一个周期轨道上。

②$\omega(x)$对 r 是一个极限环，且当 $t \to \infty$ 时 r 卷绕在 $\omega(x)$上；或 r 本身不是闭轨，但 $\omega(x) = \bar{r}(x) \setminus r(x)$是闭轨，其中 $\bar{r}(x)$是 $r(x)$的闭包。

4.2 稳定流形定理

4.2.1 流的线性化和流形

考虑 n 维线性系统

$$\dot{x} = Ax, x \in \mathbf{R}^n \tag{4.2.1}$$

其中 A 为 $n \times n$ 常值矩阵，显然原点 O 是系统的平衡点。这个系统的流为 $\varphi_t = e^{At}\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$，称为**线性流**。

线性流形 L 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个子空间的平行移动的轨线，其中每个点同时运动。

$$L = x_0 + \text{span}\{x_1, x_2 \cdots x_k\}, x_1, x_2, \cdots x_k \in \mathbf{R}^n$$

考虑线性系统(4.2.1)所对应的矩阵 A，设其特征值的重数与特征向量所张成的子空间维数相同，设特征值 $\lambda_r (r = 1, 2 \cdots n)$对应特征向量 φ_r，每一组特征向量张成一个子空间。

①对应 $\text{Re}(\lambda_R) < 0, E^S = \text{span}\{\varphi_{r_1}, \varphi_{r_2}, \cdots, \varphi_{r_s}\}$，称为**稳定子空间**；

② 对应 $\text{Re}(\lambda_C) = 0, E^C = \text{span}\{\varphi_{r_1}, \varphi_{r_2}, \cdots, \varphi_{r_c}\}$，称为**中心子空间**；

③ 对应 $\text{Re}(\lambda_U) > 0, E^U = \text{span}\{\varphi_{r_1}, \varphi_{r_2}, \cdots, \varphi_{r_u}\}$，称为**不稳定子空间**；

其中 $r_S + r_C + r_U = n$。

对 $\mathbf{R}^n$ 作直和分解

$$\mathbf{R}^n = E^S \oplus E^U \oplus E^C$$

其中 E^S、E^U 和 E^C 分别为矩阵 A 的具有负实部、正实部和零实部特征值所对应的不变子空间。

定义 4.2.1 若矩阵 A 的所有特征值都有非零实部，则 A 是双曲的，否则是非双曲的，若 A 是双曲的，则原点 O 为系统的双曲平衡点，并称 e^{At} 为线性双曲流。

对于 n 维非线性系统

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbf{R}^n \tag{4.2.2}$$

$f: \mathbf{R}^n$ 上 $C^r (r \geqslant 1)$向量场，设原点是孤立平衡点，即 $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$(若平衡点 x_0 不是原点，则可作线性变换 $y = x - x_0$，则系统变为 $\dot{y} = g(y)$，从而原点成为新系统的平衡点)，则可在原点处对系统进行线性化，并定义

$$\dot{x} = A \cdot x, x \in \mathbf{R}^n \tag{4.2.3}$$

为系统(4.2.2)在原点处的线性化系统，并称上式的右端为向量场 $f(x)$ 关于原点的线性化向量场，其中 A 为原点处的雅可比矩阵，$A = D_x f(0)$，这个系统的流是 $\varphi_t = e^{At}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$，为线性流。

关于线性化系统的动力学特性，有以下定理。

定理 4.2.1　哈特曼-格鲁巴曼定理(Hartman-Grobman)　设点 O 是系统(4.2.3)的双曲平衡点，则向量场 $f(x)$ 与其线性化向量场 $D_x f(0)$ 在点 O 的某邻域内是拓扑等价的，如图 4-1 所示。

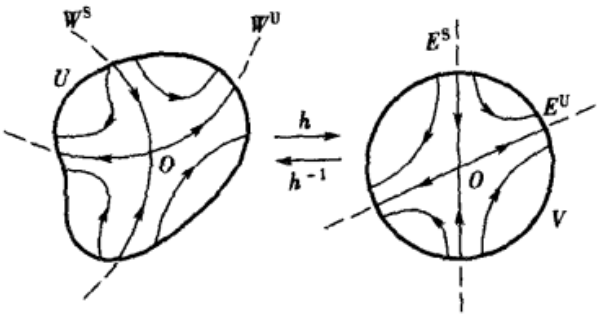


图 4-1　哈特曼-格鲁巴曼定理

定义 4.2.2　设点集 $M \subset \mathbf{R}^n$。若 M 有一个开覆盖 $\{U_i\}$，且有一族同胚 $\{\varphi_i\}$，$\varphi_i: U_i \to \mathbf{R}^n$，使得 $\varphi_i(U_i)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的开集；此外，对于不同的 i、j，复合映射 $\varphi_i \cdot \varphi_j^{-1}$ 在其定义域上是 C^r 的，$0 \leqslant r \leqslant \infty$，则称 M 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个 n 维 C^r 流形。其中 C^0 流形亦称拓扑流形，$C^r(r \geqslant 1)$ 流形亦称为 C^r 微分流形。

流形的概念是通常的解曲线、曲面等概念的自然推广。

4.2.2　非线性系统

定义 4.2.3　在 x_0 点附近稳定、不稳定和中心流形的定义如下：

$W^s_{\mathrm{Loc}}\{x \in U \mid \forall\, t \geqslant 0, \varphi_t(x) \in U, \text{且} \lim\limits_{t \to +\infty} \varphi_t(x) = x_0\}$ 为平衡点 x_0 的局部稳定流形；

$W^c_{\mathrm{Loc}}\{x \in U \mid \forall\, t \geqslant 0, \varphi_t(x) \in U, \text{且} \lim\limits_{|t| \to +\infty} \varphi_t(x) \neq x_0\}$ 为平衡点 x_0 的局部中心流形；

$W^u_{\mathrm{Loc}}\{x \in U \mid \forall\, t \leqslant 0, \varphi_t(x) \in U, \text{且} \lim\limits_{t \to -\infty} \varphi_t(x) = x_0\}$ 为平衡点 x_0 的局部不稳定流形。

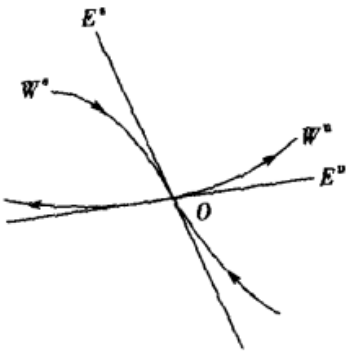


图 4-2　局部稳定和不稳定流形

4.2.3　稳定流形定理

定理 4.2.2　稳定流形定理　设点 O 为系统的双曲平衡点，E^s 为线性化系统的稳定子空间，$\dim E^s = n_s$，且 $f(x)$ 为 $C^r(r \geqslant 1)$ 向量场，则 $W^s_{\mathrm{Loc}}(0)$ 是 n_s 维 C^r 微分流形，且在点 O 处与 E^s 相切。对 $W^u_{\mathrm{Loc}}(0)$ 也有类似的结论，图 4-2 给出定理的说明。

哈特曼-格罗布曼定理和稳定流形定理是双曲平衡点的两条重要性质。一个动力系统，若其所有平衡点均为双曲平衡点，则可通过对其在平衡点处的线性化系统的考察来把握原系统的动力学特性。但对于许多系统，其平衡点并非都是双曲平衡点(即系统在平衡点处的线性化矩阵有零实部特征根)，此时系统的动力学特性可能会发生质的变化，产生分岔、混沌等各种复杂的非线性现象。

4.3 中心流形定理

考虑系统

$$\dot{x} = f(x)(\text{其中 } x \in U \subseteq \mathbf{R}^n) \tag{4.3.1}$$

有如下定理。

定理 4.3.1 中心流形定理 设 $f(x)$ 是 $C^r(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ 向量场，点 O 是系统(4.3.1)的一个非双曲平衡点，E^s、E^u 和 E^c 分别为线性近似系统的稳定子空间、不稳定子空间和中心子空间，则在 O 点的某邻域 D 内，存在过 O 点并在该处分别与 E^s、E^u 和 E^c 相切的 C^r 局部稳定流形 W^s，C^r 局部不稳定流形 W^u 和 C^r 局部中心流形 W^c，它们都是局部不变集。W^s 和 W^u 是唯一的，但 W^c 并不唯一，即 $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \varphi^t y_0$ 方向不定，如图 4-3 所示。

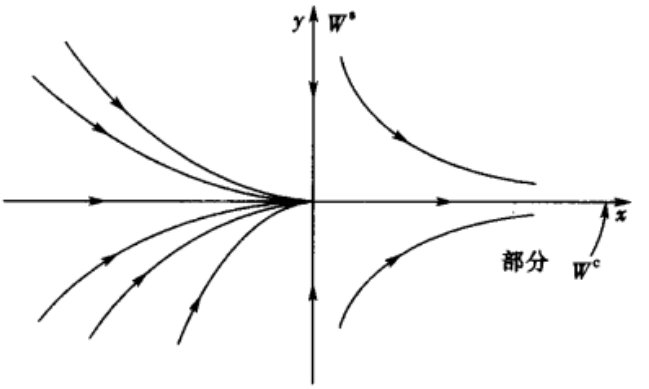


图 4-3 中心流形

下面介绍中心流形的计算。为此，仍设系统平衡点为原点 O，且线性算子 $L = D_x f(0)$ 不具有正实部的特征值(即稳定系统开始失稳的临界状态)。

设 D 为点 O 的某个邻域，给定非奇异线性变换矩阵 T 将系统(4.3.1)的雅可比矩阵 $A = D_x f(0)$ 化为对角块形式，即

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

其中 B 和 C 分别为 $n_c \times n_c$ 和 $n_s \times n_s$ 矩阵，它们的特征值分别为零实部和负实部，$n_s =$

$\dim E^s, n_c = \dim E^c, n_s + n_c = n$。令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{y}$，其中 $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}$，$u \in E^c$、$v \in E^s$，则有

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{u}} &= \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \\ \dot{\boldsymbol{v}} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \end{aligned}\right\} \tag{4.3.2}$$

由于中心流形 W^c 存在，且在原点处与 E^c 相切，因此可以在 D 内把 W^c 表示为

$$W^c : \boldsymbol{v} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}) \tag{4.3.3}$$

其中 $\boldsymbol{h}(0) = \boldsymbol{h}'(0) = 0$。把式(4.3.3)代入式(4.3.2)，得到中心流形上流的方程

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u})) \tag{4.3.4}$$

式(4.3.4)即为原系统降维后的方程。在原点附近，系统(4.3.2)在稳定流形上的流有着与线性流系统相同的局部性态，故系统的局部动力学特性主要由中心流形上的流决定。特别地，关于稳定性有如下定理。

定理 4.3.2　若约化系统(4.3.4)的原点是稳定(或渐近稳定、不稳定)的，则原系统(4.3.1)的原点也是稳定(或渐近稳定、不稳定)的。

为确定函数 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u})$，将 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u})$ 代入式(4.3.2)的第二式，并利用求导的链式法则，有

$$D\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u})\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}))$$

再利用式(4.3.2)的第一式，整理后，得到 $h(u)$ 的微分方程

$$D\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u})[\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}))] - \boldsymbol{C}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u})) = 0 \tag{4.3.5}$$

下面举例说明中心流形方法的应用。

例 4.3.1　试用中心流形方法研究系统

$$\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = -y + ax^2 \end{cases}$$

在平衡点(0,0)处的动力学性态。其中 $(x, y) \in \mathbf{R}^2$、$a \in \mathbf{R}$ 为常数。

解：由系统方程知系统平衡点为(0,0)，且系统在平衡点处的导算子(雅可比)矩阵

$$\boldsymbol{L} = \mathrm{D}f(x, y)\big|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} y & x \\ 2ax & -1 \end{bmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

有特征值 0 和 −1。对应特征向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_1 = [1 \quad 0]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\xi}_2 = [0 \quad 1]^{\mathrm{T}}$，则

中心子空间 $E^c = \mathrm{span}\{\boldsymbol{\xi}_1\} = x$ 轴；

稳定子空间 $E^s = \mathrm{span}\{\boldsymbol{\xi}_2\} = y$ 轴。

根据中心流形定理，过(0,0)点有一维的稳定流形和中心流形。由式(4.3.3)和式(4.3.5)知，中心流形函数 $y = h(x)$ 应满足

$$\left.\begin{aligned} &h'(x)[xh(x)] + h(x) - ax^2 = 0 \\ &h(0) = h'(0) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.3.6}$$

由式(4.3.6)的第二式，可设 $h(x)$ 的渐近展开式为

$$h(x) = c_2 x^2 + c_3 x^3 + O(x^4) \tag{4.3.7}$$

代入式(4.3.6)的第一式,并比较 x 的同次幂的系数,可得 $c_2 = a, c_3 = 0$,故 $h(x) = ax^2 + O(x^4)$。则中心流形上流的方程为

$$\dot{x} = xh(x) = ax^3 + O(x^5) \tag{4.3.8}$$

易知,当 $a < 0$ 时,式(4.3.8)的原点是渐近稳定的。由定理 4.3.2 知,原系统的原点也是渐近稳定的。同理,当 $a > 0$ 时,原系统的原点是不稳定的。当 $a = 0$ 时,方程(4.3.6)有解,$h(x) = 0$。这时中心流形就是 x 轴。此时方程(4.3.8)成为 $\dot{x} = 0$,它在原点处是稳定的。故原系统的原点也是稳定的。系统在原点附近的相图如图 4-4 所示。

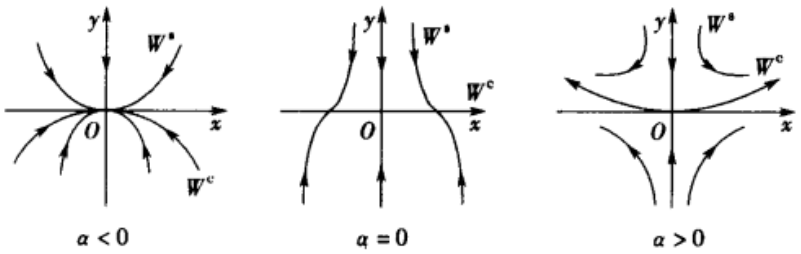


图 4-4 例 4.3.1 在原点附近的相图

对于含有参数的系统

$$\dot{x} = f(x, \mu) \tag{4.3.9}$$

其中 $f: U \times J \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$,且 $f(0,0) = 0$。只需将 μ 也视为变量,此时式(4.3.2)变为

$$\left.\begin{aligned} \dot{u} &= B(\mu)u + F(u, v, \mu) \\ \dot{v} &= C(\mu)v + G(u, v, \mu) \\ \dot{\mu} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.3.10}$$

各符号意义同前,仍按上述作法计算。下面试举一例。

例 4.3.2 考虑杜芬方程

$$\ddot{x} + \dot{x} - \beta x + x^2 = 0 \quad (\text{其中 } x \in \mathbf{R})$$

在 $\beta = 0$ 附近系统的分岔行为。

解:该系统可化为二维含参平面自治系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x^2 \end{bmatrix}$$

当 $\beta = 0$ 时,其线性近似系统有特征值 0 和 -1,故原点为非双曲平衡点。为将其线性矩阵对角化,作线性变换

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

并将 β 也视为变量,则有

$$\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{\beta}\\ \dot{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ \beta\\ v\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta(u+v)-(u+v)^2\\ 0\\ -\beta(u+v)-(u+v)^2\end{bmatrix} \tag{4.3.11}$$

该系统有二维中心流形，它在(0,0,0)处与(u,β)平面相切。设中心流形可由函数 $v=h(u,\beta)=a_1u^2+a_2u\beta+a_3\beta^2+O((u^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}})$表示，则由式(4.3.5)得

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial h}{\partial u}&\dfrac{\partial h}{\partial \beta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta(u+h)-(u+h)^2\\ 0\end{bmatrix}+h+\beta(u+h)-(u+h)^2=0$$

即

$$[\beta(u+h)-(u+h)^2]\left(\frac{\partial h}{\partial u}+1\right)+h=0 \tag{4.3.12}$$

另，由式(4.3.3)知

$$h(0,0)=0,\frac{\partial h(0,0)}{\partial u}=\frac{\partial h(0,0)}{\partial \beta}=0 \tag{4.3.13}$$

由式(4.3.12)和式(4.3.13)可求出中心流形的渐近展开式

$$v=h(u,\beta)=-\mu\beta+u^2+O((u^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}})$$

代入式(4.3.11)得中心流形上流的方程(即约化方程)

$$\begin{cases}\dot{u}=\beta u-u^2+O((u^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}})\\ \dot{\beta}=0\end{cases}$$

约化系统和原系统的分岔图如图 4-5 所示。

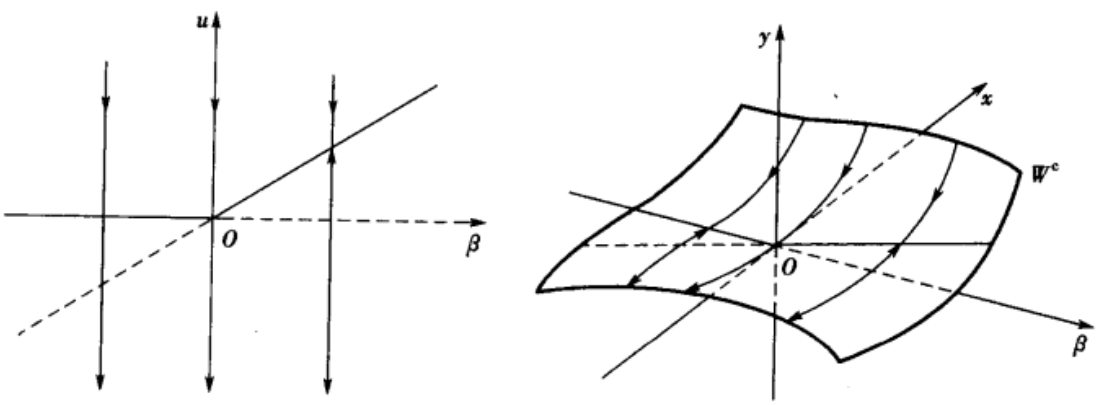


图 4-5　例 4.3.2 中约化系统和原系统的分岔图

4.4　中心流形定理的电算程序及算例

利用上节的讨论，本节利用计算机符号语言 Mathematica 编制了计算中心流形的通用程序(详见附录 1)。本程序只需要输入动力系统的形式即常微分方程组，以及微分系统的总

维数 n、中心流形的维数 n_c 和所需要的求解中心流形的阶数。要求中心流形在前，稳定流形在后，则电算程序将给出中心流形上的流的方程或称为分岔方程。其流程图如图 4-6 所示。

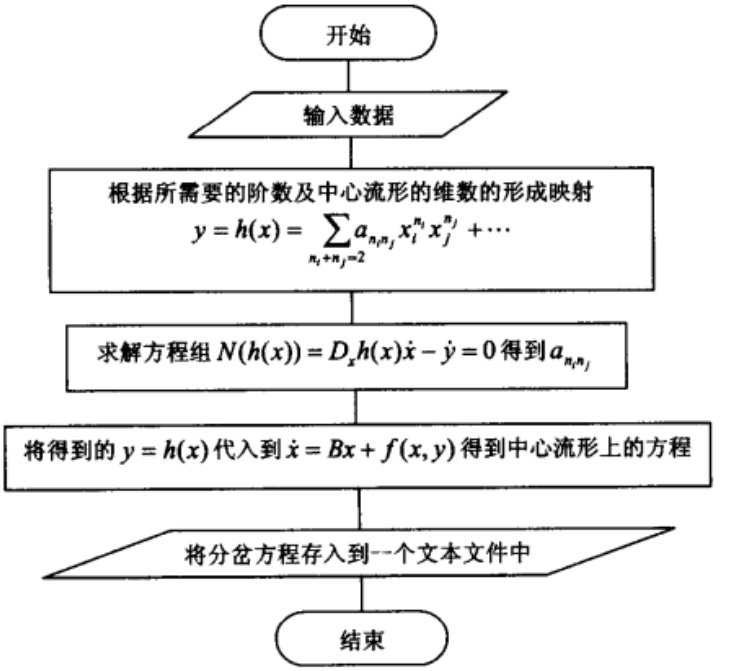


图 4-6 计算中心流形的程序框图

下面通过几个算例说明本程序的使用方法。

例 4.4.1 计算如下常微分系统的分岔方程

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=xy\\ \dot{y}&=-y+\alpha x^2\end{aligned}\right\} \tag{4.4.1}$$

按程序要求，输入的文本文件 center.txt 的形式如下：

```
centerdimension = 1;
dx[1] = x[1] y[1];
dy[1] = - y[1] + arf * x[1]∧2;
korder = 5;
total = 2;
```

经过程序的计算，给出的结果为：

```
"centerdimension" = 1
"dx[1] = "arf * x[1]^3 * (1 - 2 * arf * x[1]∧2)
```

则它在平衡点(即(0,0)点)附近的相图如图 4-7 所示。

例 4.4.2 对于如下含参系统：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - x^2\\ \dot{y} &= -y + x^2\\ \dot{\mu} &= 0\end{aligned}\right\} \tag{4.4.2}$$

其中第三个方程是将 μ 看作状态变量后，增加的一个方程。经过程序运算后，程序输出的中心流形上流的微分方程组为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - x^2\\ \dot{\mu} &= 0\end{aligned}\right\} \tag{4.4.3}$$

由上式知，流的定常解为

$$\begin{cases} x = 0 \\ \mu = \text{const} \end{cases}, \qquad \begin{cases} \mu = x \\ \mu = \text{const} \end{cases}$$

在二维中心流形子空间上的相迹图，见图 4-8。如果把 μ 看作分岔参数，x 仍为状态变量，则图 4-8 即为本问题的分岔图。此结果和参考文献(陈予恕，1993)一致。

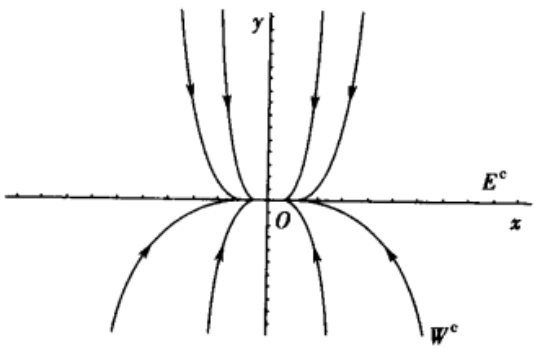


图 4-7　例 4.4.1 在平衡点附近的相图

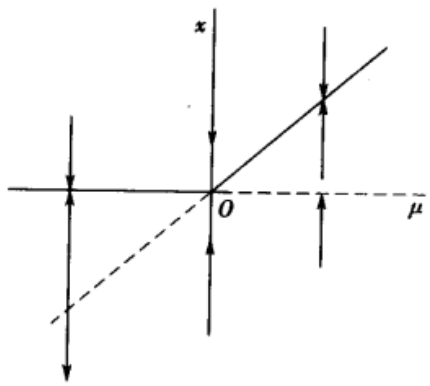


图 4-8　例 4.4.2 在平衡点附近的相图

根据本节的流程图，可以编制计算任意维中心流形上的流的方程的 Mathematica 电算程序(见附录 1)，把高维系统的稳定性问题化为较低维的在中心流形上的流的微分系统的稳定性问题。因为，对于由式(4.4.3) 定义的系统，在原点 O 是局部渐近稳定的(或是不稳定的)，则系统(4.4.2)在原点 O 也是渐近稳定的(或是不稳定的)。应用 Mathematica 程序可以计算到中心流形上的流的方程组为六维时的任意阶分岔方程的形式。

第 5 章 规范形理论

规范形(normal form)理论是研究非线性常微分方程的强有力工具之一,特别是在研究非线性动力系统的稳定性和分岔方面发挥了非常重要的作用。规范形理论最早是由 Poincare 提出来的。Liapunov, Birkhoff, Arnold 等人都为规范形理论的发展作出了卓越的贡献。由于规范形理论在分岔研究中扮演了非常重要的角色,近 20 年来该理论得到了迅速的发展。规范形理论的基本思想是通过一系列接近恒同的非线性变换,将原非线性微分方程化简。经过多年的研究工作,传统的规范形(conventional normal form)理论已日趋成熟,许多国内外著名学者已经开始将研究重点转向高维复杂系统传统规范形的计算和低维系统最简规范形(simplest normal form)或称为唯一规范形(unique normal form)的研究。最简规范形比传统的规范形的形式更加简单。由于规范形包含了原系统在平衡点附近的所有动力学特性,所以可以使人们更容易研究原系统的稳定性、分岔特性。最简规范形的研究工作刚刚起步,还有大量的工作要做。

5.1 概述

关于规范形的研究主要分为两类:①给定某个矩阵,确定满足规范形定义的所有可能的矢量场集合,即所谓规范形类问题;②给定具体方程,确定相应的规范形系数。

5.1.1 关于传统的规范形的研究

对于第一类问题已经得到了较好的解决,北京大学的王铎(1989,1994)、加拿大的 Chow 以及北大的李承治、王铎(1994)对研究规范形的常用的三种方法(矩阵表示法、共轭算子法、李代数法)进行了全面的介绍,Guckenheimer(1983)给出了各种余维 1 和余维 2 系统规范形的形式。

对于第二类问题,美国的 Nayfeh(1993)详尽地介绍了如何利用多尺度方法计算自治及非自治的单自由度系统、参激振动系统、两自由度系统规范形。张琪昌和陈予恕(1990,1991)在国内最早提出了用规范形理论研究非线性振动问题,法国的 Jezequel 和 Lamarque (1991)在国外最早提出了用规范形理论研究非线性振动问题。加拿大的 Yu(1998)利用摄动法推导出一种计算一般 n 维系统规范形系数的方法。张琪昌(1991)、Andrew Leung(1998)、韩景龙(1996)及张伟亿(2000)等人证明了平均法与规范形方法的等价性,并将该方法用计算机代数语言编制成计算霍普夫分岔系统的高阶规范形的通用计算程序。张伟(1997)利用矩阵表示法计算了具有 Z_2 对称性时非线性动力系统的 3 阶和 5 阶规范形,用共轭算子法张

伟(1993)计算了具有幂零线性部分和不具有 Z_2 对称性的非线性动力系统的 2 阶、3 阶和 4 阶规范形。吴志强和陈予恕(1997)提出了一种求解规范形的直接方法，并利用该方法计算了具有双零特征值系统和双霍普夫分岔系统的规范形。张琪昌和 Andrew Leung(2001,2003)利用单步长非线性变换方法，并对计算和程序方法进行了优化，利用 Mathematica 语言给出了一种经中心流形降维和不经中心流形降维计算高维半单系统规范形的通用计算程序。而对于非半单系统，由于问题的复杂性，人们目前还很难得到计算其规范形的通用程序方法。

5.1.2　关于最简(唯一)规范形的研究

由于传统的规范形的非线性变换算子的补空间的选取不唯一，因而所得到的规范形的形式和系数并不最简。所谓最简规范形就是将传统的规范形进一步简化，是建立在传统规范形的基础上的，其形式比传统的规范形更加简单。关于最简规范形是由日本的 Ushiki(1984)首先提出的，法国的 Chen(2000)，北京大学的 Wang Xiaofeng、王铎(2001)利用基于 Lie 代数的新方法，对二维、三维、四维幂零系统的规范形类问题进行了深入的研究，给出在某些条件下其最简规范形的表达形式。加拿大的 Yu(1999、2001、2002)利用规范形理论，通过三个定理证明了霍普夫和广义霍普夫分岔的规范形可做进一步的简化，其极坐标形式的方程仅含两项，利用同样的方法计算了具有双零特征值、一对纯虚根及单零特征值系统的最简规范形，利用 Lie 变换方法计算了具有单零特征值的含参系统的规范形。

规范形理论在非线性动力系统稳定性和分岔研究中发挥了至关重要的作用，规范形理论的研究是近 20 年来国内外在非线性动力学研究领域的热点，是一个方兴未艾的研究领域。它是简化非线性常微分方程最有效的工具，而规范形(系数)的计算是一项既难又繁的工作，因而开发出高效实用的计算程序，将节省相关研究者大量的时间和精力，为深入地研究高维复杂非线性动力系统的稳定性、静动态分岔研究奠定良好的基础。

5.2　规范形理论的基本概念

考虑系统

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + j^2(\boldsymbol{X}) + \cdots + j^r(\boldsymbol{X}) + O(|\boldsymbol{X}|^{r+1}) \quad (\boldsymbol{X} \in \mathbf{R}^n) \tag{5.2.1}$$

其中：$\boldsymbol{A}$ 是 $n \times n$ 矩阵，$j^k(\boldsymbol{X}) \in H_n^k$（$H_n^k$ 是在线性空间内 n 个变量组成的 k 阶齐次多项式），$k = 2, \cdots, r$，假设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 已经是约当(Jordan)标准形(若不是约当标准形，由线性代数知识知道，可以通过非奇异的线性变换将方程(5.2.1)的线性部分系数化为约当标准形)。

为了将方程(5.2.1)的非线性部分化简，引入接近恒同的变换：

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} + p^k(\boldsymbol{Y}) \quad (p^k(\boldsymbol{Y}) \in H_n^k, k \geqslant 2) \tag{5.2.2}$$

上式是一个在原点附近的微分同胚，将其代入式(5.2.1)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{Y} + p^k(\boldsymbol{Y})] = \boldsymbol{A}[\boldsymbol{Y} + p^k(\boldsymbol{Y})] + \cdots + j^k[\boldsymbol{Y} + p^k(\boldsymbol{Y})] + O(|\boldsymbol{Y}|^{k+1}) \tag{5.2.3}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{Y}+p^k(\boldsymbol{Y})]=[\boldsymbol{I}+Dp^k(\boldsymbol{Y})]\dot{\boldsymbol{Y}}$$

根据对矩阵的泰勒(Taylor)公式,将式(5.2.3)整理后得

$$\dot{\boldsymbol{Y}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}+j^2(\boldsymbol{Y})+\cdots+j^{k-1}(\boldsymbol{Y})+j^k(\boldsymbol{Y})-ad_{\boldsymbol{A}}^k p^k(\boldsymbol{Y})+O(|\boldsymbol{Y}|^{k+1})\quad(\boldsymbol{Y}\in\mathbf{R}^n) \tag{5.2.4}$$

其中 $ad_{\boldsymbol{A}}^k p^k(\boldsymbol{Y})$为我们定义的一个线性算子 $ad_{\boldsymbol{A}}^k: H_n^k\to H_n^k$,

$$ad_{\boldsymbol{A}}^k p^k(\boldsymbol{Y})=Dp^k(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{A}p^k(\boldsymbol{Y})$$

由式(5.2.4)可以看到,经过变换后,小于 k 阶的各阶多项式的形式没有发生变化,只有 k 阶和高于 k 阶的齐次多项式发生了变化。若

$$j^k(\boldsymbol{Y})-ad_{\boldsymbol{A}}^k p^k(\boldsymbol{Y})=0 \tag{5.2.5}$$

则第 k 阶齐次多项式化为最简单形式了。因为 $ad_{\boldsymbol{A}}^k$ 是线性算子,所以若 $ad_{\boldsymbol{A}}^k$ 是可逆的或 $j^k(\boldsymbol{Y})$是 $ad_{\boldsymbol{A}}^k$ 的值域,则式(5.2.5)可解,否则为了将 k 阶齐次多项式进行直和分解,令

$$H_n^k=R(ad_{\boldsymbol{A}}^k)\oplus C^k$$

C^k 表示在 H_n^k 线性算子 $ad_{\boldsymbol{A}}^k$ 的值域的补空间,则可将 $j^k(\boldsymbol{Y})$分解为

$$j^k(\boldsymbol{Y})=r^k(\boldsymbol{Y})+g^k(\boldsymbol{Y})$$

其中

$$r^k(\boldsymbol{Y})\in R(ad_{\boldsymbol{A}}^k),\ g^k(\boldsymbol{Y})\in C^k$$

可找到一个 $p^k(\boldsymbol{Y})$使得 $ad_{\boldsymbol{A}}^k p^k(\boldsymbol{Y})=r^k(\boldsymbol{Y})$,那么式(5.2.4)化简为

$$\dot{\boldsymbol{Y}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}+j^2(\boldsymbol{Y})+\cdots+j^{k-1}(\boldsymbol{Y})+g^k(\boldsymbol{Y})+O(|\boldsymbol{Y}|^{k+1}) \tag{5.2.6}$$

定理 5.2.1 令 C^k 为在 H_n^k 内算子 $ad_{\boldsymbol{A}}^k$ 的值域的补空间,$k=2,\cdots,r$,那么存在一系列接近恒同的变换

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}+p^k(\boldsymbol{Y}),p^k(\boldsymbol{Y})\in H_n^k\quad(k=2,\cdots,r)$$

则系统(5.2.1)化简为

$$\dot{\boldsymbol{Y}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}+g^2(\boldsymbol{Y})+\cdots+g^r(\boldsymbol{Y})+O(|\boldsymbol{Y}|^{r+1}) \tag{5.2.7}$$

其中 $g^k(\boldsymbol{Y})\in C^k(k=2,\cdots,r)$。

定理 5.2.1 的证明参看文献(Healey,1988)。

显然式(5.2.7)是所有与式(5.2.1)等价系统中,通过光滑的变换所得到的直到 k 阶的最简单的一个。

定义 5.2.1 式(5.2.7)的截断系统

$$\dot{Y}=\boldsymbol{A}Y+g^2(Y)+\cdots+g^r(Y) \tag{5.2.8}$$

叫做式(5.2.1)直到 r 阶(截断)PB 规范形。

附注:由规范形的定理可以看到,因为算子 $ad_{\boldsymbol{A}}^k$ 的值域的补空间 C^k 不唯一,所以一个方

程的规范形并不唯一；而另一方面，由于变换式(5.2.2)在原点附近是微分同胚的，因此规范形只能给出方程(5.2.1)在原点附近的局部性态。

定义 5.2.2　H_n^k 是在线性空间 $\mathbf{R}^n$ 内由 n 个变量组成的 k 阶齐次多项式的每一个 k 阶单项式为基所张成的空间，$k=2,\cdots,r$，则 $\dim H_n^k = n\cdot C_{n+k-1}^{n-1} = n\cdot\dfrac{(n+k-1)}{(n-1)!\ k!}$。

例 5.2.1　试求 $n=2$、$k=2$ 时的 H_n^k。

解：由于 $n=2$，设变量为 x_1、x_2，则按定义，H_2^2 的基应为 $\mathbf{R}^2$ 内由 x_1、x_2 组成的 2 阶齐次多项式 $\begin{bmatrix} a_1x_1^2+a_2x_1x_2+a_3x_2^2 \\ b_1x_1^2+b_2x_1x_2+b_3x_2^2 \end{bmatrix}$ 的每一个 2 次单项式，共有 6 个，即 $\left\{\begin{bmatrix}0\\x_1^2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\x_1x_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\x_2^2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x_1^2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x_1x_2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x_2^2\\0\end{bmatrix}\right\}$。事实上，此时有 $\dim H_2^2 = 2\cdot C_{2+2-1}^{2-1} = 2\cdot C_3^1 = 6$ 与基的个数确实相符。

考虑系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}) \tag{5.2.9}$$

其中 $\boldsymbol{x}=[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$。设 $f(x)$ 足够光滑，且 $f(0)=0$。

将系统(5.2.9)在平衡点 $\boldsymbol{x}=0$ 处展开成泰勒级数

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + f^2(\boldsymbol{x}) + \cdots + f^r(\boldsymbol{x}) + O(|\boldsymbol{x}|^{r+1}),\ \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n \tag{5.2.10}$$

其中 $\boldsymbol{A}=Df(0)$ 是 $n\times n$ 矩阵，$f^k(\boldsymbol{x})\in H_k(\mathbf{R}^n)$。设 A 已经是约当标准形。引入近恒同变换

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + p^k(\boldsymbol{y}) \tag{5.2.11}$$

其中 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$，$p^k(\boldsymbol{y})\in H_n^k$，$k\geqslant 2$ 是 k 次齐次多项式，即

$$p^k(\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} a_{11}y_1^k + a_{12}y_1^{k-1}y_2 + \cdots \\ a_{21}y_1^k + a_{22}y_1^{k-1}y_2 + \cdots \\ \vdots \\ a_{n1}y_1^k + a_{n2}y_1^{k-1}y_2 + \cdots \end{bmatrix} \tag{5.2.12}$$

将式(5.2.11)代入式(5.2.10)，并考虑式(5.2.12)，得

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{y} + f^2(\boldsymbol{y}) + \cdots + f^k(\boldsymbol{y}) - D_{\boldsymbol{y}}p^k(\boldsymbol{y})\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{y} + \boldsymbol{A}p^k(\boldsymbol{y}) + O(|\boldsymbol{y}|^{k+1}) \tag{5.2.13}$$

其中 $D_{\boldsymbol{y}}p^k(\boldsymbol{y})$ 是 $p^k(\boldsymbol{y})$ 的雅可比矩阵，小于 k 阶的各项形式没有发生变化。定义同调算子

$$\boldsymbol{L}_A^k = \boldsymbol{L}_A(p^k(\boldsymbol{y})) = D_{\boldsymbol{y}}p^k(\boldsymbol{y})\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}p^k(\boldsymbol{y}) \tag{5.2.14}$$

式(5.2.13)可重写为

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{y} + f^2(\boldsymbol{y}) + \cdots + f^k(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{L}_A(p^k(\boldsymbol{y})) + O(|\boldsymbol{y}|^{k+1}) \tag{5.2.15}$$

记 $R(\boldsymbol{L}_A^k)$ 为 $\boldsymbol{L}_A^k$ 的值空间，将 H_n^k 进行直和分解

$$H_n^k = R(\boldsymbol{L}_A^k)\oplus G_n^k \tag{5.2.16}$$

G_n^k 为 $R(\boldsymbol{L}_A^k)$ 的补空间，令 $f^k(\boldsymbol{y}) = h^k(\boldsymbol{y}) + g^k(\boldsymbol{y})$，其中 $h^k(\boldsymbol{y})\in R(L_A)$，$g^k(\boldsymbol{y})\in G_n^k$。选择适当的 $p^k(\boldsymbol{y})$，使得 $L_A(p^k(\boldsymbol{y})) = h^k(\boldsymbol{y})$，则式(5.2.15)变为

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{y} + f^2(\boldsymbol{y}) + \cdots + f^k(\boldsymbol{y}) + g^k(\boldsymbol{y}) + O(|\boldsymbol{y}|^{k+1}) \tag{5.2.17}$$

综上所述,可得到定理如下。

定理 5.2.2 庞加莱-伯克霍夫规范形定理 若 G_n^k 为在 H_n^k 内算子 L_A^k 的值域的补空间,$k=2,\cdots,r$ 则存在一系列近恒等变换

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + p^k(\boldsymbol{y}), p^k(\boldsymbol{y}) \in H_n^k \quad (k=2,\cdots,r)$$

把系统(5.2.9)化简为

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{y} + g^2(\boldsymbol{y}) + \cdots + g^r(\boldsymbol{y}) + O(|\boldsymbol{y}|^{r+1}) \tag{5.2.18}$$

其中 $g^k(\boldsymbol{y}) \in G_n^k (k=2,\cdots,r)$。

式(5.2.18)即为式(5.2.9)的 r 阶规范形,由于补空间 G_n^k 不唯一,所以规范形并不唯一。

引理 5.2.1 庞加莱引理 设在 $\mathbf{R}^n$ 上,线性算子 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$(包括重根和复根),则在 H_n^k 上,L_A^k 的特征值为

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \cdots + m_n\lambda_n - \lambda_s = \sum_{i=1}^{n} m_i\lambda_i - \lambda_s = <\boldsymbol{m},\boldsymbol{\lambda}> - \lambda_s \tag{5.2.19}$$

其中 $m_1,\cdots,m_n$ 是大于或等于 0 的整数,$s \in \{1,2,\cdots,n\}$。

定义 5.2.3 庞加莱规范形关于共振的定义 若存在一组整数 $m_1,\cdots,m_n \geqslant 0$,且 $|\boldsymbol{m}| = \sum_{i=1}^{n} m_i \geqslant 2$,存在 $s \in \{1,2,\cdots,n\}$,使得

$$<\boldsymbol{m},\boldsymbol{\lambda}> - \lambda_s = 0 \tag{5.2.20}$$

则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 称为共振的,其中 $\lambda_i \in C$。

对于非共振情况,有以下定理。

定理 5.2.3 庞加莱线性化定理 对所有的 $s \in \{1,2,\cdots,n\}$ 和所有的 $\boldsymbol{m} = (m_1,\cdots,m_n)$,$|\boldsymbol{m}| = \sum_{i=1}^{n} m_i \geqslant 2$,若有非共振条件

$$<\boldsymbol{m},\boldsymbol{\lambda}> - \lambda_s \neq 0 \tag{5.2.21}$$

则方程(5.2.14)恒能满足,也就是说通过这种逐次的近恒同变换式(5.2.2),可将式(5.2.1)线性化。

5.3 矩阵表示法

由于算子 ad_A^k 是一个在 H_n^k 中有限维的线性算子,可以通过矩阵表示法在 H_n^k 中找到算子 ad_A^k 的补空间($k \geqslant 2$)。

引入记号 $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$,其中 α_i 为非负整数,并且 $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$。

定义 5.3.1 反字典顺序 假设 $x^{\alpha}e_i$ 和 $x^{\beta}e_j$ 为任两个 H_n^k 中的单项式,其中 e_i 和 e_j 是在

$\mathbf{R}^n$ 中的标准基，分别只有第 i 个和第 j 个元素等于 1，如果 $i>j$ 或者 $i=j$，而 α 和 β 第一个不同的分量 α_l 和 β_l 满足关系式 $\alpha_l>\beta_l$，称 $x^\alpha e_i<x^\beta e_j$。

假设 $\{X^\alpha,|\alpha|=k\}$ 是在 H_n^k 中一组反字典顺序排列的基，令 L_A^k 是算子 ad_A^k 关于基 $\{X^\alpha,|\alpha|=k\}$ 的矩阵表示。

引理 5.3.1　如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是上三角矩阵，则对任意 $k\geqslant 2$，矩阵 L_A^k 是下三角矩阵。证明参见文献(Chow，1994)。

如果通过基 $\{X^\alpha,|\alpha|=k\}$ 认为空间 H_n^k 与 $\mathbf{R}^s$ 相同，其中 $s=\dim H_n^k$，将 $\boldsymbol{L}_A^k$ 视为 $\mathbf{R}^s$ 的线性算子，则由 $\boldsymbol{L}_A^k$ 在 $\mathbf{R}^s$ 中的象的补子空间给出了 C^k 的补集。

定理 5.3.1　**弗雷德霍姆定理**　令 L 为有限维内积空间 V 的线性算子，假设 L^* 是 L 的共轭算子，则 $V=\mathrm{Im}\,\boldsymbol{L}\oplus\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{L}^*$，其中 $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{L}$ 是 L 的象，$\mathrm{Ker}\,L^*$ 是 L^* 的零空间。

定理 5.3.2　设 $\{X^\alpha,|\alpha|=k\}$ 为 H_n^k 反字典顺序的一组基，L_A^k 为 ad_A^k 在这组基下的矩阵，则 $\boldsymbol{L}^*$(即 $\boldsymbol{L}^*$ 为 $\boldsymbol{L}_A^k$ 的复共轭转置矩阵)的零空间 $N(\boldsymbol{L}^*)$ 是 $R(ad_A^k)$ 在 H_n^k 中的一个补空间，则 $H_n^k=R(ad_A^k)\oplus N(L^*)$。

定理的证明参看文献(夏道行，1985)，于是可取 $G_n^k=N(\boldsymbol{L}^*)^*$。

5.3.1　当 $\boldsymbol{A}$ 为非对角形时，规范形一般形式的计算方法

为了求得 k 次项的最简形式 $g^k(y)$，由于 $g^k(y)\in G_n^k\subset H_n^k$，故首先需要知道子空间 G_n^k 的基。

设 H_n^k 的一组基为 $\boldsymbol{e}=\{e_1,e_2,\cdots\}$，算子 $\boldsymbol{L}_A^k$ 在这组基下可表示为矩阵 $\boldsymbol{L}$。记 $\boldsymbol{L}$ 的复共轭转置矩阵为 $\boldsymbol{L}^*$。由线性代数的知识可知，$\boldsymbol{L}^*$ 的零空间 $N(\boldsymbol{L}^*)$ 正是 $R(\boldsymbol{L}_A^k)$ 的补空间 G_n^k。若 $\{\xi_i\}$ 为 $\boldsymbol{L}^*$ 的零特征值对应的特征向量的集合，或者说是

$$\boldsymbol{L}^*\xi=0 \tag{5.3.1}$$

的基础解系，则 $N(\boldsymbol{L}^*)$ 的基(也即 G_n^k 的基)$\tilde{\boldsymbol{e}}=\{\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\cdots\}$ 即可表示为

$$\{\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\cdots\}=\{e_1,e_2,\cdots\}\times\{\xi_1,\xi_2,\cdots\} \tag{5.3.2}$$

由式(5.3.2)求出 $\tilde{e}_1$、$\tilde{e}_2$、$\cdots$之后，即可得

$$g^k(y)=a\tilde{e}_1+b\tilde{e}_2+\cdots \tag{5.3.3}$$

其中 a、b、$\cdots$为常数。

下面举例说明将一个动力系统化为 PB 规范形的过程。

例 5.3.1　试用矩阵法求系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+O(\|\boldsymbol{x}\|) \tag{5.3.4}$$

的二阶截断 PB 规范形。其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^2$$

解:由于是二阶截断 PB 规范形,故 $k=2$;又因为是 $\mathbf{R}^2$,故 $n=2$。取近恒同变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+p^2(\boldsymbol{y})$$

其中 $\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^2$,$p^2(\boldsymbol{y})=\begin{bmatrix}p_1\\p_2\end{bmatrix}\in H_2^2$。由例 5.2.1 知 H_2^2 的基可取为

$$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4,\boldsymbol{e}_5,\boldsymbol{e}_6\}=\left\{\begin{bmatrix}0\\y_1^2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\y_1y_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\y_2^2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y_1^2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y_1y_2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y_2^2\\0\end{bmatrix}\right\}$$

又由式(5.2.14)知,同调算子

$$L_A(p^k(\boldsymbol{y}))=D_{\boldsymbol{y}}p^2(\boldsymbol{y})A\boldsymbol{y}-Ap^2(\boldsymbol{y})=\begin{bmatrix}\frac{\partial p_1}{\partial y_1}&\frac{\partial p_1}{\partial y_2}\\\frac{\partial p_2}{\partial y_1}&\frac{\partial p_2}{\partial y_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1\\p_2\end{bmatrix}$$

故可得

$$L_A(\boldsymbol{e}_1)=\begin{bmatrix}-y_1^2\\2y_1y_2\end{bmatrix}=2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_4,\ L_A(\boldsymbol{e}_2)=\begin{bmatrix}-y_1y_2\\y_2^2\end{bmatrix}=\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_5$$

$$L_A(\boldsymbol{e}_3)=\begin{bmatrix}-y_2^2\\0\end{bmatrix}=-\boldsymbol{e}_6,\ L_A(\boldsymbol{e}_4)=\begin{bmatrix}2y_1y_2\\0\end{bmatrix}=2\boldsymbol{e}_5,\ L_A(\boldsymbol{e}_5)=\begin{bmatrix}y_2^2\\0\end{bmatrix}=\boldsymbol{e}_6$$

$$L_A(\boldsymbol{e}_6)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

因此,L_A 在基$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4,\boldsymbol{e}_5,\boldsymbol{e}_6\}$下的矩阵表示为

$$L=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\2&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\-1&0&0&0&0&0\\0&-1&0&2&0&0\\0&0&-1&0&1&0\end{bmatrix}$$

由此可求出 L 的复共轭转置矩阵 L^*。由于 L 为实数阵,故有 $L^*=L^{\mathrm{T}}$。由 $L^*\xi=0$(或写为$L^{\mathrm{T}}\xi=0$)即

$$\begin{bmatrix}0&2&0&-1&0&0\\0&0&1&0&-1&0\\0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xi=\boldsymbol{0}$$

由上式可解得

$$\xi_1=(0,1,0,2,0,0)^{\mathrm{T}},\xi_2=(1,0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$$

故由式(5.3.2)知 G_n^k(本题中为 G_2^2)的基为

$$\{\tilde{e}_1,\tilde{e}_2\}=(e_1,e_2,\cdots,e_6)\times(\xi_1,\xi_2)=\{e_2+2e_4,e_1\}=\left\{\begin{bmatrix}2y_1^2\\ y_1y_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\ y_1^2\end{bmatrix}\right\}$$

故对 $g^2(y)\in G_2^2$ 有

$$g^2(y)=a\tilde{e}_1+b\tilde{e}_2=\begin{bmatrix}2ay_1^2\\ ay_1y_2+by_1^2\end{bmatrix}$$

其中 a、b 为常数。故系统(5.3.4)的二阶截断 PB 规范形为

$$\begin{cases}\dot{y}_1=y_2+2ay_1^2\\ \dot{y}_2=ay_1y_2+by_1^2\end{cases}$$

矩阵表示法的原理比较简单,但 H_n^k 的维数随 n 和 k 的增大而迅速增大。例如,当 $n=4$、$k=3$ 时,$\dim H_n^k=80$,从而计算量变得太大。随着电子计算机技术的发展,现在通常使用 Mathematica、MAPLE、MATLAB 等符号和数值计算软件来计算高维、高阶规范形,大大提高了工作效率。

5.3.2　当 A 为对角形时,规范形一般形式的计算方法

考虑系统

$$\dot{X}=AX+F(X),X\in\mathbf{R}^n,F(X)=O(|X|^2)\tag{5.3.5}$$

其中 $A=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),\lambda_i\in\mathbf{C}(i=1,2,\cdots,n)$。

定义 5.3.2　设 $A=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,如果 $|\alpha|\geqslant 0$,则单项式 $X^{\alpha}e_i$ 称为(对应于矩阵 A)k 阶共振单项式。其中 m_i 为任意整数,并且满足 $\sum_{i=1}^{n}m_i=\alpha$。

$$\lambda_1m_1+\lambda_2m_2+\cdots+\lambda_nm_n=\lambda_i\tag{5.3.6}$$

例 5.3.2　求系统 $\dot{X}=AX+j(X)$的 5 阶共振单项式的线性组合。其中

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{bmatrix},F(X)=O(|X|^2)$$

解:由 A 的表达式可知其特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2,\lambda_3=0$,则其共振单项式分别如下。

对于 u_1,有 $m_1\lambda_1+m_2\lambda_2+m_3\lambda_3-\lambda_1=0$,即 $m_1-2m_2-1=0$,其中 $m_1+m_2+m_3=5$,则有 $m_1=1,m_2=0,m_3=4$ 和 $m_1=3,m_2=1,m_3=1$ 两组解,即有 $u_1u_3^4$ 和 $u_1^3u_2u_3$ 的线性组合。

同理:对于 u_2,有 $m_1-2m_2+2=0$,则有 $u_2u_3^4$ 和 $u_1^2u_2^2u_3$ 的线性组合;对于 u_3,有 $m_1-2m_2=0$,则有 $u_1^2u_2u_3^2$ 和 u_3^5 的线性组合。

则原系统的5阶共振单项式为 $u_1^3u_2^2$、$u_1^3u_2u_3$、$u_2u_3^4$、$u_1^2u_2^2u_3$、$u_1^2u_2u_3^2$、u_3^5 的线性组合。

定理 5.3.3 设 $\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，则其 r 阶 A-规范形恰为所有 $k(2\leqslant k\leqslant r)$阶共振单项式的线性组合。

例 5.3.3 求系统 $\begin{cases}\dot{z}=-\mathrm{i}z+O(|z|^2)\\ \dot{\bar{z}}=-\mathrm{i}\bar{z}+O(|\bar{z}|^2)\end{cases}$ 的规范形。

解：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-\mathrm{i}&0\\0&\mathrm{i}\end{bmatrix}=\operatorname{diag}(-\mathrm{i},\mathrm{i})$

其特征值为：$\lambda=-\mathrm{i},\lambda_2=\mathrm{i}$。则对于 z_1 共振条件为：$\alpha_1-\alpha_2=1,\alpha=\alpha_1+\alpha_2$。

于是其 $r(r=2k+1)$阶 A-规范形为大于2的所有奇次阶的共振单项式的线性组合，即

$$\dot{z}=\mathrm{i}z+\boldsymbol{A}_3|z|^2z+\cdots+\boldsymbol{A}_{2k+1}|z|^{2k}z$$

5.4 共轭算子法

Belitskiit 和后来的 Elphick 等给出了计算规范形的另一种方法，利用这个的方法可以不通过矩阵计算而通过计算系统的线性偏微分方程得到其规范形。该方法基于空间 H_n^k 的一个点积，从而发现算子 ad_A^k 的共轭算子 $ad_A^{k^*}$，然后根据弗雷德霍姆定理，对于每一个 k，Ker $ad_A^{k^*}$ 是 Im ad_A^k 的补。

如果 $f(x)=\sum_{|\alpha|=k}C_\alpha x^\alpha$，其中 C_α 为实常数，则可以表示

$$f(\partial)=\sum_{|\alpha|=k}C_\alpha\frac{\partial^k}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\tag{5.4.1}$$

对于 $\boldsymbol{P}(x)=[p_1(x)\quad\cdots\quad p_n(x)]^{\mathrm{T}}\in H_n^k$ 和 $\boldsymbol{Q}(x)=[q_1(x)\quad\cdots\quad q_n(x)]^{\mathrm{T}}\in H_n^k$，定义

$$<\boldsymbol{P}(x),\boldsymbol{Q}(x)>=\sum_{i=1}^n p_i(\partial)q_i(x)\Big|_{x=0}\tag{5.4.2}$$

然后可得到以下引理。

引理 5.4.1 对于 $n\geqslant1,k\geqslant0$，在 H_n^k 中 $<\cdot,\cdot>$ 是一个标积。

例 5.4.1 对于任意 $\alpha=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\},\beta=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}(1\leqslant i,j\leqslant n)$，有

$$<x^\alpha e_i,x^\beta e_j>=\begin{cases}\alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n! & (\alpha=\beta\text{ 或 }i=j)\\0 & (\alpha\neq\beta\text{ 或 }i\neq j)\end{cases}\tag{5.4.3}$$

例 5.4.2 令 $P(x)=\sum_{j=1}^n\sum_{|\alpha|=k}a_{\alpha j}x^\alpha e_j,Q(x)=\sum_{j=1}^n\sum_{|\beta|=k}b_{\beta j}x^\beta e_j$，有

$$<P(x),Q(x)>=\sum_{j=1}^n\sum_{|\alpha|=k}a_{\alpha j}b_{\alpha j}\cdot\alpha!\tag{5.3.4}$$

定理 5.4.1 对任意 $k\geqslant0$，考虑内积 $<,>$，算子 $ad_A^k\cdot$ 就是 ad_A^k 的共轭算子 $ad_A^{k^*}$，其中

$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的共轭算子。

推论 5.4.1　对任意 $k\geqslant 2$，H_n^k 中的 Ker $ad_A^k\cdot$ 就是 H_n^k 中 Imad_A^k 的补集。

由于 Ker$ad_A^k\cdot$ 是线性偏微分方程系统的 k 阶齐次多项式的解空间：$ad_A^k\cdot F(x)=0$，因此不用矩阵计算就可得到 Im ad_A^k 的补子空间；另一方面，对任意 $k\geqslant 2$，线性偏微分方程系统是相同的，因此可以通过解同一系统 $ad_A^k\cdot F(x)$ 的形式幂级数（或者多项式）的解得到规范形（或可达任意阶的 A-规范形）。

例 5.4.3　令　$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，有

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

Ker $ad_A^k\cdot$ 是线性偏微分方程系统的多项式的解空间：

$$\left.\begin{aligned}x_1\frac{\partial F_1}{\partial x_2}+x_2\frac{\partial F_1}{\partial x_3}=0\\ x_1\frac{\partial F_2}{\partial x_2}+x_2\frac{\partial F_2}{\partial x_3}=0\\ x_1\frac{\partial F_3}{\partial x_2}+x_2\frac{\partial F_3}{\partial x_3}=0\end{aligned}\right\}\tag{5.4.5}$$

式(5.4.5)的第一个式子的两个独立的一次积分为 $p_1=x_1$ 和 $p_2=x_2^2-2x_1x_3$，基本自变量表明 F_1 是 x_1 和 $x_2^2-2x_1x_3$ 组成的多项式，写作 $F_1=x_1\phi_1(p_1,p_2)+\psi_1(p_2)$，其中 ϕ_1、ψ_1 为多项式，由于 F_2 可表示为特解 $x_2\phi_1(p_1,p_2)+x_2\psi_1(p_2)/x_1$ 加上式(5.4.5)的第一个式子的通解，而且 F_2 是一个多项式，因此可知 $\psi_1\equiv 0$。

进一步讨论可得到：

$$\begin{aligned}F_1&=x_1\phi_1(x_1,x_2^2-2x_1x_3)\\F_2&=x_2\phi_1(x_1,x_2^2-2x_1x_3)+x_1\phi_2(x_1,x_2^2-2x_1x_3)\\F_3&=x_3\phi_1(x_1,x_2^2-2x_1x_3)+x_2\phi_2(x_1,x_2^2-2x_1x_3)+\phi_3(x_1,x_2^2-2x_1x_3)\end{aligned}$$

其中 $\phi_i(i=1,2,3)$ 是自变量的任意多项式。

因此 A-规范形（$r\geqslant 2$）为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2+x_1\phi_1(x_1,x_2^2-2x_1x_3)\\ \dot{x}_2&=x_3+x_2\phi_1(x_1,x_2^2-2x_1x_3)+x_1\phi_2(x_1,x_2^2-2x_1x_3)\\ \dot{x}_3&=x_3\phi_1(x_1,x_2^2-2x_1x_3)+x_2\phi_2(x_1,x_2^2-2x_1x_3)+\phi_3(x_1,x_2^2-2x_1x_3)\end{aligned}\right\}\tag{5.4.6}$$

其中 $\phi_i(i=1,2,3)$ 是任意多项式使得 $x_3\phi_1$、$x_2\phi_2$ 和 ϕ_3 为 x_1、x_2、x_3 的多项式，其幂次数小于 $r+1$，且无常数项和线性项。

注释 5.4.1 通常要找到一个线性偏微分方程系统的全部多项式解很不容易，建议读者参考文献(Elphick，1987 和 Wang，1988)。其中一个难点就是在一些算例中，所有线性独立的多项式的一次积分通过常见的多项式运算不能生成一个齐次线性偏微分方程的所有的多项式解空间，因此不得不去找更多的多项式一次积分(见例 5.5.3)。

5.5 李代数法

为了避免大量的矩阵运算，Cushman 和 Sanders 将李代数 $sl(2,\mathbf{R})$的表示论运用到规范形理论中来。根据这种方法，得到具有幂零线性部分系统的规范形被简化为寻找一个标量齐次线性偏微分方程的多项式的解，详见文献(Wang，1988；Cushman，1985；Cushman，1983)。

$$sl(2,\mathbf{R})=\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{2\times 2}\,\middle|\, a+d=0\right\} \tag{5.5.1}$$

用李括号[，]定义$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in sl(2,\mathbf{R})$。

易见$\{sl(2,\mathbf{R}),[,]\}$是李代数，取 $sl(2,\mathbf{R})$的标准生成元：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{Y}&=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{T}&=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{5.5.2}$$

满足下面的关系：

$$\left.\begin{aligned}[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]&=\boldsymbol{T}\\ [\boldsymbol{T},\boldsymbol{X}]&=2\boldsymbol{X}\\ [\boldsymbol{T},\boldsymbol{Y}]&=-2\boldsymbol{Y}\end{aligned}\right\} \tag{5.5.3}$$

现在，令 V 为有限维向量空间，$gl(V)$为 V 上所有线性转换的空间，用定义 $sl(2,\mathbf{R})$相同的方法在 $gl(V)$上定义[，]。

定义 5.5.1 如果对于任意的 $A,B\in sl(2,\mathbf{R})$，$\rho([\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}])=[\rho(\boldsymbol{A}),\rho(\boldsymbol{B})]$，则称线性图 $\rho: sl(2,\mathbf{R})\to gl(\boldsymbol{V})$为在 V 上 $sl(2,\mathbf{R})$表示。

命题 5.5.1 $sl(2,\mathbf{R})$的标准生成元，满足关系式

$$[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]=\boldsymbol{T},[\boldsymbol{T},\boldsymbol{X}]=2\boldsymbol{X},[\boldsymbol{T},\boldsymbol{Y}]=-2\boldsymbol{Y}$$

令 $\boldsymbol{\rho}$ 为有限维向量空间 $\boldsymbol{V}$ 上的 $sl(2,\mathbf{R})$表示，则有：

①$\rho(\boldsymbol{T})$是半单的，其特征值为整数；

②如果 $v\in V$ 是 $\rho(\boldsymbol{T})$的特征值 m 所对应的特征向量，则 $\rho(\boldsymbol{X})v$ 要么为零，要么为 $\rho(\boldsymbol{T})$的特征值 $m+2$ 所对应的特征向量，$\rho(\boldsymbol{Y})v$ 要么为零，要么为 $\rho(\boldsymbol{T})$的特征值 $m-2$ 所对应的特征向量；

③如果 v 是阶数 m 的本原向量，即 $v\in\mathrm{Ker}\ \rho(\boldsymbol{X})$ 和 v 是 $\rho(\boldsymbol{T})$ 的特征值 m 所对应的一个特征向量，则 m 一定是一个非负整数，且 $\rho(\boldsymbol{Y})^j v\neq 0(1\leqslant j\leqslant m)$，$\rho(\boldsymbol{Y})^{m+1}v=0$；

④基 $\mathrm{Ker}\ \rho(\boldsymbol{X})$ 可以选择以使得它只包括本原向量；

⑤如果 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 是 $\mathrm{Ker}\ \rho(\boldsymbol{X})$ 的一个基，其中 v_i 为阶数 $m_i(i=1,\cdots,s)$ 的本原向量，那么 $\{v_1,\rho(\boldsymbol{Y})v_1,\cdots,\rho(\boldsymbol{Y})^{m_1}v_1,\cdots,v_s,\rho(\boldsymbol{Y})v_s,\cdots,\rho(\boldsymbol{Y})^{m_s}v_s\}$ 是向量空间 V 的一个基，因此 $\dim V=\sum_{i=1}^{s}(m_i+1)$；

⑥$V=\mathrm{Ker}\ \rho(\boldsymbol{X})\oplus\mathrm{Im}\ \rho(\boldsymbol{Y})=\mathrm{Ker}\ \rho(\boldsymbol{Y})\oplus\mathrm{Im}\ \rho(\boldsymbol{X})$。

该命题的证明可参见 P. Griffiths 和 J. Harris 所写的《代数几何学原理》一书。

定理 5.5.1　对任意 $n\times n$ 非平凡幂零矩阵 $\boldsymbol{N}$ 存在 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{H}$，使得

$$[\boldsymbol{N},\boldsymbol{M}]=\boldsymbol{H},[\boldsymbol{H},\boldsymbol{N}]=2\boldsymbol{N},[\boldsymbol{H},\boldsymbol{M}]=-2\boldsymbol{M}$$

其中对任意两个 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 被定义为 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$，因此共轭 $\{\boldsymbol{N},\boldsymbol{M},\boldsymbol{H}\}$ 与李代数 $sl(2,\mathbf{R})$ 是同构的。

在注释中指出幂零矩阵 $\boldsymbol{N}$ 为上约当规范形，而 $\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{H}$ 为

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}_1 & & & \\ & \boldsymbol{N}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{N}_s\end{bmatrix},\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_1 & & & \\ & \boldsymbol{M}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{M}_s\end{bmatrix},\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_1 & & & \\ & \boldsymbol{H}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{H}_s\end{bmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{N}_i=\begin{bmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1\\ & & & & 0\end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$$

$$\boldsymbol{M}_i=\begin{bmatrix}0 & & & & \\ (n_i-1) & 0 & & & \\ & 2(n_i-2) & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & (n_i-1) & 0\end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$$

$$\boldsymbol{H}_i=\begin{bmatrix}(n_i-1) & & & & \\ & (n_i-3) & & & \\ & & (n_i-5) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -(n_i-1)\end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$$

$i=1,\cdots,s,n_1+\cdots+n_s=n$ 且至少 $n_i\geqslant 2$。

令线性图 $\rho_1^k:\text{span}\{N,M,H\}\to gl\{H_n^k\}$ 使得

$$\rho_1^k(N)=ad_M^k,\rho_1^k(M)=ad_N^k,\rho_1^k(H)=ad_H^k$$

其中 $gl(H_n^k)$ 是所有在 H_n^k 上的线性变换组成的空间，$k\geqslant 0$。

定理 5.5.2 ρ_1^k 是 H_n^k 上的 $sl(2,\mathbf{R})$ 表示，且对任意 $k\geqslant 0$，有 $\text{Ker } ad_M^k\oplus\text{Im } ad_N^k=H_n^k$。

$\text{Ker } ad_M^k$ 是线性偏微分方程系统 $ad_M V(x)=0$ 的所有 k 阶齐次多项式的解组成的空间，$\text{Ker } ad_M^k$ 的维数可用命题 5.5.1⑤进行检测：令 $V_1,\cdots,V_s$ 为 $ad_M^k V(x)=0$ 的线性独立的 k 阶齐次多项式的解，V_i 为 ad_H 对应于特征值 $m_i(i=1,\cdots,s)$ 的特征向量；$\{V_1,\cdots,V_s\}$ 是 $\text{Ker } ad_M^k$ 的一个基当且仅当 $\sum_{i=1}^{s}(m_i+1)=\dim H_n^k=n\begin{bmatrix}n+k-1\\ n-1\end{bmatrix}$。同时，可以从该系统的一个标量齐次线性偏微分方程的多项式的解中构造偏微分方程系统 $ad_M V(x)=0$ 的矢量值多项式的解。为此引入线性算子 $L_A:P(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})\to P(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$，定义为

$$L_A p(x)=(Ax,\nabla p(x),p(x))\in P(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}) \tag{5.5.4}$$

其中 $P(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$ 是 n 个变量的所有标量多项式组成的线性空间，$\nabla p(x)$ 是 $p(x)$ 的梯度，$(,)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的通用内积，然后齐次方程 $L_M p(x)=0$ 是系统 $ad_M V(x)=0$ 的方程之一。令 P_n^k 为 n 个变量 k 阶中所有标量齐次多项式组成的线性空间，然后对任意 $k\geqslant 0$，定义线性算子 $L_A^k\Big|_{P_n^k}$。

定义 5.5.2 $p(x)\in\text{Ker } L_M$ 称为 m 阶的一个本原多项式，如果 $p(x)$ 也是特征值 m 的一个特征向量 L_H；$V(x)\in\text{Ker } ad_M$ 称为 m 阶的一个本原矢量值多项式，如果 $V(x)$ 也是特征值 m 的特征向量 ad_H。

引理 5.5.1 假设矩阵 N 和 M 只有一个约当块，令 p 为 m 阶的一个本原多项式，用 $v_{n-k}=p$ 和 $v_{n-k+j}=\beta_j(L_N)^j p(1\leqslant j\leqslant k)$ 定义

$$V_p=[0\quad\cdots\quad 0\quad v_{n-k}\quad\cdots\quad v_n]^{\mathrm{T}}\quad(0\leqslant k\leqslant\min(m,n-1)) \tag{5.5.5}$$

其中

$$\beta_j=\frac{k!}{(n-k-1)!\ m!}\cdot\frac{(n-k-1+j)!\ (m-j)!}{(k-j)!\ j!}\quad(1\leqslant j\leqslant k)$$

然后 V_p 是 $m+n-2k-1$ 阶的一个本原矢量值多项式。

注释 5.5.1 引理 5.5.1 能够扩展为矩阵 N 和 M 有不只一个约当块的算例，令 $M=(M_1,M_2,\cdots,M_s)$，其中 M_i 的大小是 $n_i:n_1+\cdots+n_s=n$，在 $n=n_i$ 算例中令 $(v_{i1},\cdots,v_{in_i})$ 为根据引理 5.5.1 从本原多项式生成的向量，然后

$$V=[0\quad\cdots\quad 0\quad v_{i1}\quad\cdots\quad v_{in_i}\quad 0\quad\cdots\quad 0)^{\mathrm{T}}\in\text{Ker } ad_M$$

其中 v_{i1} 是 V 中的第 $(n_1+\cdots+n_{i-1}+1)$ 项元素。

定理 5.5.3　利用引理 5.5.1 和注释 5.5.1 引用的方法，Ker ad_M 中的任意矢量值多项式可表示为有限数目的用本原多项式构造的本原矢量值多项式的线性组合。

证明可参见文献(Wang,1988)。

现在研究 Ker ad_M 的结构。

令线性图 $\boldsymbol{\rho}_2^k$:span $\{N, M, H\} \to gl\{P_n^k\}$ 使得

$$\rho_2^k(N) = L_M^k \rho_2^k(M) = L_N^k, \rho_2^k(H) = L_H^k$$

其中 $gl(P_n^k)$是所有在 P_n^k 上的线性变换组成的空间，$k \geqslant 0$。

定理 5.5.4　ρ_2^k 是 P_n^k 上的 $sl(2,\mathbf{R})$表示，且对任意 $k \geqslant 0$，有 Ker $L_M^k \oplus \mathrm{Im} L_N^k = P_n^k$。

Ker L_M^k 是线性偏微分方程 $L_M p(x) = 0$ 的所有 k 阶齐次多项式的解组成的子空间，Ker L_M^k 的维数可用命题 5.5.1⑤进行检测：令 $p_1, \cdots, p_s$ 为线性独立的 k 阶齐次本原多项式，其阶数为 $m_i, i = 1, \cdots, s$；$\{p_1, \cdots, p_s\}$ 是 Ker L_M^k 的一个基当且仅当 $\sum_{i=1}^{s}(m_i + 1) = \dim P_n^k = \begin{bmatrix} n+k-1 \\ n-1 \end{bmatrix}$。

如果已发现 k 阶线性独立的齐次本原多项式的一组集合，就可利用引理 5.5.1 和注释 5.5.1 介绍的方法，构造 k 阶齐次本原矢量值多项式，然后给出第 k 阶项的规范形(用 dim Ker ad_M^k检测)，下面举例说明。

例 5.5.1　令 $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$和

$$L_N = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$L_M = 2x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + 2x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$L_H = 2x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - 2x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

偏微分方程 $L_M p = 0$ 的两个线性独立的一次积分为 $p_1 = x_1$ 和 $p_2 = x_2^2 - 2x_1 x_3$，可分别用 2 阶和 0 阶来检验它们是否为本原多项式，那么 p_1^2 和 p_2 在 Ker L_M^2 上，p_1^2 是 4 阶的本原多项式。根据命题 5.5.1⑤，将 L_N 重复作用于 p_1^2 和 p_2，可得到在 p_3^2 上的 $(4+1)+(0+1) = 6$ 的线性独立多项式，注意到 $p_3^2 = 6$，因此 $\{p_1^2, p_2\}$ 是 Ker L_M^2 的一个基。根据引理 5.5.1，可得到

$$V_1 = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \\ x_1 x_3 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1^2 \\ x_1 x_3 \end{bmatrix}, V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1^2 \end{bmatrix}, V_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2^2 - 2x_1 x_3 \end{bmatrix}$$

其中 ad_H 特征值分别是 2、4、6 和 2，易知 $V_1,\cdots,V_4$ 是线性独立的，L_N 重复作用于其上，可得到在 H_3^2 上的 $(2+1)+(4+1)+(6+1)+(2+1)=18$ 的线性独立的矢量值多项式，$\dim H_3^2=18$，$V_1,\cdots,V_4$ 是 Ker ad_M^2 的一个基，因此可达 2 阶的 A-规范形是

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ x_3\\ 0\end{bmatrix}+a\begin{bmatrix}x_1^2\\ x_1x_2\\ x_1x_3\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\ x_1^2\\ x_1x_3\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\ 0\\ x_1^2\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0\\ 0\\ x_2^2-2x_1x_3\end{bmatrix}$$

其中 a、b、c、d 是实常数。

为了引入发现 Ker ad_M 生成元的方法以便得到规范形，需要了解 Ker L_M 和 Ker ad_M 的代数结构。

定理 5.5.5 Ker $L_M=\bigoplus_{k\geqslant 0}$Ker L_M^k 是与常见多项式乘法相关的分次代数，Ker $ad_M=\bigoplus_{k\geqslant 0}$Ker ad_M^k 是与常见多项式乘法相关的分次 Ker L_M 模。

读者可在 T.A.Springer 所著的《不变量理论》一书中，找到分次代数和分次模的定义。

令 $p_i(x)\in$Ker $L_M^k(k_i\geqslant 1)$是 m_i 阶$(i=1,\cdots,s)$的本原多项式，如果 $p_1(x),\cdots,p_s(x)$是代数独立的，即在 s 个变量中没有非平凡多项式 f，使得对 $x\in\mathbf{R}^n$ 有 $f(p_1(x),\cdots,p_s(x))\equiv 0$，然后根据集合$\{p_1(x),\cdots,p_s(x)\}$定义生成函数为

$$T(u,t)=\frac{1}{\prod_{i=1}^{s}(1-u^{m_i}t^{k_i})} \tag{5.5.6}$$

定理 5.5.6 令 $p_1(x),\cdots,p_s(x)$为代数独立的非常数齐次本原多项式，则 $p_1(x),\cdots,p_s(x)$是 Ker L_M 生成元当且仅当对应的生成函数 $T(u,t)$满足

$$\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{u=1}uT(u,t)=\frac{1}{(1-t)^n} \tag{5.5.7}$$

当条件满足时

$$\text{Ker } L_M=\{f(p_1(x),\cdots,p_s(x))\mid f\text{ 为 }s\text{ 元任意多项式}\}。$$

假设 $p_i(x)\in$Ker $L_M^k(k_i\geqslant 1)$是 m_i 阶$(i=1,\cdots,s)$的本原多项式，$p_1(x),\cdots,p_s(x)$是代数独立的。令 $V_j(x)\in$Ker ad_M^l 是 n_j 阶$(j=1,\cdots,w)$的本原矢量值多项式，如果在 s 个变量中对任意多项式 $f_j(1\leqslant j\leqslant w)$(并非所有的平凡多项式)有

$$\sum_{j=1}^{w}f(p_1(x),\cdots,p_s(x))\cdot V_j(x)\not\equiv 0$$

就可以说集合$\{V_1(x),\cdots,V_w(x)\}$是关于$\{p_1(x),\cdots,p_s(x)\}$代数独立的，那么就定义与$\{p_1(x),\cdots,p_s(x)\}$相联系、与集合$\{V_1(x),\cdots,V_w(x)\}$相对应的生成函数为

$$G(u,t)=\frac{\sum_{j=1}^{w}u^{n_j}t^{l_j}}{\prod_{i=1}^{n}(1-u^{m_i}t^{k_i})} \tag{5.5.8}$$

定理 5.5.7　假设 $p_1(x),\cdots,p_s(x)$是代数独立的 Ker L_M 生成元，每一个 $p_i(x)$都是非常数齐次本原多项式，$i=1,\cdots,s$；$V_1(x),\cdots,V_w(x)$是齐次本原矢量值多项式，集合 $\{V_1(x),\cdots,V_w(x)\}$是关于$\{p_1(x),\cdots,p_s(x)\}$代数独立的，则 $V_1(x),\cdots,V_w(x)$是 Ker ad_M 生成元当且仅当对应的生成函数 $G(u,t)$满足

$$\left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_{u=1} uG(u,t)=\frac{n}{(1-t)^n} \tag{5.5.9}$$

当条件满足时

$$\text{Ker } ad_M=\left\{\sum_{j=1}^{w} f_j(p_1(x),\cdots,p_s(x))\cdot V_j(x)\,|\,f_j \text{ 为任意 } s \text{ 元多项式},1\leqslant j\leqslant w\right\}$$

注释 5.5.2　在定理 5.5.6 和 5.5.7 中，函数$\frac{1}{(1-t)^n}$和$\frac{n}{(1-t)^n}$分别是分次模 $P(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$和 $P(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$的庞加莱级数，庞加莱级数如下定义：令 $M=\bigoplus_{k\geqslant 0} M_k$ 为分次模，有 $P(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(\dim M_k)t^k$ 被称为 M 的庞加莱级数。庞加莱级数的系数是子空间 $M_k(k\geqslant 0)$的维数。定理 5.5.6(或者 5.5.7)证明的关键点是(Wang,1988)：通过常规的多项式运算，由 $p_1,\cdots,p_s$(从 $p_1,\cdots,p_s$ 和 $V_1,\cdots,V_w$)生成的所有 k 阶齐次多项式(矢量值多项式)组成的空间 $S^k(\boldsymbol{T}^k)$，是 Ker L_M^k($Ker ad_M^k$)的子空间(见定理 5.5.5)。引理 5.3.1 和定理 5.3.1 说明对任意 $k\geqslant 0$，$S^k(\boldsymbol{T}^k$ 的维数等于 Ker L_M^k(Ker ad_M^k)的维数，因此 Ker L_M(Ker ad_M)是由 $p_1,\cdots,p_s(V_1,\cdots,V_w)$生成的，即 Ker L_M 的任一元素可以表示为 $p_1,\cdots,p_s$ 的多项式(Ker ad_M 的任一元素可表示为由以 $p_1,\cdots,p_s$ 作为系数的多项式 $V_1,\cdots,V_w$ 的线性组合)。

例 5.5.2　重新考虑例 5.5.1，$\{p_1,p_2\}$对应的生成函数为 $T(u,t)=\frac{1}{(1-u^2t)(1-t^2)}$，由于$\left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_{u=1} uT(u,t)=\frac{1}{(1-t)^3}$，$p_1$、$p_2$ 是定理 5.5.6 的 Ker L_M 生成元，运用引理 5.5.1 所给公式，可得到从 1 到 p_1 的本原矢量值多项式

$$\boldsymbol{V}_1=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\boldsymbol{V}_2=\begin{bmatrix}0\\x_1\\x_2\end{bmatrix},\boldsymbol{V}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

易见 $\boldsymbol{V}_1$、$\boldsymbol{V}_2$、$\boldsymbol{V}_3$ 是有关 p_1、p_2 代数独立的，$\boldsymbol{V}_1$、$\boldsymbol{V}_2$、$\boldsymbol{V}_3$ 的 ad_H 特征值分别是 2、0、2，对应的生成函数为

$$G(u,t)=\frac{u^2t+t+t^2}{(1-u^2t)(1-t^2)}$$

由于$\left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_{u=1} uG(u,t)=\frac{3}{(1-t)^3}$，$V_1$、$V_2$、$V_3$ 是 Ker ad_M 生成元，因此 r 阶($r\geqslant 2$)A-规范形为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ x_3\\ 0\end{bmatrix}+f_1(p_1,p_2)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+f_2(p_1,p_2)\begin{bmatrix}0\\ x_1\\ x_2\end{bmatrix}+f_3(p_1,p_2)\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \tag{5.5.10}$$

其中 $p_1=x_1$ 和 $p_2=x_2^2-2x_1x_3$，f_i 在自变量中为多项式使得阶数小于 $r+1$ 时，$x_1f_1(p_1,p_2)$、$x_1f_2(p_1,p_2)$、$f_3(p_1,p_2)$是 x_1、x_2、x_3 的多项式，且没有常数和线性项，r 可以是任意整数($\geqslant 2$)。

下面讨论 Ker L_M 或 Ker ad_M 生成元不是代数独立的算例，详细情况可查阅文献(Wang, 1988)。

定义 5.5.3 集合$\{q_1(x),\cdots,q_w(x)\}\subset P(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$(或 $P(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$)系列称为关于$\{(p_{i1}(x),\cdots,p_{is_i}(x)),i=1,\cdots,w\}$的条件代数独立，其中$\{(p_{i1}(x),\cdots,p_{is_i}(x)),i=1,\cdots,w\}\subset P(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$，如果并非所有的平凡多项式 f_i 为 $s_i(1\leqslant i\leqslant w)$个变量时

$$\sum_{i=1}^{w}q_i(x)f_i(p_{i1}(x),\cdots,p_{is_i}(x))\not\equiv 0,x\in\mathbf{R}^n \tag{5.5.11}$$

令 $q_i\in\text{Ker }L_M^{l_i}$ 或 Ker $ad_M^{l_i}$ 为 n_i 阶($i=1,\cdots,w$)的本原多项式(本原矢量值多项式)，如果 q_1，$\cdots$，q_w 关于$\{(p_{i1}(x),\cdots,p_{is_i}(x)),i=1,\cdots,w\}$条件代数独立，其中 $p_{ij}\in\text{Ker }L_M^{k_{ij}}(k_{ij}\geqslant 1)$为所有 i、j 的 m_{ij}的本原多项式，则将与$\{(p_{i1}(x),\cdots,p_{is_i}(x)),i=1,\cdots,w\}$相关的对应于集合$\{q_1,\cdots,q_w\}$的生成函数定义为

$$T(u,t)(G(u,t))=\sum_{i=1}^{w}\frac{u^{n_i}t^{l_i}}{\prod_{j=1}^{s_i}(1-u^{m_{ij}}t^{k_{ij}})} \tag{5.5.12}$$

定理 5.5.8 令 $p_i\in\text{Ker }L_M^{k_i}(k_i\geqslant 1)$为 m_i 阶($i=1,\cdots,s$)的本原多项式，$q_j(x)=p_1(x)^{a_{j1}}\cdots p_s(x)^{a_{js}}$($j=1,\cdots,w$，$a_{jk}$为非负整数)，假设集合$\{q_1,\cdots,q_w\}$是关于$\{(p_{i1},\cdots,p_{is_i})\subseteq(p_1,\cdots,p_s),i=1,\cdots,w\}$条件代数独立的，则 $p_1,\cdots,p_s$ 是 Ker L_M 生成元，且Ker $L_M=\left\{\sum_{i=1}^{w}q_i(x)f_i(p_{i1}(x),\cdots,p_{is_i}(x))\middle|f_i\right.$ 为任意 s_i 元多项式，$\left.i=1,\cdots,w\right\}$当且仅当对应的生成函数 $T(u,t)$满足

$$\left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_{u=1}uT(u,t)=\frac{n}{(1-t)^n} \tag{5.5.13}$$

定理 5.5.9 令 $p_i\in\text{Ker }L_M^{k_i}(k_i\geqslant 1)$为 m_i 阶($i=1,\cdots,s$)的 Ker L_M 本原多项式，$V_j\in$ Ker $ad_M^{l_j}$为 n_j 阶($j=1,\cdots,w$)的本原矢量值多项式，假设集合$\{V_1,\cdots,V_w\}$是关于$\{(p_{i1},\cdots,p_{is_i})\subseteq(p_1,\cdots,p_s),i=1,\cdots,w\}$条件代数独立的，则 $V_1,\cdots,V_w$ 是 Ker ad_M 生成元，且

Ker $ad_M=\left\{\sum_{i=1}^{w}f_i(p_{i1}(x),\cdots,p_{is_i}(x))\cdot V_i(x)\middle|f_i\right.$ 为任意 s_i 元多项式，$\left.i=1,\cdots,w\right\}$当且仅当

对应的生成函数 $G(u,t)$ 满足

$$\left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_{u=1} uG(u,t)=\frac{n}{(1-t)^n} \tag{5.5.14}$$

注释 5.5.3　为了找到 Ker L_M 生成元，首先要找到齐次偏微分方程 $L_M p(x)=0$ 的线性独立的一次积分多项式，有些多项式很容易找到，而有些则很难找到，有两种方法去寻找，第一种方法是 Cushman(1985) 中给出的：如果 p、q 都是 $L_M p(x)=0$ 的一次积分，则 $\{p,q\}\equiv L_H pL_N q-L_N pL_H q$ 要么为零，要么是 $L_M p(x)=0$ 的一次积分，但不知道 p、q 和 $\{p,q\}$ 是否为代数独立；第二种方法是用待定系数法去计算某些特定阶数的本原多项式。用下面的例子说明这两种方法。

例 5.5.3　$N=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

可得到(见定理 5.5.1 后的注释)

$$M=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\3&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&3&0\end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix}3&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-3\end{bmatrix}$$

有

$$L_N=x_2\frac{\partial}{\partial x_1}+x_3\frac{\partial}{\partial x_2}+x_4\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$L_M=3x_1\frac{\partial}{\partial x_2}+4x_2\frac{\partial}{\partial x_3}+3x_3\frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$L_H=3x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}-x_3\frac{\partial}{\partial x_3}-3x_4\frac{\partial}{\partial x_4}$$

易知 $p_1=x_1$ 和 $p_2=2x_2^2-3x_1x_3$ 是 $L_M p(x)=0$ 的线性独立的一次积分，从注释 5.5.3 可知，$p_3=\{p_1,p_2\}=9x_1^2x_4-9x_1x_2x_3+4x_2^2$ 也是 $L_M p(x)=0$ 的一个一次积分，不难看出 p_1、p_2、p_3 是代数独立的且分别是阶数为 3、2、3 的本原多项式。

对应于 $\{p_1,p_2,p_3\}$ 的生成函数为

$$T(u,t)=\frac{1}{(1-u^3t)(1-u^2t^2)(1-u^3t^3)}$$

计算表明

$$\left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_{u=1} uT(u,t)\neq\frac{1}{(1-t)^4}$$

应用定理 5.5.6，p_1、p_2、p_3 不能生成整个 Ker L_M，因此不得不寻找其他的本原多项式。

所有从 p_1 和 p_2 生成的二阶齐次本原多项式为 p_1^2 和 p_2，其 L_H 特征值分别为 6 和 2，由

命题 5.5.1⑤,将 L_N 反复作用于其特征值,可得到 2 次的$(6+1)+(2+1)=10$ 个线性独立多项式。由于 $\dim P_4^2=10$,p_1 和 p_2 就生成了所有的 $\mathrm{Ker}\ L_M^2$,同理可检测到 p_1、p_2、p_3 生成了所有的 $\mathrm{Ker}\ L_M^3$。现在检测第 4 次,所有从 p_1、p_2、p_3 生成的第 4 次齐次本原多项式为 p_1^4、$p_1^2p_2$、p_1p_3 和 p_2^2,其 L_H 特征值分别为 12、8、6 和 4,将 L_N 反复作用于其特征值,可得到 4 次的$(12+1)+(8+1)+(6+1)+(4+1)=34$ 个线性独立多项式,但 $\dim P_4^4=35$,因此需要找到 P_4^4 上的一个 0 阶本原多项式。由于

$$L_H x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}x_4^{\alpha_4}=(3\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-3\alpha_4)x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}x_4^{\alpha_4}$$

L_H 在 P_4^4 上的 0 特征子空间的一个基是$(x_1^2,x_4^2,x_1x_2x_3x_4,x_1x_3^3,x_2^3x_4,x_2^2x_3^2)$,运用待定系数法可以发现 $p_4=9x_1^2x_4^2-18x_1x_2x_3x_4+6x_1x_3^3+8x_2^3x_4-3x_2^2x_3^2\in\mathrm{Ker}\ L_M$ 为一个 0 阶本原多项式。但 p_1、p_2、p_3、p_4 不再是线性独立的,可以发现它们有一个关系:$p_3^2=2p_2^3+9p_1^2p_4$。可以证明$\{1,p_3\}$是关于$\{(p_1,p_2,p_4),i=1,2\}$条件代数独立的,与$\{(p_1,p_2,p_4),i=1,2\}$相关的,对应于集合$\{1,p_3\}$的生成函数为

$$T(u,t)=\frac{1+u^3t^3}{(1-u^3t)(1-u^2t^2)(1-t^4)}$$

由于$\left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_{u=1}uT(u,t)=\frac{1}{(1-t)^4}$,$p_1$、$p_2$、$p_3$、$p_4$ 生成 $\mathrm{Ker}\ L_M$,注意到 p_1、p_3 和 p_2^2 的 L_H 特征值分别为 3、3 和 4,因此以 p_1、p_3 和 p_2^2 为第一成分构造本原矢量值多项式,得到下面的 V_1、V_4、V_{11}。实际上对于某些多项式 f_1、f_2、f_3,任意本原矢量值多项式的第一成分均可表示为

$$p_1f_1(p_1,p_2,p_4)+p_3f_2(p_1,p_2,p_4)+p_2^2f_3(p_2,p_4)$$

没有必要将本原多项式作为第一成分来构造其他本原矢量值多项式。同理将 p_1、p_2、p_3 作为第二和第三成分来构造本原矢量值多项式 $\boldsymbol{V}_2$、$\boldsymbol{V}_3$、$\boldsymbol{V}_5$、$\boldsymbol{V}_6$、$\boldsymbol{V}_9$、$\boldsymbol{V}_{10}$。如果前三成分均为零,则对某些多项式 f_1、f_2 任意本原矢量值多项式的第四成分可表示为 $p_3f_1(p_1,p_2,p_4)+f_2(p_1,p_2,p_4)$,就以 p_3 作为第四成分分别构造了本原矢量值多项式 $\boldsymbol{V}_7$、$\boldsymbol{V}_8$,可以得到:

$$\boldsymbol{V}_1=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix},\boldsymbol{V}_2=\begin{bmatrix}0\\3x_1\\4x_2\\3x_3\end{bmatrix},\boldsymbol{V}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V}_4=\begin{bmatrix}9x_1^2x_4-9x_1x_2x_3+4x_2^3\\9x_1x_2x_4-9x_1x_3+3x_2^2x_3\\-9x_1x_3x_4-3x_2x_3+12x_2^2x_4\\9x_2x_3x_4-3x_3^3-9x_1x_4^2\end{bmatrix},\boldsymbol{V}_5=\begin{bmatrix}0\\9x_1^2x_4-9x_1x_2x_3+4x_2^3\\12x_1x_2x_4-12x_1x_3+4x_2^2x_3\\-9x_1x_3x_4-3x_2x_3^2+12x_2^2x_4\end{bmatrix}$$

$$V_6=\begin{bmatrix}0\\0\\9x_1^2x_4-9x_1x_2x_3+4x_2^3\\9x_1x_2x_4-9x_1x_3^2+3x_2^2x_3\end{bmatrix},V_7=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\9x_1^2x_4-9x_1x_2x_3+4x_2^3\end{bmatrix}$$

$$V_8=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},V_9=\begin{bmatrix}0\\2x_2^2-3x_1x_3\\2x_2x_3-6x_1x_4\\3x_3^2-6x_2x_4\end{bmatrix},V_{10}=\begin{bmatrix}0\\0\\2x_2^2-3x_1x_3\\x_2x_3-3x_1x_4\end{bmatrix}$$

$$V_{11}=\begin{bmatrix}2(2x_2^2-3x_1x_3)^2\\6x_2^3x_3-18x_1x_2^2x_4-9x_1x_2x_3^2+27x_1^2x_3x_4\\-8x_2^3x_4+6x_2^2x_3^2+18x_1^2x_4^2-6x_1x_3^3\\-6x_2^2x_3x_4+18x_1x_2x_4^2+3x_2^2x_3^2-9x_1x_3^2x_4\end{bmatrix}$$

检测到 $V_1,\cdots,V_{11}$ 是关于 $\{(p_1,p_2,p_4),i=1,\cdots,8,(p_2,p_4),j=9,10,11\}$ 条件代数独立的，而且 $V_1,\cdots,V_{11}$ 的 ad_H 特征值分别是 0、2、4、0、2、4、6、3、1、3、1，对应的生成函数为

$$G(u,t)=\frac{t(1+u^2+u^4)+t^3(1+u^2+u^4+u^6)+u^3}{(1-u^3t)(1-u^2t^2)(1-t^4)}+\frac{t^2(u+u^3+ut^2)}{(1-u^2t^2)(1-t^4)}$$

由于 $\dfrac{\partial}{\partial u}\Big|_{u=1}uG(u,t)=\dfrac{4}{(1-t)^4}$，$V_1,\cdots,V_{11}$ 生成了整个 Ker L_M，因此一个可达 $r(\geqslant 2)$ 阶的 A-规范形为

$$\dot{x}=Nx+\sum_{i=1}^{8}f_i(p_1,p_2,p_4)V_i+\sum_{j=9}^{11}f_j(p_2,p_4)V_j,x\in\mathbf{R}^4$$

其中 f_i、f_j 为自变量的多项式，使小于 $r+1$ 阶的 x 中每一个 $f_1(p_1,p_2,p_4)V_i$ 或 $f_j(p_2,p_4)V_j$ 为没有常数和线性项的多项式。

注释 5.5.4　李代数方法的优点是：①维数公式（命题 5.5.1⑤）能帮助检查已发现的 Ker L_M^k（或 Ker ad_M^k）中的线性独立的多项式的数目是否与 Ker L_M^k（或 Ker ad_M^k）的维数相等，当不相等时，可得到所需的本原多项式（或本原矢量值多项式）阶数的线索；②解线性偏微分方程组简化到解一个齐次线性偏微分方程；③利用庞加莱级数可得到规范形，但利用庞加莱级数的难点是体现 Ker L_M（或 Ker ad_M）生成元之间的（条件）代数独立关系，例子可见文献（Cushman，1987）；④如果只需较低阶数的规范形，就不用检查庞加莱级数，实际上如果已发现 $L_Mp(x)=0$ 的一些一次积分，它们就生成了整个 Ker ad_M 空间（可用命题 5.5.1⑤进行检查，见例 5.5.1），则就可得到高达 r 阶的规范形。

5.6　计算高阶规范形的周期平均法

在规范形的计算中，最重要的步骤是接近恒同的变换的选取。通过引入近恒同的非线

性变换，可将原动力系统的方程化简，得到其规范形方程。而对于动力系统的分岔特性，则可直接分析规范形的动力学特性。

源于 Krylov 和 Bogoliubor 变换的平均法，对弱非线性振动系统和线性振子的摄动法是非常有效的。该方法是目前研究分岔问题的一种重要的方法。文献(Wang，1989 和 Han，1996)中已经证明，平均法和规范形方法是等价的，所以，在用平均法计算高阶平均方程时遇到的问题和用规范形法计算高阶的系数时所遇到的问题也是等价的。

对规范形理论，主要有三种基本的方法来计算规范形的系数：矩阵表示法、伴随算子法、李代数法。通常用第一种方法来计算规范形的系数和高阶平均方程，但它很难实现程序化。对于后两种方法，则需要很熟练的数学技巧。文献(Nayfeh，1993 和 Iooss and Adelmeyer，1992)提供了一种方法，通过该方法，在消除永年项的同时可以计算系统的规范形，但是，该方法不适合编程计算。

借助于计算机语言 Mathematica (Wolfram，1991)的帮助，可以减少计算的工作量。本节给出了一个简短而有效的程序(见附录 2)，用来计算高阶平均方程。在一个 16 兆内存的 Pentium133 PC 机上，只需花费 2 min 便可计算一个一般的单自由度非线性振动系统的 2 阶平均方程，而对于 4 阶平均方程的计算，也只需花费 4 min 的时间。用户只需输入方程的几个参数即可。

5.6.1 规范形的李群定义

一般说来，常微分方程的规范形会满足如下同调方程：

$$ad_J f_k^0(\boldsymbol{y}) = 0 \quad (k = 2, \cdots, r) \tag{5.6.1}$$

文献(Van Der Beek，1989 和 Elphick，1987)给出了与方程(5.6.1)等价的另一个规范形定义，称为参数李群定义。选定参数李群

$$\Gamma = \{e^{tJ}, t \in \mathbf{R}\} \tag{5.6.2}$$

则规范形 $f_k^0(y)$关于 Γ 具有对称性，即有

$$f_k^0(e^{tJ}y) = e^{tJ} f_k^0(y) \quad (\forall\, t \in \mathbf{R}, e^{tJ} = I) \tag{5.6.3}$$

式中 I 为单位矩阵，T 为原始周期，并且

$$\begin{aligned}(\partial/\partial t)[e^{-tJ} f^0(e^{tJ}x)] &= -Je^{-tJ} f^0(e^{tJ}x) + e^{-tJ} Df^0(e^{tJ}x) J e^{tJ}x \\ &= e^{-tJ}[Jf^0(e^{tJ}x) - Df^0(e^{tJ}x) J e^{tJ}x] \\ &= -e^{-tJ} ad_J^k f^0(e^{tJ}x) = 0\end{aligned}$$

实际上，上式已做了变换 $y = e^{tJ}x$，又由方程(5.6.1)，得出 $e^{-tJ} f^0(e^{tJ}x) = c$，显然与 t 无关。令 $t = 0$，得到 $c = f^0(x)$和 $e^{-tJ} f^0(e^{tJ}x) = f^0(x)$，即证明了式(5.6.3)。

方程(5.6.1)计算自治系统的规范形，而方程(5.6.3)则用来计算非自治系统的规范形，很明显，$f^0(e^{tJ}x)$是显含时间 t 的。

5.6.2 平均法

与规范形理论相似,平均法也是通过用近恒同坐标变换来简化一个给定系统的常微分方程。一般用传统的规范形方法计算自治系统,但对于非自治系统,则用平均法。利用坐标变换将非自治系统变换为自治系统的过程,称为通过时间变量积分将系统平均化。用平均法所研究和分析的非自治常微分方程的类型如下:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \varepsilon \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, t, \varepsilon), \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^{\rho}, |\varepsilon| \ll 1$$

式中,$h(x,t,\varepsilon)$是以 T 为周期的矢量场。首先,引入以 T 为周期的非自治的变换

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi} + \varepsilon \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{\xi}, t) + \varepsilon^2 \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{\xi}, t) + \cdots + \varepsilon^k \boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{\xi}, t)$$

可以将原动力方程变为直到 k 阶的自治系统

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \varepsilon \bar{\boldsymbol{h}}_1(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 \bar{\boldsymbol{h}}_2(\boldsymbol{\xi}) + \cdots + \varepsilon^k \bar{\boldsymbol{h}}_k(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^{k+1} \mathbf{R}(\boldsymbol{\xi}, t, \varepsilon)$$

忽略上述方程中的非自治部分,则剩余的自治系统是可解的。通过渐近理论,可以知道该方程最终的解可以看作是原始方程的解的近似。

5.6.3 周期平均规范形

假定 $\boldsymbol{J} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\Gamma = \{\mathrm{e}^{t\boldsymbol{J}}, t \in \mathbf{R}\}$ 是由方程(5.6.2)定义的,T 是由方程(5.6.3)定义,考虑下列非线性常微分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{x} + \varepsilon \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \quad (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega} \subset \mathbf{R}^n) \tag{5.6.4}$$

式中,$0 < \varepsilon \ll 1$, $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^{r+1}$ 且 $\boldsymbol{f}(0,\varepsilon) = \boldsymbol{0}$。$\boldsymbol{\Omega}$ 是在 Γ 的定义下包含原点和常量的域,且对任意 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega}$ 满足 $\Gamma \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega}$。作如下变换

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \mathrm{e}^{t\boldsymbol{J}}\boldsymbol{y} \\ \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{J}\mathrm{e}^{t\boldsymbol{J}}\boldsymbol{y} + \mathrm{e}^{t\boldsymbol{J}}\dot{\boldsymbol{y}} \end{aligned}\right\} \tag{5.6.5}$$

将其代入方程(5.6.4),得

$$\mathrm{e}^{t\boldsymbol{J}}\dot{\boldsymbol{y}} = \varepsilon \boldsymbol{f}(\mathrm{e}^{t\boldsymbol{J}}\boldsymbol{y}, \varepsilon)$$

令

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}, t, \varepsilon) = \mathrm{e}^{-t\boldsymbol{J}} \boldsymbol{f}(\mathrm{e}^{t\boldsymbol{J}}\boldsymbol{y}, \varepsilon) \tag{5.6.6}$$

则方程(5.6.4)变为

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \varepsilon \mathrm{e}^{-t\boldsymbol{J}} \boldsymbol{f}(\mathrm{e}^{t\boldsymbol{J}}\boldsymbol{y}, \varepsilon) = \varepsilon \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}, t, \varepsilon) \tag{5.6.7}$$

很明显,方程(5.6.7)显含 t 为非自治系统,而方程(5.6.4)不显含 t。方程(5.6.7)通常用平均法来解,而方程(5.6.4)则是通过规范形理论来计算。方程(5.6.7)表示的周期平均规范形可以根据下面的定理来构建。

定理 5.6.1 利用坐标变换

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\zeta} + \sum_{l=1}^{m} \varepsilon^l \boldsymbol{h}_l(\boldsymbol{\zeta}, t) \tag{5.6.8}$$

由平均法将方程(5.6.7)变换为如下直到 m 阶的规范形形式:

$$\dot{\zeta} = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon^k f_k^0(\zeta) + O(\varepsilon^{m+1}) \tag{5.6.9}$$

其中变换 $h_k(\zeta, t)$为

$$h_k(\zeta, t) = \frac{1}{T}\int_0^T \tau[g_k(\zeta, \tau + t) - f_k^0]\mathrm{d}\tau \tag{5.6.10}$$

$f_k^0(\xi)$的规范形如下：

$$f_k^0(\zeta) = \frac{1}{T}\int_0^T g_k(\zeta, \tau)\mathrm{d}\tau \tag{5.6.11}$$

展开式

$$g_k(\zeta, t) = \frac{1}{(k-1)!}\frac{\partial^{k-1}}{\partial \varepsilon^{k-1}} g\Big(\zeta + \sum_{l=1}^{k-1}\varepsilon^l h_l(\zeta, t), t, \varepsilon\Big)\Big|_{\varepsilon=0} - \sum_{l=1}^{k-1} Dh_{k-1}(\zeta, t) f_l^0(\zeta) \tag{5.6.12}$$

上式的求导运算是关于参数 ζ，且有

$$\left.\begin{aligned} & f_k^0 \in C^{m+1-k}(\Omega, \mathbf{R}^m) \\ & h_k \in C^{m+1-k}(\Omega \times \mathbf{R}, \mathbf{R}^m) \\ & f_k^0(0) = 0 \\ & h_k(0, t) = 0 \\ & h_k(x, t) = h_k(x, t + T) \\ & \forall\, x \in \Omega, t \in \mathbf{R} \end{aligned}\right\} \tag{5.6.13}$$

其中 $g_k(\zeta, t)$、$h_k(\zeta, t)$和 $f_k^0(\zeta)$满足如下时间对称关系：

$$h_k(\mathrm{e}^{tJ}x, t) = \mathrm{e}^{tJ}h_k(x, s + t) \quad (\forall\, s, t \in \mathbf{R}) \tag{5.6.14}$$

$$f_k^0(\mathrm{e}^{tJ}x) = \mathrm{e}^{tJ}f_k^0(x) \quad (\forall\, s \in \mathbf{R}) \tag{5.6.15}$$

$$\mathrm{e}^{-tJ}g_k(\mathrm{e}^{tJ}\zeta, t) = g_k(\zeta, t + \tau) \tag{5.6.16}$$

定理 5.6.1 的证明需要三个步骤。第一步，证明在变换和规范形 h_k、f_k^0 满足所给的情况下，方程(5.6.13)成立；第二步，根据 $\dot{\zeta} = \sum_{k=1}^{m}\varepsilon^k[-\dot{h}_k + g_k] + O(\varepsilon^{m+1})$，忽略 $O(\varepsilon^{m+1})$，证明 g、g_k 的关系；最后，证明 $f_k^0 = -\dot{h}_k + g_k$ 和 f_k^0、h_k、g_k 满足方程(5.6.14)～(5.6.16)的对称关系。下面给出了证明的具体过程。

第一步：将 $y = 0$ 代入到方程(5.6.3)中，有 $f_k^0(0) = \mathrm{e}^{tJ}f_k^0(0)$，因为 e^{tJ}不恒为零，所以 $f_k^0(0) = 0$。将 $y = 0$ 代入方程(5.6.8)，有 $0 = 0 + \sum_{l=1}^{m}\varepsilon^l h_l(0, t)$，所以，$h_l(0, t) = 0$。因为 h_k 是周期为 t 的函数，所以对于变换和规范形 h_k、f_k^0，方程(5.6.13)成立。

第二步：方程(5.6.8) $y = \zeta + \sum_{l=1}^{m}\varepsilon^l h_l(\zeta, t)$对时间 t 求微分，又由方程(5.6.7)，得

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \dot{\boldsymbol{\zeta}} + \sum_{l=1}^{m} \varepsilon^l [\boldsymbol{h}_l'(\boldsymbol{\zeta}, t)\dot{\boldsymbol{\zeta}} + \boldsymbol{h}_l'] = \varepsilon \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}, t, \varepsilon)$$

将 $\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \varepsilon \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}, t, \varepsilon) - \sum_{l=1}^{m} \varepsilon^l [\boldsymbol{h}_l'(\boldsymbol{\zeta}, t)\dot{\boldsymbol{\zeta}} + \dot{\boldsymbol{h}}_l'] = \sum \varepsilon^k (\boldsymbol{g}_k - \dot{\boldsymbol{h}}_k)$代入上式，可以得到如方程(5.6.12)所示的 $\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{g}_k$ 之间的关系。

第三步：用 Mathematica 语言推导，可以证明方程(5.6.14) ~ (5.6.16)关于时间的对称条件。当 $k = 1$ 时，由定义的式(5.6.6)和式(5.6.12)可得到

$$\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{\zeta}, t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\zeta}, t, 0) = \mathrm{e}^{-tJ} \boldsymbol{f}(\mathrm{e}^{tA}\boldsymbol{\zeta}, 0)$$

对方程(5.6.16)有

$$\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{\zeta}, t + s) = \mathrm{e}^{-sJ}[\mathrm{e}^{-tJ} \boldsymbol{f}(\mathrm{e}^{tJ}\mathrm{e}^{sJ}\boldsymbol{\zeta}, 0)] = \mathrm{e}^{-sJ} \boldsymbol{g}_1(\mathrm{e}^{sJ}\boldsymbol{\zeta}, t)$$

对方程(5.6.15)有

$$\mathrm{e}^{-tJ} \boldsymbol{f}_1^0(\mathrm{e}^{tJ}\boldsymbol{\zeta}) = (1/T)\int_0^T \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{\zeta}, t + \tau)\mathrm{d}\tau = (1/T)\int_t^{t+T} \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{\zeta}, s)\mathrm{d}s = \boldsymbol{f}_1^0(\boldsymbol{\zeta})$$

由以上各结果可以得出

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{h}}_1(\boldsymbol{\zeta}, t) &= \frac{1}{T}\int_0^T \tau \frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{\zeta}, \tau + t) - \boldsymbol{f}_1^0(\boldsymbol{\zeta})]\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \tau \frac{\partial}{\partial \tau}[\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{\zeta}, \tau + t) - f_1^0(\boldsymbol{\zeta})]\mathrm{d}\tau = \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{\zeta}, t) - f_1^0(\boldsymbol{\zeta}) \\
\mathrm{e}^{-tJ}\dot{\boldsymbol{h}}_1(\mathrm{e}^{tJ}\boldsymbol{\zeta}, s) &= \mathrm{e}^{-tJ}\boldsymbol{g}_1(\mathrm{e}^{tJ}\boldsymbol{\zeta}, s) - \mathrm{e}^{-tJ}\boldsymbol{f}_1^0(\mathrm{e}^{tJ}\boldsymbol{\zeta}) \\
&= \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{\zeta}, t + s) - \boldsymbol{f}_1^0(\boldsymbol{\zeta}) = \dot{\boldsymbol{h}}_1(\boldsymbol{\zeta}, s + t)
\end{aligned}$$

当 $k = 1$ 时，方程(5.6.14)成立。

假定对于 $l < k$，方程(5.6.14) ~ (5.6.16)成立，在方程(5.6.12)中用 $\mathrm{e}^{tJ}\boldsymbol{\zeta}$ 代替 $\boldsymbol{\zeta}$，并在方程两边左乘 e^{-tJ}，则可以证明当 $l = k$ 时，方程(5.6.16)成立，则有

$$\mathrm{e}^{-tJ} \boldsymbol{f}_1^0(\mathrm{e}^{tJ}\boldsymbol{\zeta}) = (1/T)\int_0^T \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{\zeta}, t + \tau)\mathrm{d}\tau = (1/T)\int_t^{t+T} \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{\zeta}, s)\mathrm{d}s = \boldsymbol{f}_k^0(\boldsymbol{\zeta})$$

$$\dot{\boldsymbol{h}}_k(\boldsymbol{\zeta}, t) = \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{\zeta}, t) - \boldsymbol{f}_k^0(\boldsymbol{\zeta}), \mathrm{e}^{-tJ}\dot{\boldsymbol{h}}_k(\mathrm{e}^{tJ}\boldsymbol{\zeta}, s) = \dot{\boldsymbol{h}}_k(\boldsymbol{\xi}, s + t)$$

同样，对于 $l = 1$，上式成立。

证毕。

定理 5.6.1 提供了一种求规范形的便利方法。用该方法避免了矩阵表示法和共轭算子法中需要确定算子 Im ad_J^k 的补空间的工作。该定理把周期振动中的平均法和规范形理论做了统一。

5.6.4　Mathematica 程序及算例

附录中给出了用 Mathematica 语言编写的程序。它可用来计算二阶常微分方程，所计算常微分方程的 Jordan 矩阵为 $\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$。程序的前三行是需要用户输入的参数和函数。

第一行 k 表示所要求的 ε 的最高阶数，第二行 $w=\omega$ 表示方程的线性频率，第三行 $f=\{f1, f2\}$ 中，$f1$ 和 $f2$ 是方程(5.6.4)中向量函数的两个表达式。程序运行之后，结果会保存在当前目录下的 olf 文件中，文件中的第一部分为 r，第二部分为 θ。

本节中，通过该程序计算了下面 4 个例题中的高阶规范形及其平均解。因为只要是考虑由系统的定常解产生的极限环，就没有必要考虑系统的初始状态。在分析中，ε 并没有实际的意义。

例 5.6.1 考虑如下常微分方程

$$\ddot{x}+x=\varepsilon[x^2+\varepsilon\dot{x}(1-\dot{x}^2/3)]$$

或者

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\varepsilon\begin{bmatrix}0\\ x_1^2+\varepsilon x_2\left(1-\dfrac{x_2^2}{3}\right)\end{bmatrix}\quad(\varepsilon>0)\tag{5.6.17}$$

为计算方程(5.6.17)的四阶平均方程，在程序中，输入 $k=4, w=1$ 和

$$f=x_1^2+\varepsilon x_2\left(1-\frac{x_2^2}{3}\right)\quad \text{即 f= \{0,x1\^2+ep x2 (1-x2\^2/3)\}}$$

得出四阶平均方程为

$$\dot{\zeta}=\varepsilon^2 f^0(\zeta,\varepsilon)+O(\varepsilon^6)\tag{5.6.18}$$

式中

$$f^0(\zeta,\varepsilon)=\begin{bmatrix}\zeta_1 & \zeta_2\\ \zeta_2 & -\zeta_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(4-r^2)/8-(8-5r^2)r^2\varepsilon^2/144\\ -5r^2/12-(864-432r^2+3\,221r^4)\varepsilon^2/6\,912\end{bmatrix}$$

$$r^2=\zeta_1^2+\zeta_2^2$$

为了将方程(5.6.17)变为极坐标形式，令

$$\zeta_1=r\cos\theta,\ \zeta_2=r\sin\theta$$

则有

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{r}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\zeta}_1\\ \dot{\zeta}_2\end{bmatrix}\\ &=\varepsilon^2\begin{bmatrix}(4-r^2)r/8-(8-5r^2)r^3\varepsilon^2/144\\ 5r^2/12+(864-432r^2+3\,221r^4)\varepsilon^2/6\,912\end{bmatrix}+O(\varepsilon^6)\end{aligned}$$

用该程序得到的结果和文献(Han,1996)中的结果相同。

例 5.6.2 考虑无阻尼 Duffing 方程

$$\ddot{x}+\omega_1^2x=cx^3\varepsilon^2\tag{5.6.19}$$

令 $x_1=x, \dot{x}_1=-\omega_1x_2$，将其代入方程(5.6.19)，得

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\omega_1\\ \omega_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\varepsilon\begin{bmatrix}0\\ -\dfrac{c}{\omega_1}x_1^3\varepsilon\end{bmatrix}$$

将 $k=6$, $w=w1$ and $f=-\frac{c}{\omega_1}x_1^3\varepsilon$ (i.e. f={0, -c/w1 x1^3 ep})输入程序中,则得出 6 阶平均方程

$$\dot{\zeta}=\varepsilon^2 f^0(\zeta,\varepsilon)+O(\varepsilon^6) \tag{5.6.20}$$

式中

$$f^0(\zeta,\varepsilon)=\begin{bmatrix}\zeta_1 & \zeta_2\\ \zeta_2 & -\zeta_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \frac{3cr^2}{8\omega_1}-\frac{51c^2r^4}{256\omega_1^3}\varepsilon^2+\frac{1\,419c^3r^6}{8\,192\omega_1^5}\varepsilon^4\end{bmatrix}$$

$$r^2=\zeta_1^2+\zeta_2^2$$

为将方程(5.6.19)转化成极坐标的形式,令

$$\zeta_1=r\cos\theta,\zeta_2=r\sin\theta$$

则

$$\begin{bmatrix}\dot{r}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\zeta}_1\\ \dot{\zeta}_2\end{bmatrix}$$

$$=\varepsilon^2\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -\frac{3cr^2}{8\omega_1}+\frac{51c^2r^4}{256\omega_1^3}\varepsilon^2-\frac{1\,419c^3r^6}{8\,192\omega_1^5}\varepsilon^4\end{bmatrix}+O(\varepsilon^8)$$

用本节附录中提供的程序得出的四阶结果和文献(Jezequel 和 Lamarque,1991)中的结果相同。

例 5.6.3　考虑无阻尼的 Van der Pol 方程

$$\ddot{x}+\varepsilon(\varepsilon x^2-c)\dot{x}+x=0 \tag{5.6.21}$$

令 $x_1=x,\dot{x}_1=x_2$,将其代入方程(5.6.21),得

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\varepsilon\begin{bmatrix}0\\ -(\varepsilon x_1^2-c)x_2\end{bmatrix} \tag{5.6.22}$$

将 $k=4,w=1$ and $f=-(\varepsilon x_1^2-c)x_2$(i.e. f={0, -(ep x1^2 - c) x2}) 输入程序,得出 4 阶的平均方程

$$\dot{\zeta}=\varepsilon f^0(\zeta,\varepsilon)+O(\varepsilon^5)$$

式中

$$f^0(\zeta,\varepsilon)=\begin{bmatrix}\zeta_1 & \zeta_2\\ \zeta_2 & -\zeta_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{c}{2}-\frac{r^2\varepsilon}{8}+\frac{c^2(4c-3r^2)\varepsilon^3}{128}\\ -\frac{c^2}{8}+\frac{3cr^2\varepsilon^2}{16}-\frac{(2c^4+11r^4)\varepsilon^3}{256}\end{bmatrix},r^2=\zeta_1^2+\zeta_2^2$$

令 $\zeta_1=r\cos\theta,\zeta_2=r\sin\theta$,将上述方程变为极坐标形式,得

$$\begin{bmatrix}\dot{r}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\zeta}_1\\ \dot{\zeta}_2\end{bmatrix}$$

$$=\varepsilon\begin{bmatrix}\dfrac{cr}{2}-\dfrac{r^3\varepsilon}{8}+\dfrac{c^2r(4c-3r^2)\varepsilon^3}{128}\\ \dfrac{c^2}{8}-\dfrac{3cr^2\varepsilon^2}{16}+\dfrac{(2c^4+11r^4)\varepsilon^3}{256}\end{bmatrix}+O(\varepsilon^5)$$

当 $\dot{r}=\varepsilon r[c/2-r^2\varepsilon/8+c^2(4c-3r^2)\varepsilon^3/128]=0$ 成立时，系统处于稳定状态，总是可以通过限定 c、ε 满足一定条件，找到系统的非平凡解和极限环。比如，对于四阶 $O(\varepsilon^4)$有：$4c-r^2\varepsilon=0$，$r=2\sqrt{c/\varepsilon}$，所以当 c、ε 都大于零时，有极限环。五阶 $O(\varepsilon^5)$则有：$c/2-r^2\varepsilon/8+c^2(4c-3r^2)\varepsilon/128=0$，只要 c、ε 满足 $16>3c^2\varepsilon^2$，则存在极限环。

例 5.6.4　考虑如下方程

$$\ddot{x}+ca\dot{x}+x=\varepsilon bx^2+\varepsilon c\dot{x}^3 \tag{5.6.23}$$

式中 a、b、c 为参数，线性频率已经被单位化，方程(5.6.23)等价于

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\varepsilon\begin{bmatrix}0\\ -ax_2+bx_1^2+cx_2^3\end{bmatrix} \tag{5.6.24}$$

把 $k=4$、$f=\varepsilon(-ax_1+bx_1^2+cx_2^3)$代入到程序里面，得到极坐标形式的四阶规范形

$$\begin{bmatrix}\dot{r}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta/r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\zeta}_1\\ \dot{\zeta}_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\varepsilon^2r(3cr^2/8-a/2)\\ \varepsilon^4(-a^2/8+r^2(3ac/16-5b^2/12)-27c^2r^4/256)\end{bmatrix}+O(\varepsilon^5)$$

稳定状态，$\dot{r}=\varepsilon^2r(3cr^2/8-a/2)=0$ 有极限环 $r^2=4a/3c$。由此结果可知，参数 b 对极限环没有影响。

平均规范形方法综合了规范形理论和平均法的优点，其简单性在于，能通过一个简短的程序计算高阶的平均方程或者规范形。本节中给出的 4 个例子，可以和已有的结果进行比较，对所有程序提供了很好的证明。

5.7　摄动(nayfeh)方法

在这一节，以求解单自由度系统为例来介绍用规范形方法，下面的二阶非线性常微分方程为典型的单自由度系统

$$\ddot{u}+\omega^2u=f(u,\dot{u}) \tag{5.7.1}$$

式中 $f(u,\dot{u})$可展开成 u 和 $\dot{u}$ 的幂级数的形式，在以下的分析中，把 $\ddot{u}+\omega^2u=0$ 作为未受扰系统，而方程(5.7.1)作为扰动系统。假定方程(5.7.1) 的平衡点为 $u=0$ 和 $\dot{u}=0$。令

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= u \\ x_2 &= \dot{u} \end{aligned}\right\} \tag{5.7.2}$$

则方程(5.7.1)可表示为下面两个一阶方程：

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{5.7.3}$$

$$\dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 + f(x_1, x_2) \tag{5.7.4}$$

非常明显，未受扰系统

$$\dot{x}_1 = x_2 \text{ 和 } \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1$$

有一对纯虚根 $\pm \mathrm{i}\omega$。

下述规范形方法的主要思想是通过引入近恒同变换

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 + h_1(y_1, y_2) \\ x_2 &= y_2 + h_2(y_1, y_2) \end{aligned}\right\} \tag{5.7.5}$$

将式(5.7.5)代入式(5.7.3)和式(5.7.4)中，可得到原方程组较简单形式(即所谓的规范形)。变换式(5.7.5)称为近恒同变换是因为 $x_1(t) - y_1(t)$ 和 $x_2(t) - y_2(t)$ 是小量，即 $O(x_1(t))$ 和 $O(y_1(t))$。这个过程也可以叫做规范化。将式(5.7.5)代入式(5.7.3)和式(5.7.4)中可得

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + h_2 - \frac{\partial h_1}{\partial y_1}\dot{y}_1 - \frac{\partial h_1}{\partial y_2}\dot{y}_2 \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2 y_1 - \omega^2 h_1 + f(y_1 + h_1, y_2 + h_2) - \frac{\partial h_2}{\partial y_1}\dot{y}_1 - \frac{\partial h_2}{\partial y_2}\dot{y}_2 \end{aligned}\right\} \tag{5.7.6}$$

选择合适的 h_1 和 h_2，方程(5.7.6)可化为最简形式。假如 $f(x_1, x_2)$ 可以分解为

$$f(x_1, x_2) = \sum_{n=2}^{N} f_n(x_1, x_2) \tag{5.7.7}$$

式中 f_n 是关于 x_1 和 x_2 的 n 阶多项式，应先选择合适的 h_1 和 h_2，化简阶数最低的多项式 $f_m(x_1, x_2)$(其中 $m \geqslant 2$)，然后，可以再一次利用近恒同变换，化简 $m+1$，依此类推，可以逐步化简 $f(x_1, x_2)$ 的各阶多项式。

因为受扰系统(5.7.3)和(5.7.4)表示一种振子，所以控制方程很容易表示成一个复数方程。接下来的步骤和 Nayfeh(1981)参数变异法相似。当 $f \equiv 0$，方程(5.7.1)的解可表示为

$$u = B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \bar{B}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{5.7.8}$$

式中 B 是一个常量，$\bar{B}$ 为 B 的共轭。所以

$$\dot{u} = \mathrm{i}\omega(B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \bar{B}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}) \tag{5.7.9}$$

当 $f \neq 0$ 时，仍然可以用式(5.7.8)和式(5.7.9)来表示方程(5.7.1)的解，只是式中的 B 不再是常量，而是随时间变化的。用 ζ 代替 $B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，式(5.7.8)和式(5.7.9)改写为

$$\left.\begin{aligned} u &= \zeta + \bar{\zeta} \\ \dot{u} &= \mathrm{i}\omega(\zeta - \bar{\zeta}) \end{aligned}\right\} \tag{5.7.10}$$

这样,由式(5.7.10)可以解得 ζ 和 $\bar{\zeta}$ 如下:

$$\left.\begin{aligned}\zeta &= \frac{1}{2}\left(u - \frac{\mathrm{i}}{\omega}\dot{u}\right)\\ \bar{\zeta} &= \frac{1}{2}\left(u + \frac{\mathrm{i}}{\omega}\dot{u}\right)\end{aligned}\right\} \tag{5.7.11}$$

求方程(5.7.11)关于 t 的微分,得

$$\dot{\zeta} = \frac{1}{2}\left(\dot{u} - \frac{\mathrm{i}}{\omega}\ddot{u}\right) = \frac{1}{2}\left(\dot{u} + \mathrm{i}\omega u - \frac{\mathrm{i}}{\omega}f\right) \tag{5.7.12}$$

考虑到式(5.7.1),则

$$\dot{\zeta} = \frac{1}{2}\mathrm{i}\omega\left(u - \frac{\mathrm{i}}{\omega}\dot{u}\right) - \frac{\mathrm{i}}{2\omega}f(u,\dot{u}) \tag{5.7.13}$$

将式(5.7.10)和式(5.7.11)代入上式,得到

$$\dot{\zeta} = \mathrm{i}\omega\zeta - \frac{\mathrm{i}}{2\omega}f[\zeta + \bar{\zeta}, \mathrm{i}\omega(\zeta - \zeta)] \tag{5.7.14}$$

下面,根据微分多项式 f 的具体形式来进行分析。

5.7.1 杜芬(Duffing)方程

杜芬方程可写为

$$\ddot{u} + \omega^2 u = \alpha u^3$$

式中 $f = \alpha u^3$,所以,式(5.7.14)可以写为

$$\dot{\zeta} = \mathrm{i}\omega\zeta - \frac{\mathrm{i}\alpha}{2\omega}(\zeta + \bar{\zeta})^3 \tag{5.7.15}$$

现在引入从 ζ 到 η 的近恒同变换

$$\zeta = \eta + h(\eta, \bar{\eta}) \tag{5.7.16}$$

可以得到下式

$$\dot{\eta} = \mathrm{i}\omega\eta + \mathrm{i}\omega h - \frac{\partial h}{\partial \eta}\dot{\eta} - \frac{\partial h}{\partial \bar{\eta}}\dot{\bar{\eta}} - \frac{\mathrm{i}\alpha}{2\omega}(\eta + h + \bar{\eta} + \bar{h})^3 \tag{5.7.17}$$

因为非线性部分是三次,所以可假设 h 是关于 η 和 $\bar{\eta}$ 的三次多项式,如下式:

$$h = \Lambda_1\eta^3 + \Lambda_2\eta^2\bar{\eta} + \Lambda_3\eta\bar{\eta}^2 + \Lambda_4\bar{\eta}^3 \tag{5.7.18}$$

通过选择合适的 Λ_i,使式(5.7.17)变为简单形式(规范形)。

下一步,通过迭代法,可以从式(5.7.17)的右边消去 η 和 $\bar{\eta}$,由式(5.7.17)第一次近似为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\eta} &= \mathrm{i}\omega\eta\\ \dot{\bar{\eta}} &= -\mathrm{i}\omega\bar{\eta}\end{aligned}\right\} \tag{5.7.19}$$

把式(5.7.19)和式(5.7.18)代入式(5.7.17),保留三次项,可以得到

$$\dot{\eta} = \mathrm{i}\omega\eta - \mathrm{i}\omega\left(2\Lambda_1 + \frac{\alpha}{2\omega^2}\right)\eta^3 - \frac{3\mathrm{i}\alpha}{2\omega}\eta^2\bar{\eta}$$

$$+\mathrm{i}\omega\left(2\Lambda_3-\frac{3\alpha}{2\omega^2}\right)\eta\bar{\eta}^2+\mathrm{i}\omega\left(4\Lambda_4-\frac{\alpha}{2\omega^2}\right)\bar{\eta}^3 \tag{5.7.20}$$

为消去 η^3、$\eta\bar{\eta}^2$ 和 $\bar{\eta}^3$，选择 Λ_1、Λ_3 和 Λ_4 的值如下：

$$\left.\begin{aligned}\Lambda_1&=-\frac{\alpha}{4\omega^2}\\ \Lambda_3&=\frac{3\alpha}{4\omega^2}\\ \Lambda_4&=\frac{\alpha}{8\omega^2}\end{aligned}\right\} \tag{5.7.21}$$

但是，可以看到，因为在式(5.7.20)中没有出现 Λ_2，所以 $\eta^2\bar{\eta}$ 项不能消去，称其为“共振项”。这样，进行第二次近似变换时，η 的最简形式为

$$\dot{\eta}=\mathrm{i}\omega\eta-\frac{3\mathrm{i}\alpha}{2\omega}\eta^2\bar{\eta} \tag{5.7.22}$$

为了表明 $\eta^2\bar{\eta}$ 是共振项，用迭代法可以找到式(5.7.22)的解。又因为在第一次近似中，$\eta=A\exp(\mathrm{i}\omega t)$，其中，$A$ 是一个常数，则式(5.7.22)变换为

$$\dot{\eta}=\mathrm{i}\omega\eta-\frac{3\mathrm{i}\alpha}{2\omega}A^2\bar{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

它的解可以写为

$$\eta=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}-\frac{3\mathrm{i}\alpha}{2\omega}A^2\bar{A}t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{5.7.23a}$$

很明显，该解是原方程的一个直接展开，但由于 $\eta^2\bar{\eta}$ 所生成的永年项，当时间 t 增加时，该展开式是不一致收敛的。

另外，可以证明，$\zeta^2\bar{\zeta}$ 在原始方程(5.7.15)中是一个共振项。第一次近似，忽略式(5.7.15)中的非线性部分，令 $\zeta=A\exp(\mathrm{i}\omega t)$，这样，由第二次近似，式(5.7.15)变为

$$\dot{\zeta}=\mathrm{i}\omega\zeta-\frac{\mathrm{i}\alpha}{2\omega}[A^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\omega t}+3A^2\bar{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+3A\bar{A}^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}+\bar{A}^3\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\omega t}]$$

它的解可写为

$$\zeta=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}-\frac{\alpha}{4\omega^2}A^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\omega t}-\frac{3\mathrm{i}\alpha}{2\omega}A^2\bar{A}t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+\frac{\alpha}{4\omega^2}A\bar{A}^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}+\frac{\alpha}{8\omega^2}\bar{A}^3\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\omega t} \tag{5.7.23b}$$

非常明显，因为 $\zeta^2\bar{\zeta}$ 产生的永年项，该展开式也是不一致收敛的。其他由 ζ^3、$\zeta\bar{\zeta}^2$ 和 $\bar{\zeta}^3$ 所对应的三次项 $A^3\exp(3\mathrm{i}\omega t)$、$A\bar{A}^2\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ 和 $\bar{A}^3\exp(-3\mathrm{i}\omega t)$ 没有产生永年项，因此称它们为非共振项，可以选择近恒同变换消去它们。

作为第二次迭代，从原始方程(5.7.15)开始，将非线性部分 $f(\zeta,\bar{\zeta})$ 分为两部分，即 $f(\zeta,\bar{\zeta})=f_1(\zeta,\bar{\zeta})+f_2(\zeta,\bar{\zeta})$，其中 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}f_1(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})$ 是非时变的，而 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}f_2(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})$ 是随时间改变的。在这种情形下，$f=(\zeta+\bar{\zeta})^3$，$f_1=3\zeta^2\bar{\zeta}$，$f_2=\zeta^3+3\zeta\bar{\zeta}^2+\bar{\zeta}^3$，这样，$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}f_1(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}(3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})=3$ 是非时变的，而 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}f_2(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t}+3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\omega t}$ 中任何一项都是

随时间变化的。

将式(5.7.16)、式(5.7.18)代入式(5.7.10),又考虑到式(5.7.21),可以得出

$$u=\eta+\bar{\eta}-\frac{\alpha}{8\omega^2}(\eta^3+\bar{\eta}^3)+\frac{3\alpha}{4\omega}(\eta\bar{\eta}^2+\eta^2\bar{\eta})+\Lambda_2\eta^2\bar{\eta}+\bar{\Lambda}_2\eta\bar{\eta}^2 \tag{5.7.24}$$

式中 η 已经由式(5.7.23a)给出。下面,通过引入变换 $\eta=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$,从慢的变量中分离出快的变量,其中 ω 是系统的固有频率,A 是时间 t 的函数,将变换代入式(5.7.22)和式(5.7.24)可以得到

$$\dot{A}=-\frac{3\mathrm{i}\alpha}{2\omega}A^2\bar{A} \tag{5.7.25}$$

$$\begin{aligned}u=&A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+\bar{A}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}-\frac{\alpha}{8\omega^2}(A^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\omega t}+\bar{A}^3\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\omega t})\\&+\left(\frac{3\alpha}{4\omega^2}+\Lambda_2\right)A^2\bar{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+\left(\frac{3\alpha}{4\omega^2}+\bar{\Lambda}_2\right)\bar{A}^2A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\end{aligned} \tag{5.7.26}$$

将 A 表示为极坐标的形式如下:

$$A=\frac{1}{2}a\exp(\mathrm{i}\beta) \tag{5.7.27}$$

式中 a、β 是时间 t 的函数,将式(5.7.26)写成极坐标的形式,为

$$\begin{aligned}u=&\left[a+\frac{1}{8}\left(\frac{3\alpha}{2\omega^2}+\Lambda_2+\bar{\Lambda}_2\right)a^3\right]\cos(\omega t+\beta)\\&+\frac{1}{8}\mathrm{i}(\Lambda_2-\bar{\Lambda}_2)a^3\sin(\omega t+\beta)-\frac{\alpha a^3}{32\omega^2}\cos(3\omega t+3\beta)\end{aligned} \tag{5.7.28}$$

这样,基频$(\omega+\dot{\beta})$的幅值是$\left\{\left[a+\frac{1}{8}\left(\frac{3\alpha}{2\omega^2}+\Lambda_2+\bar{\Lambda}_2\right)a^3\right]^2+\left[\frac{1}{8}(\Lambda_2-\bar{\Lambda}_2)a^3\right]^2\right\}^{1/2}$。

因为 Λ_2 未定,所以,该幅值并不唯一。接下来,通过选择合适的 Λ_2,使基频的幅值由 a 唯一确定。可以令

$$\left.\begin{aligned}&\frac{3\alpha}{2\omega}+\Lambda_2+\bar{\Lambda}_2=0\\&\Lambda_2=\bar{\Lambda}_2\end{aligned}\right\} \tag{5.7.29}$$

即

$$\Lambda_2=-\frac{3\alpha}{4\omega^2} \tag{5.7.30}$$

这样,式(5.7.26)简化为

$$u=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+\bar{A}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}-\frac{\alpha}{8\omega^2}(A^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\omega t}+\bar{A}^3\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\omega t}) \tag{5.7.31}$$

为了分析方程(5.7.25)和(5.7.31),有两种选择,这根据复数振幅 A 是由极坐标或者笛卡儿坐标表示来决定。如果 A 是极坐标式(5.7.27)的形式,式(5.7.28)变为

$$u=a\cos(\omega t+\beta)-\frac{\alpha a^3}{32\omega^2}\cos(3\omega t+3\beta) \tag{5.7.32}$$

将式(5.7.27)代入式(5.7.25),分离实部和虚部,可以得到

$$\dot{a}=0 \tag{5.7.33}$$

$$a\dot{\beta}=-\frac{3\alpha}{8\omega}a^3 \tag{5.7.34}$$

由式(5.7.32)~式(5.7.34)表示的解在形式上与多尺度法和平均法是等价的(Nayfeh,1981)。如果 A 为笛卡儿坐标的形式

$$A=\frac{1}{2}(p-\mathrm{i}q)$$

则式(5.7.32)~式(5.7.34)可以转化为

$$u=p\cos\ \omega t+q\sin\ \omega t-\frac{\alpha}{32\omega^2}(p^3-3pq^2)\cos\ 3\omega t+\frac{\alpha}{32\omega^2}(q^3-3p^2q)\sin\ 3\omega t \tag{5.7.35}$$

$$\dot{p}=-\frac{3\alpha}{8\omega}q(p^2+q^2) \tag{5.7.36}$$

$$\dot{q}=\frac{3\alpha}{8\omega}p(p^2+q^2) \tag{5.7.37}$$

很明显,极坐标要比笛卡儿坐标简单。但是,在某些应用上,可以发现用笛卡儿坐标比极坐标方便。

在决定式(5.7.22)的规范形时,用一个顺序表来标定式(5.7.15)中微分项的数量级。因为 ζ、$\bar{\zeta}$ 是小量,所以 ζ^3、$\zeta^2\bar{\zeta}$、$\zeta\bar{\zeta}^2$、ζ^3 是比 ζ、$\bar{\zeta}$ 更小的量。这是决定顺序表的基础,换句话说,顺序表是由该项的阶数来标记的。在本例中,这一点有很好的体现。但是,在很多实际应用中,方程的数量级并不和多项式的次数一致,而是和系统模型中的参数有关。如下节的计算,则和无量纲的参数 ε 有关。

5.7.2　一步变换法

仿照摄动方法,可将传统的逐次变换法改为一步变换法,将 ζ 展为新变量 η 关于 ε 的幂级数。

①计算下列具有平方和立方非线性系统的规范形

$$\dot{\zeta}=\mathrm{i}\omega\zeta+\frac{\mathrm{i}\varepsilon\delta}{2\omega}(\zeta+\bar{\zeta})^2+\frac{\mathrm{i}\varepsilon^2\alpha}{2\omega}(\zeta+\bar{\zeta})^3 \tag{5.7.38}$$

$$\zeta=\eta+\varepsilon h_1(\eta,\bar{\eta})+\varepsilon^2 h_2(\eta,\bar{\eta})+\cdots \tag{5.7.39}$$

②其中 h_1 和 h_2 是关于 η 和 $\bar{\eta}$ 的光滑函数。式(5.6.38)的规范形可写为

$$\dot{\eta}=\mathrm{i}\omega\eta+\varepsilon g_1(\eta,\bar{\eta})+\varepsilon^2 g_2(\eta,\bar{\eta})+\cdots \tag{5.7.40}$$

③其中 g_1 和 g_2 包含了所有共振和拟共振项。

将式(5.6.39)和式(5.6.40)代入式(5.6.38),并比较 ε 各阶项的系数,并令其等于零,得

$$g_1+\mathrm{i}\omega\left(\eta\frac{\partial h_1}{\partial\eta}-\bar{\eta}\frac{\partial h_1}{\partial\bar{\eta}}-h_1\right)=\frac{\mathrm{i}\delta}{2\omega}(\eta+\bar{\eta})^2 \tag{5.7.41}$$

$$g_2+\mathrm{i}\omega\left(\eta\frac{\partial h_2}{\partial\eta}-\bar{\eta}\frac{\partial h_2}{\partial\bar{\eta}}-h_2\right)=-g_1\frac{\partial h_1}{\partial\eta}-\bar{g}_1\frac{\partial h_1}{\partial\bar{\eta}}$$
$$+\frac{\mathrm{i}\delta}{2\omega}(\eta+\bar{\eta})(h_1+\bar{h}_1)+\frac{\mathrm{i}\alpha}{2\omega}(\eta+\bar{\eta})^3 \tag{5.7.42}$$

方程(5.7.41)和(5.7.42)称为关于 h_1 的 h_2 的同调方程。

下一步,需要确定方程(5.7.41) 中的 g_1 和 h_1。为了使 h_1 为非奇异的,选择 g_1 来消去共振项和拟共振项,否则,如果存在共振项和近奇异项(也就是存在小除数),h_1 是奇异的(也就是存在永年项)。在当前情形,方程(5.7.41)中不含共振项。为了说明这一点,注意到方程(5.7.40)中 $\eta\approx B\exp(\mathrm{i}\omega t)$,因此方程(5.7.41)右式的摄动项包含与 $\exp(\pm 2\mathrm{i}\omega t)$成比例的项和一常数项。由于这些项不与 $\exp(\mathrm{i}\omega t)$成比例,它们是方程(5.7.40)的一阶解,不存在共振项。如果对这一点有所怀疑,可以找到一个函数 h_1,用于消去所有的摄动项。如果能够成功地找到一个光滑函数 h_1 用于消去所有的摄动项,则 $g_1=0$。否则,选择 g_1 消除所有这些给 h_1 制造麻烦的项(也就是奇异和近奇异项)。由于摄动项是二阶的,令

$$h_1=\Gamma_1\eta^2+\Gamma_2\eta\bar{\eta}+\Gamma_3\bar{\eta}^2 \tag{5.7.43}$$

选择 Γ_1、Γ_2 和 Γ_3 来消除 $\mathrm{i}\delta(\eta+\bar{\eta})^2/2\omega$,将式(5.7.43)代入式(5.7.41),可以得到 Γ_m 的值,$\Gamma_1=\frac{\delta}{2\omega^2}$,$\Gamma_2=-\frac{\delta}{\omega^2}$,$\Gamma_3=-\frac{\delta}{6\omega^2}$。由于所得到的 Γ_m 是奇异的,所以不存在共振项,且 $g_1=0$。

将式(5.7.43)中 Γ_m 的各个值及 $g_1=0$ 代入式(5.7.42),得

$$g_2+\mathrm{i}\omega\left(\eta\frac{\partial h_2}{\partial\eta}-\bar{\eta}\frac{\partial h_2}{\partial\bar{\eta}}-h_2\right)=\frac{\mathrm{i}\delta^2}{3\omega^3}(\eta+\bar{\eta})(\eta^2+\bar{\eta}^2-6\eta\bar{\eta})+\frac{\mathrm{i}\alpha}{2\omega}(\eta+\bar{\eta})^3 \tag{5.7.44}$$

同理,不需要确定 h_2,所需要做的就是审视式(5.7.44),选择 g_2 用以消除所有的共振和近共振项。再者,由于 $\eta\propto\exp(\mathrm{i}\omega t)$,只有与 $\eta^2\bar{\eta}$ 成比例的项是共振项。因此,选择 g_2 消去这一项,得

$$g_2=\frac{\mathrm{i}}{2\omega}\left(3\alpha-\frac{10\delta^2}{3\omega^2}\right)\eta^2\bar{\eta} \tag{5.7.45}$$

将式(5.7.39)、式(5.7.43)及 Γ_m 的各值代入式(5.7.10),得

$$u=\eta+\bar{\eta}+\frac{\varepsilon\delta}{3\omega^2}(\eta^2+\bar{\eta}^2-6\eta\bar{\eta})+\cdots \tag{5.7.46}$$

用式(5.7.45)置换式(5.7.40)中的 g_2,同时借助 $g_1=0$ 的事实,得

$$\dot{\eta}=\mathrm{i}\omega\eta+\frac{\varepsilon^2}{2\omega}\left(3\alpha-\frac{10\delta^2}{3\omega^2}\right)\eta^2\bar{\eta}+\cdots \tag{5.7.47}$$

该结果与逐次展开和多尺度法所得的直至二阶的结果一致。

5.7.3 含有二次和三次非线性项的一般系统

考虑单自由度自由振动系统,方程为

$$\ddot{u}+\omega^2 u+\varepsilon(\delta_1 u^2+\delta_2\dot{u}^2)+\varepsilon^2(2\mu\dot{u}+\alpha_1 u^3+\alpha_2 u^2\dot{u}+\alpha_3 u\dot{u}^2+\alpha_4\dot{u}^3)=0 \quad (5.7.48)$$

该系统中

$$f=-\varepsilon(\delta_1 u^2+\delta_2\dot{u}^2)-\varepsilon^2(2\mu\dot{u}+\alpha_1 u^3+\alpha_2 u^2\dot{u}+\alpha_3 u\dot{u}^2+\alpha_4\dot{u}^3) \quad (5.7.49)$$

式中引入一个正的无量纲的小量标志 ε，二阶项记为 $O(\varepsilon)$，三阶项与线性阻尼项记为 $O(\varepsilon^2)$，这样，式(5.7.14)变为

$$\dot{\zeta}=\mathrm{i}\omega\zeta+\frac{\mathrm{i}\varepsilon}{2\omega}[\delta_1(\zeta+\bar{\zeta})^2-\delta_2\omega^2(\zeta-\bar{\zeta})^2]+\frac{\mathrm{i}\varepsilon^2}{2\omega}[2\mathrm{i}\omega\mu(\zeta-\bar{\zeta})+\alpha_1(\zeta-\bar{\zeta})^3$$
$$+\mathrm{i}\omega\alpha_2(\zeta+\bar{\zeta})^2(\zeta-\bar{\zeta})-\omega^2\alpha_3(\zeta+\bar{\zeta})(\zeta-\bar{\zeta})^2-\mathrm{i}\omega^3\alpha_4(\zeta-\bar{\zeta})^3] \quad (5.7.50)$$

如上一节所述，将式(5.7.50)展开成式(5.7.39)和式(5.7.40)的形式，比较 ε 各阶级数的系数，可得

$$g_1+\mathrm{i}\omega\left(\eta\frac{\partial h_1}{\partial\eta}-\bar{\eta}\frac{\partial h_1}{\partial\bar{\eta}}-h_1\right)$$
$$=\frac{\mathrm{i}}{2\omega}[\delta_1(\eta+\bar{\eta})^2-\delta_2\omega^2(\eta-\bar{\eta})^2] \quad (5.7.51)$$

$$g_2+\mathrm{i}\omega\left(\eta\frac{\partial h_2}{\partial\eta}-\bar{\eta}\frac{\partial h_2}{\partial\bar{\eta}}-h_2\right)$$
$$=-g_1\frac{\partial h_1}{\partial\eta}-\bar{g}_1\frac{\partial h_1}{\partial\bar{\eta}}-\mathrm{i}\mu(\eta-\bar{\eta})+\frac{\mathrm{i}}{\omega}[\delta_1(\eta+\bar{\eta})(h_1+\bar{h}_1)$$
$$-\delta_2\omega^2(\eta-\bar{\eta})(h_1+\bar{h}_1)]+\frac{\mathrm{i}}{2\omega}[\alpha_1(\eta+\bar{\eta})^3+\mathrm{i}\omega\alpha_2(\eta+\bar{\eta})^2(\eta-\bar{\eta})$$
$$-\omega^2\alpha_3(\eta+\bar{\eta})(\eta-\bar{\eta})^2-\mathrm{i}\omega^3\alpha_4(\eta-\bar{\eta})^3] \quad (5.7.52)$$

方程(5.7.51)的右边没有共振项，所以，可以令 $g_1=0$，设 h_1 如式(5.7.43)所示的形式，可得

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_1&=\frac{\delta_1}{2\omega^2}-\frac{1}{2}\delta_2\\ \Gamma_2&=\frac{\delta_1}{\omega^2}-\delta_2\\ \Gamma_3&=\frac{\delta_1}{6\omega^2}-\frac{1}{6}\delta_2\end{aligned}\right\} \quad (5.7.53)$$

因为所有的 Γ_m 是正规的，因此可以得出，在式(5.7.51)中没有共振项，所以 $g_1=0$。

把式(5.7.43)和式(5.7.53)代入式(5.7.52)，又因为 $g_1=0$，所以可得

$$g_2+\mathrm{i}\omega\left(\eta\frac{\partial h_2}{\partial\eta}-\bar{\eta}\frac{\partial h_2}{\partial\bar{\eta}}-h_2\right)$$
$$=\frac{\mathrm{i}\delta_1}{3\omega}(\eta+\bar{\eta})\left[\left(\frac{\delta_1}{\omega^2}-\delta_2\right)(\eta^2+\bar{\eta})-6\left(\frac{\delta_1}{\omega^2}+\delta_2\right)\eta\bar{\eta}\right]-\mu(\eta-\bar{\eta})$$
$$-\frac{2}{3}\mathrm{i}\delta_2\omega\left(\frac{\delta_1}{\omega^2}-\delta_2\right)(\eta-\bar{\eta})(\eta^2-\bar{\eta}^2)+\frac{\mathrm{i}}{2\omega}[\alpha_1(\eta+\bar{\eta})^3+\mathrm{i}\omega\alpha_2(\eta+\bar{\eta})^2(\eta-\bar{\eta})$$

$$-\omega^2\alpha_3(\eta+\bar{\eta})(\eta-\bar{\eta})^2-\mathrm{i}\omega^2\alpha_4(\eta-\bar{\eta})^3]+\cdots \tag{5.7.54}$$

观察式(5.7.54)的右边可以发现,与 η、η^2、$\bar{\eta}$ 成比例的项是仅有的共振项。接下来,选择合适的 g_2 可以消去共振项

$$g_2=-\mu\eta+\frac{\mathrm{i}}{2\omega}\left[3\alpha_1+\omega^2\alpha_3+\mathrm{i}\omega(\alpha_2+3\omega^2\alpha_4)-\frac{2}{3}\left(\frac{5\delta_1^2}{\omega^2}+5\delta_1\delta_2+2\delta_2^2\omega^2\right)\right]\eta^2\bar{\eta} \tag{5.7.55}$$

将式(5.7.39)和式(5.7.43)代入式(5.7.10),并考虑到消除共振和拟共振的条件,可以得到

$$u=\eta+\bar{\eta}+\varepsilon\left[\left(\frac{\delta_1}{3\omega^2}-\frac{1}{3}\delta_2\right)(\eta^2+\bar{\eta})-\left(\frac{2\delta_1}{\omega^2}+2\delta_2\right)\eta\bar{\eta}\right]+\cdots \tag{5.7.56}$$

将式(5.7.45)代入式(5.7.40),并考虑到 $g_1=0$,得

$$\dot{\eta}=\mathrm{i}\omega\eta-\varepsilon^2\mu\eta+\frac{\mathrm{i}\omega}{2\omega}[3\alpha_1+\omega^2\alpha_3+\mathrm{i}\omega(\alpha_2+3\omega^2\alpha_4)-\frac{2}{3}\left(\frac{5\delta_1^2}{\omega^2}+5\delta_1\delta_2+2\delta_2^2\omega^2\right)]\eta^2\bar{\eta} \tag{5.7.57}$$

为了与多尺度方法比较(Nayfeh, 1984),将极坐标表达式 $\eta=\frac{1}{2}a\exp[\mathrm{i}(\omega t+\beta)]$ 代入式(5.7.56)和式(5.7.57),可得

$$u=a\cos(\omega t+\beta)+\frac{1}{6}\varepsilon a^2\left[\left(\frac{\delta_1}{\omega^2}-\delta_2\right)\cos(2\omega t+2\beta)-3\left(\frac{\delta_1}{\omega^2}+\delta_2\right)\right]+\cdots \tag{5.7.58}$$

$$\dot{a}=-\varepsilon^2\mu a-\frac{1}{8}\varepsilon^2(\alpha_2+3\omega^2\alpha_4)a^3+\cdots \tag{5.7.59}$$

$$a\dot{\beta}=\frac{\varepsilon^2}{8\omega}\left[3\alpha_1+\omega^2\alpha_3-\frac{2}{3}\left(\frac{5\delta_1^2}{\omega^2}+5\delta_1\delta_2+2\delta_2^2\omega^2\right)\right]a^3+\cdots \tag{5.7.60}$$

很明显,这个结果和用多尺度法所得结果在形式上是等价的。

5.8 用规范形理论研究强非线性振动问题

规范形理论是简化常微分方程的有效方法。该理论的基本思想是通过一系列接近恒同的非线性变换简化常微分方程组,其可能得到的最简方程称为规范形。这种最简指的是所得到方程的求解要比原方程简单得多,而不单是指其所得方程的形式比原方程简单。近年来,Jezequel(1991)、Nayfeh(1993)、Leung 及张琪昌(1994)、陈予恕及张琪昌(1990)用规范形理论研究了弱非线性振动问题,研究了自治系统、非自治系统及参激系统的退化及非退化振动问题。本节将规范形方法拓展应用于研究强非线性振子 $\ddot{u}+\omega^2u=f(u,\dot{u})$ 的渐近解,其中 $f(u,\dot{u})$ 由平方和立方非线性项组成。本节中,方程 $u=\xi+\bar{\xi}$,$\dot{u}=\mathrm{i}\omega_1(\xi-\bar{\xi})$ 中 ω_1 的确定,不是采用 Nayfeh 建议的 $u=\xi+\bar{\xi}$ 和 $\dot{u}=\mathrm{i}\omega(\xi-\bar{\xi})$ 方法,而是根据振动过程中基频的变化确定。采用本节的方法,无论是关于周期解的稳定性,还是渐近解都很容易获得。作为算例,

用本节的方法计算了一般具有平方、立方强非线性系统的规范形及其渐近解、定常解，所得结果与数值仿真结果吻合得很好，而使用 Nayfeh(1993)提出的规范形方法研究该类问题则存在较大的误差。

5.8.1　强非线性系统的规范形

考虑二阶常微分方程

$$\ddot{u} + \omega^2 u = f(u, \dot{u}) \tag{5.8.1}$$

其中 $f(u,\dot{u})$ 由线性阻尼项及关于 u、$\dot{u}$ 的二阶、三阶齐次多项式组成。用复规范形方法研究上述方程，引入复变量 ξ，将方程通过复变换化成一阶方程

$$u = \zeta + \bar{\zeta}, \dot{u} = \mathrm{i}\omega_1(\zeta - \bar{\zeta}) \tag{5.8.2}$$

其中 ω_1 为待定的未知频率。考虑到振动过程中基频的变化，令 ω_1 为未知的基频，而不是如 Nayfeh(1993)令 ω 为基频。求解方程(5.8.2)得

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{2}\left(u - \frac{\mathrm{i}}{\omega_1}\dot{u}\right) \\ \bar{\zeta} &= \frac{1}{2}\left(u + \frac{\mathrm{i}}{\omega_1 u}\right) \end{aligned}\right\} \tag{5.8.3}$$

将式(5.8.3)中第一式对时间 t 求导，并考虑到式(5.8.1)、式(5.8.2)，得

$$\dot{\zeta} = \mathrm{i}\omega_1\zeta + \frac{\mathrm{i}\omega_1}{2}\left(\frac{\omega^2}{\omega_1^2} - 1\right)(\zeta + \bar{\zeta}) - \frac{\mathrm{i}}{2\omega_1}f \tag{5.8.4}$$

为了简化式(5.8.4)，引入接近恒同的非线性变换（陈予恕及张琪昌，1990）

$$\zeta = \eta + h(\eta, \bar{\eta}) + g(\eta, \bar{\eta}) \tag{5.8.5}$$

其中

$$h = \Gamma_1\eta^2 + \Gamma_2\eta\bar{\eta} + \Gamma_3\bar{\eta}^2 \tag{5.8.6}$$

$$g = \Delta_1\eta + \Delta_2\bar{\eta} + \Lambda_1\eta^3 + \Lambda_2\eta^2\bar{\eta} + \Lambda_3\bar{\eta}\eta^2 + \Lambda_4\bar{\eta}^3 \tag{5.8.7}$$

将式(5.8.5)代入式(5.8.4)得

$$\begin{aligned} \dot{\eta} = {} & \mathrm{i}\omega_1\eta + \mathrm{i}\omega_1(h+g) - \left(\frac{\partial h}{\partial\eta} + \frac{\partial g}{\partial\eta}\right)\eta - \left(\frac{\partial h}{\partial\bar{\eta}} + \frac{\partial g}{\partial\bar{\eta}}\right)\dot{\bar{\eta}} - \frac{\mathrm{i}}{2\omega_1}f \\ & + \frac{\mathrm{i}\omega_1}{2}\left(\frac{\omega^2}{\omega_1^2} - 1\right)(\eta + h + g + \bar{\eta} + \bar{h} + \bar{g}) \end{aligned} \tag{5.8.8}$$

将式(5.8.5)代入式(5.8.2)的第一式得

$$\begin{aligned} u = {} & \eta + \bar{\eta} + (\Delta_1 + \bar{\Delta}_2)\eta + (\bar{\Delta}_1 + \Delta_2)\bar{\eta} + (\Gamma_1 + \bar{\Gamma}_3)\eta^2 + (\Gamma_2 + \bar{\Gamma}_2)\eta\bar{\eta} + (\bar{\Gamma}_1 + \Gamma_3)\bar{\eta}^2 \\ & (\Lambda_1 + \bar{\Lambda}_4)\eta^3 + (\Lambda_2 + \bar{\Lambda}_3)\eta^2\bar{\eta} + (\bar{\Lambda}_2 + \Lambda_3)\eta\bar{\eta}^2 + (\bar{\Lambda}_1 + \Lambda_4)\bar{\eta}^3 \end{aligned} \tag{5.8.9}$$

为了消除 u 中的永年项 η、$\eta^2\bar{\eta}$，方程(5.8.9)应满足如下条件：

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= -\bar{\Delta}_2 \\ \Lambda_2 &= -\bar{\Lambda}_3 \end{aligned}\right\} \tag{5.8.10}$$

h 的表达式中有三个待定的常数，根据规范形理论(陈予恕，1982)，在方程(5.8.8)中不

含有二阶齐次多项式，由此可计算出这3个待定常数，从而将方程(5.8.8)中的二阶齐次多项式化简。g 的表达式中有6个待定的常数，化简了方程(5.8.8)中的二阶齐次多项式后，式(5.8.8)由6个单项式组成，其中2项为共振项，为了得到最简形式，令式(5.8.8)中4个非共振项等于零，可得到4个方程，再加上消除永年项的条件式(5.8.10)，可确定 g 的6个待定系数，从而得到 η 的最简单形式。

5.8.2 算例

考虑由式(5.8.1)所确定的具有平方、立方项强非线性系统的一般方程，其中 $f(u,\dot{u})=\mu\dot{u}-(\delta_1u^2+\delta_2\dot{u}^2)-(\alpha_1u^3+\alpha_2u^2\dot{u}+\alpha_3u\dot{u}^2+\alpha_4\dot{u}^3)$。利用上节所述方法，可得到

$$\Delta_1=\frac{-(\mathrm{i}\omega^2+\mu\omega_1-\mathrm{i}\omega_1^2)}{2\omega_1(-\mu+2\mathrm{i}\omega_1)},\Delta_2=\frac{-(\mathrm{i}\omega^2-\mu\omega_1-\mathrm{i}\omega_1^2)}{2\omega_1(\mu+2\mathrm{i}\omega_1)}$$

$$\Gamma_1=\frac{3(-\delta_1+\delta_2\omega_1^2)}{2(\omega^2-4\omega_1^2-2\mathrm{i}\omega_1\mu)},\Gamma_2=\frac{-\delta_1+\delta_2\omega_1^2}{\omega^2},\Gamma_3=\frac{-\delta_1+\delta_2\omega_1^2}{2(\omega^2-4\omega_1^2+2\mathrm{i}\omega_1\mu)}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_1=&\{2\omega^2[-\alpha_1+\omega_1(-\mathrm{i}\alpha_2+\omega_1\alpha_3+\mathrm{i}\omega_1^2\alpha_4)]+2[-2\mathrm{i}\omega_1^5\alpha_4+\delta_1^2+\mathrm{i}\omega_1\alpha_1\mu\\&+\omega_1^2(2\alpha_1-3\delta_1\delta_2-\alpha_2\mu)+\mathrm{i}\omega_1^3(2\alpha_2-\alpha_3\mu)+\omega_1^4(-2\alpha_3+2\delta_2^2+\alpha_4\mu)]\}/\\&[(\omega^2-4\omega_1^2-2\mathrm{i}\omega_1\mu)(\omega^2-9\omega_1^2-3\mathrm{i}\omega_1\mu)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_2=&\{\omega^4[3\alpha_1+\omega_1(\mathrm{i}\alpha_2+\omega_1\alpha_3+3\mathrm{i}\omega_1^2\alpha_4)]+8\omega_1\delta_1(\delta_1+\omega_1^2\delta_2)(2\omega_1+\mathrm{i}\mu)\\&+2\omega^2[-6\mathrm{i}\omega_1^5\alpha_4-3\delta_1^2-3\mathrm{i}\omega_1\alpha_1\mu+\omega_1^2(-6\alpha_1-3\delta_1\delta_2+\alpha_2\mu)-\mathrm{i}\omega_1^3(2\alpha_2+\alpha_3\mu)\\&+\omega_1^4(-2\alpha_3+2\delta_2^2+3\alpha_4\mu)]\}/[2\omega^2\omega_1(\omega_1+\mathrm{i}\mu)(\omega^2-4\omega_1^2-2\mathrm{i}\omega_1\mu)]\end{aligned}$$

$$\Lambda_3=-\bar{\Lambda}_2\quad(\bar{\Lambda}_2\text{ 表示 }\Lambda_2\text{ 的共轭})$$

$$\begin{aligned}\Lambda_4=&\{-4\mathrm{i}\omega_1^5\alpha_4+\omega^2(\alpha_1+\mathrm{i}\omega_1-\alpha+\mathrm{i}\omega_1\alpha_3+\omega_1^2\alpha_4)]-2\delta_1^2-2\mathrm{i}\omega_1\alpha_1\mu+\\&\omega_1^2(-4\alpha_1+6\delta_1\delta_2+2\alpha_2\mu)-2\mathrm{i}\omega_1^3(2\alpha_2-\alpha_3\mu)+\omega_1^4(4\alpha_3-4\delta_2^2-2\alpha_4\mu)]\}/\\&[(\omega^2-4\omega_1^2-2\mathrm{i}\omega_1\mu)(\omega^2-9\omega_1^2-3\mathrm{i}\omega_1\mu)]\end{aligned}$$

将 h、g 代入方程(5.8.8)，方程(5.8.8)成为仅含共振项的最简形式：

$$\begin{aligned}\dot{\eta}=&\frac{\mathrm{i}(\omega^2+\omega_1^2)}{2\omega_1+\mathrm{i}\mu}\eta+\frac{\eta^2\bar{\eta}}{\omega^2(2\omega_1+\mathrm{i}\mu)(\omega^2-4\omega_1^2-2\mathrm{i}\omega_1\mu)}\{\mathrm{i}\omega^4[3\alpha_1\\&+\omega_1(\mathrm{i}\alpha_2+\omega_1\alpha_3+3\mathrm{i}\omega_1^2\alpha_4)]+8\mathrm{i}\omega_1\delta_1(\delta_1+\omega_1^2\delta_2)(2\omega_1+\mathrm{i}\mu)\\&+2\omega^2[6\omega_1^5\alpha_4-3\mathrm{i}\delta_1^2+3\omega_1\alpha_1\mu-\mathrm{i}\omega_1^2(6\alpha_1+3\delta_1\delta_2-\alpha_2\mu)\\&+\omega_1^3(2\alpha_2+\alpha_3\mu)-\mathrm{i}\omega_1^4(2\alpha_3-2\delta_2^2-3\alpha_4\mu)]\}\end{aligned}\tag{5.8.11}$$

将式(5.7.5)代入方程组(5.8.2)的第一个方程并考虑到式(5.8.10)，得原系统的解为

$$\begin{aligned}u=&\eta+\bar{\eta}+(\Gamma_1+\bar{\Gamma}_3)\eta^2+(\Gamma_2+\bar{\Gamma}_2)\eta\bar{\eta}+(\bar{\Gamma}_1+\Gamma_3)\bar{\eta}^2+(\Lambda_1+\bar{\Lambda}_4)\eta^3\\&+(\bar{\Lambda}_1+\Lambda_4)\bar{\eta}^3\end{aligned}\tag{5.8.12}$$

算例 5.8.1　在 $f(u,\dot{u})$ 的表达式中令 $\alpha_2=\mu,\delta_1=\delta_2=0,\alpha_3=\alpha_4=0,\alpha_1=\beta$，则式(5.8.1)成为 Duffing-Van der Pol 算子：

$$\ddot{u}+\omega^2u=\mu(1-u^2)\dot{u}-\beta u^3\tag{5.8.13}$$

将 $\alpha_2=\mu,\delta_1=\delta_2=0,\alpha_3=\alpha_4=0,\alpha_1=\beta$ 代入式(5.8.11)及式(5.8.12),得到

$$\eta=\frac{\mathrm{i}(\omega^2+\omega_1^2)}{\mathrm{i}\mu+2\omega_1}\eta+\frac{3\mathrm{i}\beta-\mu\omega_1}{\mathrm{i}\mu+2\omega_1}\eta^2\bar{\eta} \tag{5.8.14}$$

$$u=\eta+\bar{\eta}+\frac{1}{2}\Lambda_1\eta^3-\Lambda_4\bar{\eta}^3 \tag{5.8.15}$$

为将 η 化为极坐标的形式,令

$$\eta=\frac{1}{2}a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 t} \tag{5.8.16}$$

将上式代入方程(5.8.14)得

$$\mathrm{i}\omega_1+\frac{\dot{a}}{a}=\frac{\mathrm{i}(\omega^2+\omega_1^2)}{\mathrm{i}\mu+2\omega_1}+\frac{3\mathrm{i}\beta-\mu\omega_1}{\mathrm{i}\mu+2\omega_1}\frac{a^2}{4} \tag{5.8.17}$$

将上式的实部与虚部分开并整理后,得

$$\dot{a}=\frac{\mu}{2}a\left(1-\frac{1}{4}a^2\right) \tag{5.8.18}$$

$$2\omega_1^2+\frac{\dot{a}}{a}\mu=(\omega^2+\omega_1^2)+3\beta\frac{a^2}{4} \tag{5.8.19}$$

现分析解的稳定性。在方程(5.8.18)中,令 $\dot{a}=0$ 得到定常解 $a=0$。现研究定常解的稳定性。当 $a<2$ 时,$\dot{a}>0$,当 $a>2$ 时,$\dot{a}<0$,所以当 $a=0$ 时,得到一稳态的解。将 $a=0$ 代入方程 (5.8.19),解得

$$\omega_1^2=\omega^2+3\beta \tag{5.8.20}$$

将方程(5.8.16)代入方程(5.8.15),考虑到 $a=0$ 和方程(5.8.20),得

$$\left.\begin{aligned}u&=2\cos(\omega_1 t)+A[B_1\cos(3\omega_1 t)+B_2\sin(3\omega_1 t)]\\ \omega_1^2&=\omega^2+3\beta\end{aligned}\right\} \tag{5.8.21}$$

其中

$$\begin{cases}A=2/(\omega^4+9\mu^2\omega_1^2-18\omega^2\omega_1^2+81\omega_1^4)\\ B_1=-2\beta\omega^2+18\beta\omega_1^2+6\mu^2\omega_1^2\\ B_2=6\beta\mu\omega_1+2\mu\omega^2\omega_1-18\mu\omega_1^3\end{cases}$$

根据 Nayfeh(1993)提出的方法,得到 Duffing-Van der pol 振子的稳态解为

$$\begin{cases}u=2\cos(\omega_1^* t)+\dfrac{\beta}{4\omega^2}\cos(3\omega_1^* t)-\dfrac{\mu}{4\omega}\sin(3\omega_1^* t)\\ \omega_1^*=\omega+\dfrac{3\beta}{2\omega}\end{cases}$$

图 5-1 所示为不同参数下极限环的相平面图。线 1 为数值积分的结果。线 2 为根据本节给出的方法得到的结果。线 3 为采用 Nayfeh(1993)方法所得的结果。在用数值积分求稳态解时,其初始条件为 $u=2,\mathrm{d}u/\mathrm{d}t=0$。此时,由本节给出的方法的计算结果及用 Nayfeh(1993)的方法所得结果均与数值积分结果吻合得较好。如图(5-1(c)、(d)中所示),随着非线性项的加强,由 Nayfeh(1993)的方法所得的结果与数值积分结果相差较大,甚至其拓朴结

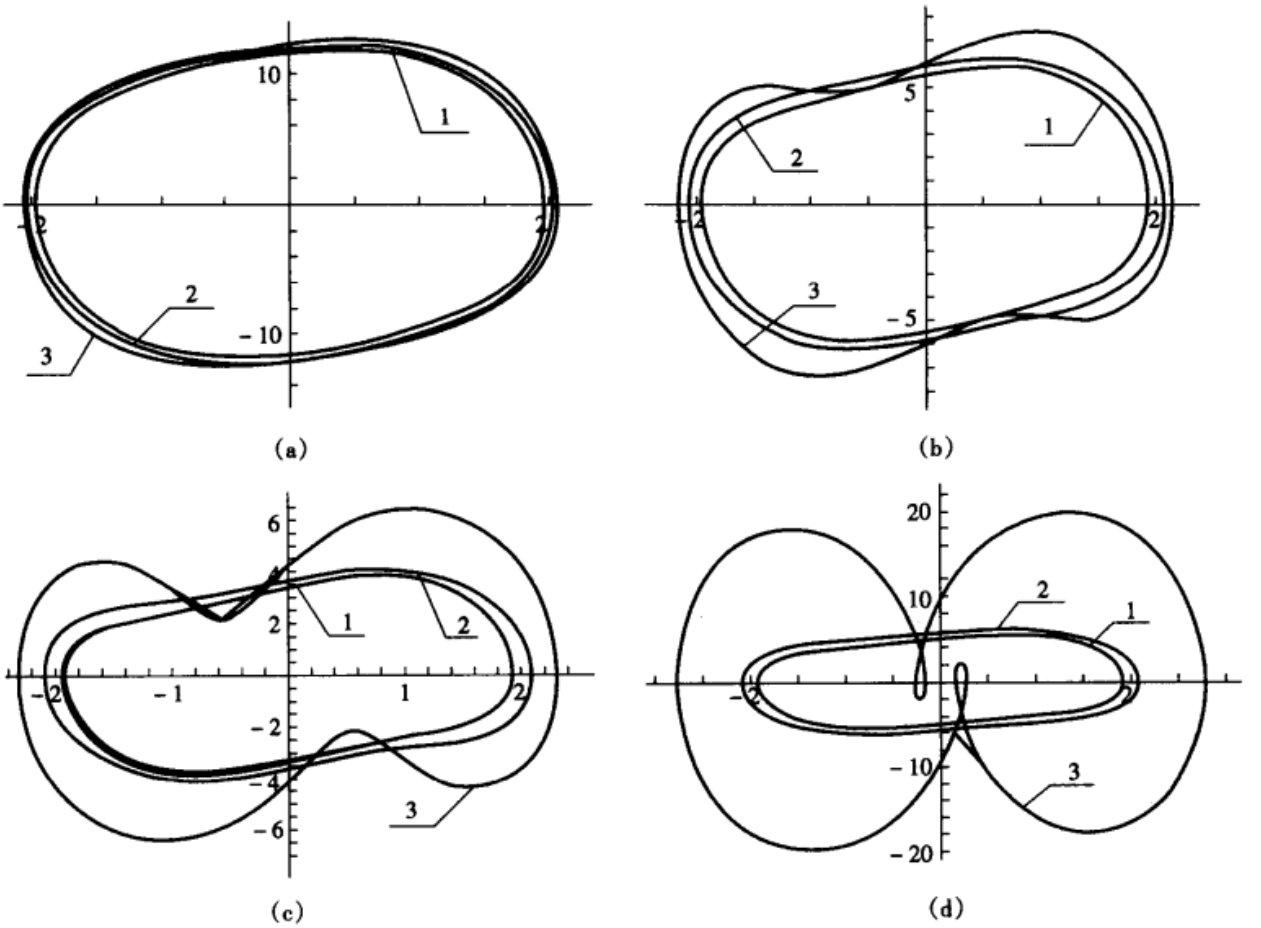


图 5-1 不同参数下的 Duffing-Van deBr Pol 系统的相平面图

(a)$\omega=\beta=5,\mu=1$;(b)$\omega=\beta=2,\mu=1$;(c)$\omega=\beta=1,\mu=1$;(d)$\omega=\mu=1,\beta=3$

构也不相同,而用本节的方法则与数值仿真结果仍然吻合得较好。表 5-1 所列为三种方法所对应的稳态解的周期。由该表可见,Nayfeh(1993)的方法随非线性的加强而误差加大,而采用本节方法仍具有较高的精度。因此由 Nayfeh(1993)所提出的方法不适于强非线性振动,因为它是以弱非线性为前提的,而由本节的方法即使在强非线性时也与数值计算仿真结果吻合得很好。

表 5-1 三种方法所得周期的比较

图	数值	本节	Nayfeh
(a)	1.006	0.993	0.967
(b)	2.060	1.987	1.795
(c)	3.320	3.142	2.513
(d)	2.120	1.987	1.142

算例 5.8.2　Duffing-Van der Pol-Rayleigh 算子。

①在 $f(u,\dot{u})$的表达式中令 $\delta_1=\delta_2=0,\alpha_1=1.0,\alpha_2=3.0,\alpha_3=3.0,\alpha_4=2.0,\mu=3.0,\omega=1.0$,则得到 Duffing-Van der Pol-Rayleigh 系统。

将上述参数代入式(5.8.11),可算得其定常解的振幅

$$a=0.956\ 480\ 117\ 677\ 662\ 988$$

频率

$$\omega_1=1.298\ 514\ 790\ 687\ 617\ 54$$

将上述参数代入式(5.8.12),可算得其原系统的解为

$$u=0.956\ 48\cos(\omega_1 t)+0.005\ 53\cos(3\omega_1 t)+0.012\ 02\sin(3\omega_1 t)$$

Nayfeh 结果为,$a=1.154\ 70$, 圆频率 $\omega_1^*=1.5$,

$$u=1.154\ 70\cos(\omega_1^* t)+0.048\ 11\cos(3\omega_1^* t)-0.048\ 11\sin(3\omega_1^* t)$$

这组参数下所对应的相图如图 5-2 (a)所示。

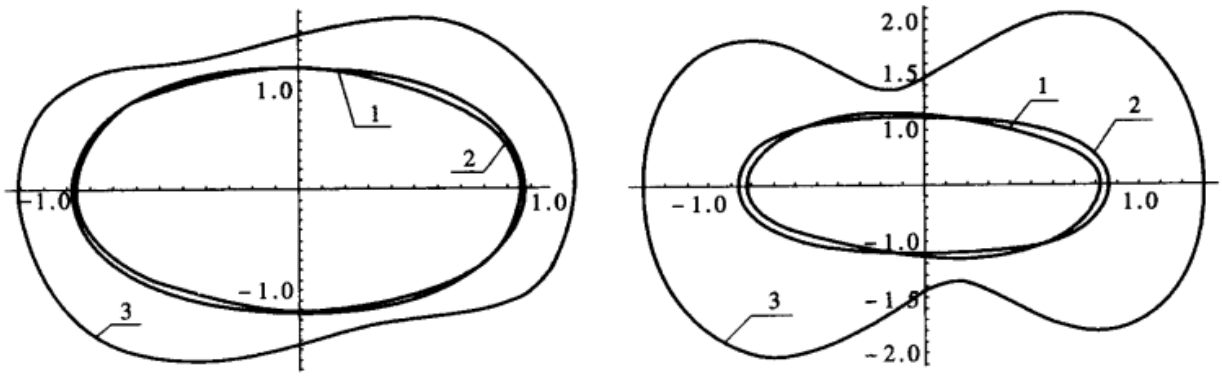


图 5-2　不同参数下的强非线性 Duffing-Vander Pol-Rayleigh 算子相平面图

(a)$\alpha_1=1.0$;(b)$\alpha_1=3.0$

②在 $f(u,\dot{u})$的表达式中令 $\delta_1=\delta_2=0,\alpha_1=3.0,\alpha_2=3.0,\alpha_3=3.0,\alpha_4=2.0,\mu=3.0,\omega=1.0$。将上述参数代入式(5.8.11),可算得其定常解的振幅

$$a=0.816\ 496\ 580\ 927\ 726\ 078$$

圆频率

$$\omega_1=1.581\ 138\ 830\ 084\ 189\ 53$$

将该参数代入式(5.8.12),可算得其原系统的解为

$$u=0.816\ 49\cos(\omega_1 t)+0.003\ 99\cos(3\omega_1 t)+0.022\ 7\sin(3\omega_1 t)$$

Nayfeh 结果为:$a=1.154\ 70$, 圆频率 $\omega_1^*=2.5$,

$$u=1.154\ 70\cos(\omega_1^* t)+0.144\ 34\cos(3\omega_1^* t)-0.048\ 11\sin(3\omega_1^* t)$$

这组参数下所对应的相图如图 5-2(b)所示。

本节给出了一种研究强非线性自治振动系统渐近解及其稳定性的规范形方法。对于给定的系统，只要通过简单的代数计算即可计算出稳态的周期解，并可方便地判断其稳定性。即使在非线性项很强的情况下，用本方法所得到的结果也与数值仿真计算结果吻合得很好。本方法还有待于进一步推广到研究非线性非自治振动系统和多自由度的强非线性振动系统。

5.9 计算半单系统规范形的通用程序方法

规范形理论在动力系统、常微分方程及非线性振动等领域得到了广泛的应用。对于一般的半单系统(既包含中心流形又包含稳定流形的系统)，人们通常综合采用中心流形理论和规范形理论计算系统的规范形(张琪昌，1991；Yu，1998；张伟亿等 2000)。本节直接采用规范形理论计算高维系统的规范形。该方法不需经中心流形理论对系统进行降维，即可计算出所研究系统的规范形系数及其变换。为便于程序化，采用了一步变换的技术。这种方法可被用来计算高维(可很方便地将现有程序拓展到 9 维以上)系统的高阶(没有阶数的限制)规范形。这种方法借助于 Mathematica 符号语言实验了程序化。由于比原有方法采用了较少的变换，因而这种方法更加简捷、高效。本节通过算例验证了这种方法的正确性和有效性。

5.9.1 不经中心流形降维计算规范形

考虑半单系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \varepsilon \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\varepsilon) \quad (\boldsymbol{x}\in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\varepsilon):\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n) \tag{5.9.1}$$

这里 x 上面的点表示对时间的微分。为便于理论分析和程序化，此处引入了无量纲的小参数 ε 用来表示齐次多项式的阶数，并假设该系统只由稳定流形和中心流形组成，也就是不存在正实部的特征值。$\boldsymbol{J}_0 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n_0})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的具有零实部的特征值，具有负实部的特征值由 $\boldsymbol{J}_1 = \mathrm{diag}(\lambda_{n_0+1}, \lambda_{n_0+2}, \cdots, \lambda_n)$ 表示。可以得出 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{J}_0, \boldsymbol{J}_1)$，这里 $\boldsymbol{T}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量。

令 $\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{w} \quad \boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$，其中 $\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 分别为与零实部特征值和负实部特征值对应的变量。方程(5.9.1)可写为

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{w}} \\ \dot{\boldsymbol{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{J}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}) \\ \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}) \end{bmatrix} \tag{5.9.2}$$

定理 5.9.1 如果方程(5.9.2)的线性部分可对角化(半单情况)，则其规范形为所有共振单项式的线性组合(张琪昌，1991)。

现在证明为什么可以直接计算方程(5.9.2)的规范形而不必经中心流形降维。遵照定

理 5.9.1，方程(5.9.1)的规范形为全体共振单项式的组合，即只包含满足下列条件的项

$$\langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\lambda} \rangle - \lambda_s = \sum_{i=1}^{n} m_i \lambda_i - \lambda_s = 0 \tag{5.9.3}$$

其中 m_i 为大于零的整数，现对式(5.9.3)进行分析。

①如果当 s 小于 n_0，若使方程(5.9.3)成立，则方程(5.9.3) 不包含 i 大于 n_0 的项。否则因为 m_i 总是大于零，而 λ_i 的实部小于或者等于零，λ_s 的实部总是等于零，方程(5.9.3)不可能成立。所以前 n_0 个规范形方程中只包含中心流形项。

②如果当 s 大于 n_0，若使方程(5.9.3)成立，则其规范形是中心流形与稳定流形的组合。

5.9.2　求解规范形及其相应的变换

对于非线性动力学系统(5.9.2)，根据 Nayfeh 的一步变换技术，引入下列变换：

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{u} + \varepsilon \boldsymbol{W}^2(\boldsymbol{u}) + \varepsilon^2 \boldsymbol{W}^3(\boldsymbol{u}) + \cdots + \varepsilon^{n-1} \boldsymbol{W}^n(\boldsymbol{u}) + \cdots \tag{5.9.4}$$

则可将原系统化为简单形式，即规范形形式：

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{u} + \varepsilon \boldsymbol{C}^2(\boldsymbol{u}) + \varepsilon^2 \boldsymbol{C}^3(\boldsymbol{u}) + \cdots + \varepsilon^{n-1} \boldsymbol{C}^n(\boldsymbol{u}) + \cdots \tag{5.9.5}$$

将式(5.9.4)代入式(5.9.2)，得

$$\begin{aligned} &[\boldsymbol{I} + \varepsilon D_u \boldsymbol{W}^2(\boldsymbol{u}) + \varepsilon^2 D_u \boldsymbol{W}^3(\boldsymbol{u}) + \cdots + \varepsilon^{n-1} D_u \boldsymbol{W}^3(\boldsymbol{u}) + \cdots]\dot{\boldsymbol{u}} \\ &= \boldsymbol{J}[u + \varepsilon \boldsymbol{W}^2(\boldsymbol{u}) + \varepsilon^2 \boldsymbol{W}^3(\boldsymbol{u}) + \cdots + \varepsilon^{n-1} \boldsymbol{W}^n(\boldsymbol{u})] + \varepsilon \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u} + \varepsilon \boldsymbol{W}^2(\boldsymbol{u}) + \cdots + \varepsilon^{n-1} \boldsymbol{W}^n(\boldsymbol{u}) + \cdots) \end{aligned} \tag{5.9.6}$$

对于经典的规范形理论，或者求矩阵

$$[\boldsymbol{I} + \varepsilon D_u \boldsymbol{W}^2(\boldsymbol{u}) + \varepsilon^2 D_u \boldsymbol{W}^3(\boldsymbol{u}) + \cdots \varepsilon^{n-1} D_u \boldsymbol{W}^n(\boldsymbol{u}) + \cdots]$$

的逆矩阵，或者需要对此矩阵的逆矩阵进行近似展开。在此将式(5.9.5)代入式(5.9.6)，并比较等式两端 ε 同阶次的系数，可得

$$\varepsilon^1 : D\boldsymbol{W}^2 \boldsymbol{J}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{J}\boldsymbol{W}^2 = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}, \varepsilon)|_{\varepsilon^0} - \boldsymbol{C}^2 \tag{5.9.7}$$

$$\varepsilon^2 : D\boldsymbol{W}^3 \boldsymbol{J}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{J}\boldsymbol{W}^3 = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}, \varepsilon)|_{\varepsilon^1} - D\boldsymbol{W}^2 \boldsymbol{C}^2 - \boldsymbol{C}^3 \tag{5.9.8}$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon^{n-1} : D\boldsymbol{W}^n \boldsymbol{J}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{J}\boldsymbol{W}^n = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}, \varepsilon)|_{\varepsilon^{n-2}} - [D\boldsymbol{W}^{n-1} \boldsymbol{C}^2 + D\boldsymbol{W}^{n-2} \boldsymbol{C}^3 + \cdots + D\boldsymbol{W}^2 \boldsymbol{C}^{n-1}] - \boldsymbol{C}^n \tag{5.9.9}$$

此即求系统(5.9.2)的规范形及其相应变换所需要的方程。若能直接求得 $\boldsymbol{W}^m$ 和 $\boldsymbol{C}^m$，即可求得系统(5.9.2)的直至 m 阶的规范形，但是，在通常情况下，并不能精确求解，而只能渐进展开，求得其级数形式的解。假设非线性变换项为

$$\boldsymbol{W}^m(\boldsymbol{u}) = \sum_{m_1 + m_2 + \cdots + m_n = m} \boldsymbol{W}_{m_1 m_2 \cdots m_n} u_1^{m_1} u_2^{m_2} \cdots u_n^{m_n} \tag{5.9.10}$$

第 m 阶的规范形为

$$\boldsymbol{C}^m(\boldsymbol{u}) = \sum_{m_1 + m_2 + \cdots + m_n = m} \boldsymbol{C}_{m_1 m_2 \cdots m_n} u_1^{m_1} u_2^{m_2} \cdots u_n^{m_n} \tag{5.9.11}$$

对于同调方程(5.9.9)的右端项

$$F(\boldsymbol{u},\varepsilon)|_{\varepsilon^{n-2}} - [DW^{n-1}C^2 + DW^{n-2}C^3 + \cdots + DW^2 C^{n-1}]$$

$$= f^m(\boldsymbol{u}) = \sum_{m_1+m_2+\cdots+m_n=m} f_{m_1 m_2 \cdots m_n} u_1^{m_1} u_2^{m_2} \cdots u_n^{m_n} \tag{5.9.12}$$

由于 $\boldsymbol{J}$ 为半单矩阵,并且已经将其对角化,所以,$D_u W^n(\boldsymbol{u})\boldsymbol{J}u$ 可以写为

$$\begin{aligned}
&\Big(D_u \sum_{m_1+m_2+\cdots+m_n=m} W_{m_1 m_2 \cdots m_n} u_1^{m_1} u_2^{m_2} u_3^{m_3} \cdots u_n^{m_n}\Big)(\boldsymbol{J}u)\\
&= \Big(\sum_{m_1+m_2+\cdots m_n=m} D_u(W_{m_1 m_2 \cdots m_n} u_1^{m_1} u_2^{m_2} u_3^{m_3} \cdots u_n^{m_n})\Big)(\boldsymbol{J}u)\\
&= \sum_{m_1+m_2+\cdots+m_n=m} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u_i}(W_{m_1 m_2 \cdots m_n} u_1^{m_1} u_2^{m_2} u_3^{m_3} \cdots u_n^{m_n})\lambda_i u_i\Big) \qquad (5.9.13)\\
&= \sum_{m_1+m_2+\cdots m_n=m} (m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \cdots + m_n\lambda_n) W_{m_1 m_2 \cdots m_n} u_1^{m_1} u_2^{m_2} u_3^{m_3} \cdots u_n^{m_n}\\
&= \sum_{m_1+m_2+\cdots m_n=m} \lambda_0 W_{m_1 m_2 \cdots m_n} u_1^{m_1} u_2^{m_2} u_3^{m_3} \cdots u_n^{m_n}
\end{aligned}$$

式中 $\lambda_0 = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \cdots + m_n\lambda_n$。

将式(5.9.10)、式(5.9.11)、式(5.9.12)、式(5.9.13)代入方程(5.9.9),可得

$$(\lambda_0 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}) W_{m_1 m_2 \cdots m_n} = f_{m_1 m_2 \cdots m_n} - C_{m_1 m_2 \cdots m_n} \tag{5.9.14}$$

从而将同调方程化为简单的代数方程来求解。上述方程能否求解取决于 $\boldsymbol{A}_0 = (\lambda_0 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{J})$是否奇异,现分别进行讨论。

①当 $\boldsymbol{A}_0$ 为非奇异的时,$\boldsymbol{A}_0$ 无零特征值,即满足$\langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\lambda} \rangle - \lambda_s = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \cdots + m_n\lambda_n - \lambda_s \neq 0$,不论 $C_{m_1 m_2 \cdots m_n}$ 如何取值,方程组(5.9.14)总可以解出。即该阶的项为非共振项,根据规范形理论,该阶项不出现在最终的规范形中,所以,将 $C_{m_1 m_2 \cdots m_n}$ 取为零,即

$$C_{m_1 m_2 \cdots m_n} = 0 \tag{5.9.15}$$

从而得到非线性变换项的系数

$$W_{m_1 m_2 \cdots m_n} = \boldsymbol{A}_0^{-1} f_{m_1 m_2 \cdots m_n} \tag{5.9.16}$$

②当 $\boldsymbol{A}_0$ 为奇异的时,$\boldsymbol{A}_0$ 有零特征值,即存在某一个确定的 λ, 使得如下等式成立:

$$\langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\lambda} \rangle - \lambda_s = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \cdots + m_n\lambda_n - \lambda_s = 0$$

在这种情形下,$\boldsymbol{A}_0$ 是奇异的,因而 $W_{m_1 m_2 \cdots m_n}$ 不能唯一地确定。

假设 $C^s_{m_1 m_2 \cdots m_n}$ 为共振项,则根据规范形理论,它将出现在规范形表达中,并且 $C^s_{m_1 m_2 \cdots m_n} \in \mathrm{Ker}\, \boldsymbol{A}_0$。假设 $\boldsymbol{A}_0$ 的线性补算子为 $\boldsymbol{A}^*$,$\boldsymbol{A}_0$ 中具有零特征值的根的个数为 n_s,则 $\boldsymbol{A}_0 = \mathrm{diag}(0,0,\cdots,0,\lambda_{n_s+1},\lambda_{n_s+2},\cdots\lambda_n)$,$\boldsymbol{A}^* = \mathrm{diag}(1,1,\cdots 1,0,0,\cdots,0)$. 其中 $\boldsymbol{A}^*$ 中 1 的个数为 n_s,0 的个数为 $n - n_s$。因而,$\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}^*$ 是非奇异的,方程(5.9.14)可写为

$$\boldsymbol{C}_{m_1 m_2 \cdots m_n} = \boldsymbol{A}^{*} \overline{\boldsymbol{A}}^{-1} \boldsymbol{f}_{m_1 m_2 \cdots m_n} \tag{5.9.17}$$

$$\boldsymbol{W}_{m_1 m_2 \cdots m_n} = \overline{\boldsymbol{A}}^{-1} (\boldsymbol{f}_{m_1 m_2 \cdots m_n} - \boldsymbol{C}_{m_1 m_2 \cdots m_n}) \tag{5.9.18}$$

方程(5.9.14)至(5.9.18)即是计算规范形及其相应变换所需的方程。综合以上的推导可知,对于任意维的半单分岔问题只需要解与原方程同维数的代数方程,即可求得相应的规范形及其相应的非线性变换。

5.9.3　Mathematica 电算程序简介及算例

该方法已经实现了程序化,可以用于计算 9 维以内任意维数的一阶常微分方程组的规范形。维数的设置仅仅是因为考虑到计算机内存的限制。计算机符号程序,包括用 Mathematica 编写的源代码,都在附录 2 中 5.9 给出。程序构建格式如下。

1.创建输入文件

$$\dot{x} = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

输入以 x[i]为状态变量的多项式 f[i]及多项式的阶数 ε,并将它们存入运行的子文件夹中。

2.计算规范形及相应的非线性变换

①第一行设置输入、输出文件路径;

②第二行读取输入文件;

③把方程由实数坐标形式转换为复坐标形式;

④在复数形式下,计算规范形及相应的非线性变换;

⑤把规范形转换为实坐标形式;

⑥把规范形转换为极坐标形式。

3.程序特色

本节通过自定义 4 个函数,使得该计算程序更加高效和简单。

①Jacobi[funs _ List, vars _ List]: = Outer[D, funs, vars],这个方程用来计算任意函数(funs)关于变量(vars)的雅可比矩阵。

②Co3[i]_: = D[b[k, nn], {u[i], nk[i]}]/nk[i]! 此方程用来计算非线性函数中 nn 阶齐次单项式的系数。

③ne[k]_: = j-Sum[nk[i], {i, 1, k - 1}]。

综合运用②、③两个函数再加上表单赋值语句 Table[ne[i] = 0, {i, n, 8}],使现在的程序更简单。使得将几个单独的程序组成一个程序成为可能。如果想要研究一个 m 高于 9 维的系统,只要在程序中增加 $2 \times (m - 9)$句即可。此程序很容易被扩展为计算高维规范形的程序。

④conjug = Complex[a _, b _]: - > Complex[a, - b]。此方程用于计算符号形式的表达式的复共轭。

为了计算高阶规范形，应将 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+P(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}+\sum p_i(\boldsymbol{y})$ 直接代入方程 $f(\boldsymbol{x})$。在取代过程中，可以通过智能判断，除去超出计算需要的高阶项。这样，程序变得更加有效。

规范形变量在极坐标形式下的排列次序取决于相应的特征值，先是具有负实部特征值的变量，然后是具有零实部特征值的变量。

为了验证目前方法的高效实用性，下面给出三个算例。

例 5.9.1 计算如下五维系统的五阶规范形：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\ -1&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&-1&1\\ 0&0&0&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}+\varepsilon\begin{bmatrix}x_1^2-x_1x_3\\ x_1^2+x_1x_4+\varepsilon x_2^3\\ x_1^2\\ x_1^2\\ x_2^2\end{bmatrix}$$

求得这个系统的雅可比矩阵在平衡点 $x_k=0,k=1,2,\cdots,5$ 处的特征值为 ± i、－1 和 －1 ± i。它们中的两个具有零实部，为二维中心流形。

输入文件为：

```
n = 5;
norder = 5;
f[1] = x[2] + epsilon (x[1]^2 - x[1] x[3]);
f[2] = - x[1] + epsilon (x[2]^2 + x[1] x[4] + epsilon x[2]^3);
f[3] = - x[3] + epsilon x[1]^2;
f[4] = - x[4] + x[5] + epsilon x[1]^2;
f[5] = - x[4] - x[5] + epsilon x[2]^2;
```

系统在极坐标下的五阶规范形为

$$\dot{u}_1=-u_1+\frac{29}{120}\varepsilon^3\cos(\theta_1-\theta_2)r_1r_2^3-\frac{1}{10}\varepsilon^3\sin(\theta_1-\theta_2)r_1r_2^3+\frac{3}{5}r_2^3u_1+\frac{619}{750}\varepsilon^4r_2^4u_1$$

$$\dot{r}_1=-r_1+\frac{1}{20}\varepsilon^2r_1r_2^2+\frac{143\,111}{612\,000}\varepsilon^4r_1r_2^4+\frac{137}{4\,800}\varepsilon^4\cos 2(\theta_1-\theta_2)r_1r_2^4$$
$$-\frac{1\,229}{4\,800}\varepsilon^4\sin2(\theta_1-\theta_2)r_1r_2^4-\frac{7}{60}\varepsilon^3\cos(\theta_1-\theta_2)r_2^3u_1-\frac{1}{4}\varepsilon^3\sin(\theta_1-\theta_2)r_2^3u_1$$

$$\dot{\theta}_1=1+\frac{3}{20}\varepsilon^2r_2^2-\frac{4\,271}{51\,000}\varepsilon^4r_2^4-\frac{1\,229}{4\,800}\varepsilon^4\cos2(\theta_1-\theta_2)r_2^4-\frac{137}{4\,800}\varepsilon^4\sin 2(\theta_1-\theta_2)r_2^4$$
$$-\frac{1}{4r_1}\cos(\theta_1-\theta_2)\varepsilon^3r_2^3u_1+\frac{7}{60r_1}\varepsilon^3\sin(\theta_1-\theta_2)r_2^3u_1$$

$$\dot{r}_2=\frac{3}{40}\varepsilon^3r_2^3-\frac{14\,867}{68\,000}\varepsilon^4r_2^5$$

$$\dot{\theta}_2=1-\frac{7}{12}\varepsilon^2r_2^2+\frac{5\,691\,403}{14\,688\,000}\varepsilon^4r_2^4$$

例 5.9.2　计算下列方程的五阶规范形：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_5\\ \dot{x}_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&-1&1\\0&0&0&0&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}+\varepsilon\begin{bmatrix}-(x_1-x_2-x_4)^2\\-(x_1-x_2+x_5)^2\\-(x_1-x_2+x_4)^2\\(x_1-x_5)^2\\(x_1-x_4)^2\\(x_2+x_5)^2\end{bmatrix},$$

可求得方程的雅可比矩阵在原点的特征值为 0、± i、− 1 和 − 1 ± i。规范形具有三维中心流形。

输入文件为

```
n = 6;
norder = 5;
f[1] = - epsilon (x[1] - x[2] - x[4])^2;
f[2] = x[3] - epsilon (x[1] - x[2] + x[5])^2;
f[3] = - x[2] - epsilon (x[2] - x[3] + x[4])^2;
f[4] = - x[4] + epsilon (x[1] - x[5])^2;
f[5] = - x[5] + x[6] + epsilon (x[1] - x[4])^2;
f[6] = - x[5] - x[6] + epsilon (x[2] + x[5])^2;
```

极坐标形式的规范形为

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 =& -u_1+\frac{11}{12}\varepsilon^3\cos(\theta_1-\theta_2)r_1r_2^3+\frac{163}{60}\varepsilon^3\sin(\theta_1-\theta_2)r_1r_2^3-\frac{79}{40}\varepsilon^4r_2^4u_1\\&-2\varepsilon^2\cos(\theta_1-\theta_2)r_1r_2u_4-\frac{7\,789}{900}\varepsilon^4\cos(\theta_1-\theta_2)r_1r_2^3u_4+2\varepsilon^2\sin(\theta_1-\theta_2)r_1r_2u_4\\&+\frac{4\,601}{450}\varepsilon^4\sin(\theta_1-\theta_2)r_1r_2^3u_4-7\varepsilon^3r_2^2u_1u_4-\frac{3}{5}\varepsilon^3\cos(\theta_1-\theta_2)r_1r_2u_4^2\\&-\frac{39}{5}\varepsilon^3\sin(\theta_1-\theta_2)r_1r^2u_4^2-4\varepsilon^2u_1u_4^2-\frac{303}{5}\varepsilon^4r_2^2u_1u_4^2+\frac{1\,163}{50}\varepsilon^4\cos(\theta_1-\theta_2)r_1r_2u_4^3\\&-\frac{991}{50}\varepsilon^4\sin(\theta_1-\theta_2)r_1r_2u_4^3-2\varepsilon^3u_1u_4^3+18\varepsilon^4u_1u_4^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{u}_2 =& -\frac{1}{2}\varepsilon r_2^2-\frac{411}{160}\varepsilon^3r_2^4-2\varepsilon^2r_2^2u_4-\frac{503}{800}\varepsilon^4r_2^4u_4-\varepsilon u_4^2+\frac{33}{8}\varepsilon^3r_2^2u_4^2+2\varepsilon^2u_4^3\\&+\frac{1\,013}{40}\varepsilon^4r_2^2u_4^3+5\varepsilon^3u_4^4-\frac{11}{2}u_4^5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{r}_1 =& -r_1-\frac{1}{5}\varepsilon^2r_1r_2^2-\frac{1}{20}\varepsilon^2\cos 2(\theta_1-\theta_2)r_1r_2^2+\frac{67}{61\,200}\varepsilon^4r_1r_2^4\\&-\frac{1\,563\,767}{244\,800}\varepsilon^4\cos2(\theta_1-\theta_2)r_1r_2^4-\frac{9}{40}\varepsilon^2\sin2(\theta_1-\theta_2)r_1r_2^2\end{aligned}$$

$$-\frac{288\,671}{27\,200}\varepsilon^4\sin2(\theta_1-\theta_2)r_1r_2^4+\frac{137}{120}\varepsilon^3\cos(\theta_1-\theta_2)r_2^3u_1$$

$$-\frac{91}{120}\varepsilon^3\sin(\theta_1-\theta_2)r_2^3u_1-\frac{82}{45}\varepsilon^3r_1r_2^2u_4-\frac{73}{100}\varepsilon^3\cos2(\theta_1-\theta_2)r_1r_2^2u_4$$

$$-\frac{137}{75}\varepsilon^3\sin2(\theta_1-\theta_2)r_1r_2^2u_4+\varepsilon^2\cos(\theta_1-\theta_2)r_2u_1u_4-\frac{727}{150}\varepsilon^4\cos(\theta_1-\theta_2)r_2^3u_1u_4$$

$$+3\varepsilon^2\sin(\theta_1-\theta_2)r_2u_1u_4+\frac{9\,469}{360}\varepsilon^4\sin(\theta_1-\theta_2)r_2^3u_1u_4+\frac{3\,881}{900}\varepsilon^4r_1r_2^2u_4^2$$

$$-\frac{35\,947}{3\,000}\varepsilon^4\cos2(\theta_1-\theta_2)r_1r_2^2u_4^2-\frac{16\,211}{12\,000}\sin2(\theta_1-\theta_2)r_1r_2^2u_4^2$$

$$-\frac{69}{10}\varepsilon^3\cos(\theta_1-\theta_2)r_2u_1u_4^2+\frac{97}{10}\varepsilon^3\sin(\theta_1-\theta_2)r_2u_1u_4^2-\frac{3}{5}\varepsilon^3r_1u_4^3$$

$$-\frac{773}{20}\varepsilon^4\cos(\theta_1-\theta_2)r_2u_1u_4^3-\frac{933}{20}\varepsilon^4\sin(\theta_1-\theta_2)r_2u_1u_4^3+\frac{519}{50}\varepsilon^4r_1u_4^4$$

$$\dot{\theta}_1=1+\frac{49}{60}\varepsilon^2r_2^2-\frac{9}{40}\varepsilon^2\cos2(\theta_1-\theta_2)r_2^2+\frac{567\,587}{108\,800}\varepsilon^4r_2^4-\frac{288\,671}{272\,000}\varepsilon^4\cos2(\theta_1-\theta_2)r_2^4$$

$$+\frac{1}{20}\varepsilon^2r_2^2\sin2(\theta_1-\theta_2)+\frac{1\,563\,767}{2\,448\,000}\varepsilon^4\sin2(\theta_1-\theta_2)r_2^4-\frac{91}{120r_1}\varepsilon^3\cos(\theta_1-\theta_2)r_2^3u_1$$

$$-\frac{137}{120r_1}\varepsilon^3\sin(\theta_1-\theta_2)r_2^3u_1+\frac{1}{10}\varepsilon^3r_2^2u_4-\frac{137}{75}\varepsilon^3\cos2(\theta_1-\theta_2)r_2^2u_4$$

$$+\frac{73}{100}\varepsilon^3\sin2(\theta_1-\theta_2)r_2^2u_4+\frac{3}{r_1}\varepsilon^2\cos(\theta_1-\theta_2)r_2u_1u_4+\frac{9\,469}{360r_1}\varepsilon^4\cos(\theta_1-\theta_2)r_2^3u_1u_4$$

$$-\frac{1}{r_1}\varepsilon^2\sin(\theta_1-\theta_2)r_2u_1u_4+\frac{727}{150r_1}\varepsilon^4\sin(\theta_1-\theta_2)r_2^3u_1u_4-\frac{5}{2}\varepsilon^2u_4^2$$

$$-\frac{50\,503}{3\,600}\varepsilon^4r_2^2u_4^2-\frac{16\,211}{12\,000}\varepsilon^4\cos2(\theta_1-\theta_2)r_2^2u_4^2+\frac{35\,947}{3\,000}\varepsilon^4\sin2(\theta_1-\theta_2)r_2^2u_4^2$$

$$+\frac{97}{10r_1}\varepsilon^3\cos(\theta_1-\theta_2)r_2u_1u_4^2+\frac{69}{10r_1}\varepsilon^3\sin(\theta_1-\theta_2)r_2u_1u_4^2-\frac{11}{5}\varepsilon^3u_4^3$$

$$-\frac{933}{20r_1}\varepsilon^4\cos(\theta_1-\theta_2)r_2u_1u_4^3+\frac{773}{20r_1}\varepsilon^4\sin(\theta_1-\theta_2)r_2u_1u_4^3+\frac{1\,341}{100}\varepsilon^4u_4^4$$

$$\dot{r}_2=-\frac{1}{40}\varepsilon^2r_2^3-\frac{75\,597}{136\,000}\varepsilon^4r_2^5+\varepsilon r_2u_4+\frac{83}{50}\varepsilon^3r_2^3u_4+\frac{1}{2}\varepsilon^2r_2u_4^2+\frac{7\,423}{1\,000}\varepsilon^4r_2^3u_4^2$$

$$-\frac{53}{20}\varepsilon^3r_2u_4^3+\frac{759}{100}\varepsilon^4r_2u_4^4$$

$$\dot{\theta}_2=1-\frac{67}{40}\varepsilon^2r_2^2-\frac{9\,022\,679}{816\,000}\varepsilon^4r_2^4+\frac{7}{100}\varepsilon^3r_2^2u_4+\frac{3}{2}\varepsilon^2u_4^2+\frac{192\,391}{6\,000}\varepsilon^4r_2^2u_4^2$$

$$+\frac{33}{10}\varepsilon^3u_4^3-\frac{219}{50}\varepsilon^4u_4^4$$

例 5.9.3　计算下列方程的五阶规范形：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_5\\ \dot{x}_6\\ \dot{x}_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0&0\\ -1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&1\\ 0&0&0&0&0&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7\end{bmatrix}+\varepsilon\begin{bmatrix}\varepsilon(x_1^3-2x_1x_3^2-x_1^2x_5+5x_2x_6^2)\\ \varepsilon(x_3^3-2x_2^2x_4+x_1x_5x_6)\\ \varepsilon(x_1^2x_3+3x_1^2x_4)\\ \varepsilon(4x_3^3-x_3^2x_4)\\ (x_1-x_5)^2\\ (x_1-x_4)^2\\ (x_2-x_6)^2\end{bmatrix}$$

可求得雅可比矩阵在原点的特征值为 ±i、±i、−1 及 −1±i,规范形具有四维中心流形。有两个频率相等,$\omega_1=\omega_2=1$。这种情况称为 1:1 内主共振。

输入文件:

```
n = 7;
norder = 5;
f[1] = x[2] + epsilon^2 (x[1]^3 - 2 x[1] x[3]^2 - x[1]^2 x[5] + 5 x[2] x[6]^2);
f[2] = - x[1] + epsilon^2 (x[3]^3 - 2 x[2]^2 x[4] + x[1] x[5] x[6]);
f[3] = x[4] + epsilon^2 (x[1]^2 x[3] + 3 x[1]^2 x[4]);
f[4] = - x[3] + epsilon^2 (4 x[3]^3 - x[3]^2 x[4]);
f[5] = - x[5] + epsilon (x[1] - x[5])^2;
f[6] = - x[6] + x[7] + epsilon (x[1] - x[4])^2;
f[7] = - x[6] - x[7] + epsilon (x[2] - x[6])^2;
```

极坐标形式的规范形为

$$\begin{aligned}\dot{u}_1=&-u_1+\frac{3}{8}\varepsilon^4\cos(\theta_2-\theta_3)r_2^3r_3u_1+\varepsilon^2r_3^2u_1+\frac{1}{20}\varepsilon^4r_2^2r_3^2u_1-\frac{11}{200}\varepsilon^4r_2^2r_3^2u_1\\&+\frac{1}{50}\varepsilon^4\cos(\theta_2-\theta_3)r_2r_3^3u_1+\frac{213}{200}\varepsilon^4r_3^4u_1-\frac{6}{25}\varepsilon^4\sin 2(\theta_2-\theta_3)r_2^2r_3^2u_1\\&+\frac{23}{50}\varepsilon^4\sin(\theta_2-\theta_3)r_2r_3^3u_1\\ \dot{r}_1=&-r_1+\left(\frac{1}{10}\varepsilon^2r_1r_2^2-\frac{129}{1\,600}\varepsilon^4r_1r_2^4-\frac{32\,501}{122\,400}\varepsilon^4r_1r_2^2r_3^2\right)\cos2(\theta_1-\theta_2)\\&+\left(-\frac{3}{20}\varepsilon^2r_1r_2r_3-\frac{493}{800}\varepsilon^4r_1r_2^3r_3-\frac{88\,079}{163\,200}\varepsilon^4r_1r_2r_3^3\right)\cos(2\theta_1-\theta_2-\theta_3)\\&+\left(\frac{3}{4}\varepsilon^4r_1r_2^3r_3+\frac{1\,829}{1\,200}\varepsilon^4r_1r_2r_3^3\right)\cos(\theta_2-\theta_3)-\frac{89}{1\,600}\varepsilon^4r_1r_2^3r_3\cos(2\theta_1-3\theta_2+\theta_3)\\&+\left(-\frac{1}{20}\varepsilon^2r_1r_3^2+\frac{1\,127}{3\,200}\varepsilon^4r_1r_2^2r_3^2+\frac{3\,181}{12\,240}\varepsilon^4r_1r_3^4\right)\cos 2(\theta_1-\theta_3)+\frac{53}{72}\varepsilon^4r_1r_2^2r_3^2\\&-\frac{73}{144}\varepsilon^4r_1r_2^2r_3^2\cos 2(\theta_2-\theta_3)+\frac{9}{320}\varepsilon^4r_1r_2r_3^3\cos(2\theta_1+\theta_2-3\theta_3)\\&+\frac{401}{1\,200}\varepsilon^4r_1r_3^4+\left(\frac{3}{40}\varepsilon^2r_1r_2^2+\frac{161}{800}\varepsilon^4r_1r_2^4-\frac{1\,361}{10\,200}\varepsilon^4r_1r_2^2r_3^2\right)\sin 2(\theta_1-\theta_2)\end{aligned}$$

$$+\frac{849}{3\,200}\varepsilon^4 r_1 r_2 r_3^3\sin(2\theta_1+\theta_2-3\theta_3)+\left(\frac{2}{5}\varepsilon^2 r_1 r_3^2-\frac{2\,601}{3\,200}\varepsilon^4 r_1 r_2^2 r_3^2\right.$$

$$\left.-\frac{19\,081}{244\,800}\varepsilon^4 r_1 r_3^4\right)\sin 2(\theta_1-\theta_3)+\frac{13}{16}\varepsilon^4 r_1 r_2^2 r_3^2\sin 2(\theta_2-\theta_3)$$

$$+\left(\frac{1}{5}\varepsilon^2 r_1 r_2 r_3-\frac{11}{50}\varepsilon^4 r_1 r_2^3 r_3-\frac{289\,639}{489\,600}\varepsilon^4 r_1 r_2 r_3^3\right)\sin(2\theta_1-\theta_2-\theta_3)$$

$$+\left(\frac{7}{24}\varepsilon^4 r_1 r_2^3 r_3+\frac{287}{200}\varepsilon^4 r_1 r_2 r_3^3\right)\sin(\theta_2-\theta_3)-\frac{21}{3\,200}\varepsilon^4 r_1 r_2^3 r_3\sin(2\theta_1-3\theta_2+\theta_3)$$

$$-\frac{1}{10}\varepsilon^3 r_2 r_3^2 u_1\cos(\theta_1+\theta_2-2\theta_3)+\frac{3}{5}\varepsilon^3 r_3^3 u_1\cos(\theta_1-\theta_3)$$

$$-\frac{1}{4}\varepsilon^3 r_2 r_3^2 u_1\sin(\theta_1-\theta_2)+\frac{3}{40}\varepsilon^3 r_2 r_3^2 u_1\sin(\theta_1+\theta_2-2\theta_3)$$

$$+\frac{1}{20}\varepsilon^3 r_3^3 u_1\sin(\theta_1-\theta_3)$$

$$\dot{\theta}_1=1-\frac{1}{4}\varepsilon^2 r_2^2+\left(\frac{3}{40}\varepsilon^2 r_2^2+\frac{161}{800}\varepsilon^4 r_2^4-\frac{1\,361}{10\,200}\varepsilon^4 r_2^2 r_3^2\right)\cos 2(\theta_1-\theta_2)$$

$$+\frac{75}{256}\varepsilon^4 r_2^4+\left(\frac{1}{5}\varepsilon^2 r_2 r_3-\frac{11}{50}\varepsilon^4 r_2^3 r_3\right)\cos(2\theta_1-\theta_2-\theta_3)$$

$$+\left(\frac{71}{96}\varepsilon^4 r_2^3 r_3-\frac{181}{2\,400}\varepsilon^4 r_2 r_3^3\right)\cos(\theta_2-\theta_3)-\frac{21}{3\,200}\varepsilon^4 r_2^3 r_3\cos(2\theta_1-3\theta_2+\theta_3)$$

$$-\frac{5}{6}\varepsilon^2 r_3^2+\left(\frac{2}{5}\varepsilon^2 r_3^2-\frac{2\,601}{3\,200}\varepsilon^4 r_2^2 r_3^2-\frac{19\,081}{43\,200}\varepsilon^4 r_3^4\right)\cos 2(\theta_1-\theta_3)-\frac{1\,261}{2\,880}\varepsilon^4 r_2^2 r_3^2$$

$$-\frac{59}{480}\varepsilon^4 r_2^2 r_3^2\cos 2(\theta_2-\theta_3)+\frac{849}{3\,200}\varepsilon^4 r_2 r_3^3\cos(2\theta_1+\theta_2-3\theta_3)$$

$$-\frac{289\,639}{489\,600}\varepsilon^4 r_2 r_3^3\cos(2\theta_1-\theta_2-\theta_3)-\frac{2\,287}{43\,200}\varepsilon^4 r_3^4$$

$$+\left(-\frac{1}{10}\varepsilon^2 r_2^2+\frac{129}{1\,600}\varepsilon^4 r_2^4+\frac{32\,501}{122\,400}\varepsilon^4 r_2^2 r_3^2\right)\sin 2(\theta_1-\theta_2)$$

$$-\frac{9}{320}\varepsilon^4 r_2 r_3^3\sin(2\theta_1+\theta_2-3\theta_3)+\frac{832}{2\,880}\varepsilon^4 r_2^2 r_3^2\sin 2(\theta_2-\theta_3)$$

$$+\left(\frac{1}{20}\varepsilon^2 r_3^2-\frac{1\,127}{3\,200}\varepsilon^4 r_2^2 r_3^2-\frac{3\,181}{122\,400}\varepsilon^4 r_3^4\right)\sin 2(\theta_1-\theta_3)$$

$$+\left(\frac{3}{20}\varepsilon^2 r_2 r_3+\frac{493}{800}\varepsilon^4 r_2^3 r_3+\frac{88\,079}{163\,200}\varepsilon^4 r_2 r_3^3\right)\sin(2\theta_1-\theta_2-\theta_3)$$

$$+\left(-\frac{1}{2}\varepsilon^2 r_2 r_3+\frac{27}{64}\varepsilon^4 r_2^3 r_3-\frac{1\,429}{7\,200}\varepsilon^4 r_2 r_3^3\right)\sin(\theta_2-\theta_3)$$

$$+\frac{89}{1\,600}\varepsilon^4 r_2^3 r_3\sin(2\theta_1-3\theta_2+\theta_3)-\frac{1}{4r_1}\varepsilon^3 r_2 r_3^2 u_1\cos(\theta_1-\theta_2)$$

$$+\frac{3}{40r_1}\varepsilon^3 r_2 r_3^2 u_1\cos(\theta_1+\theta_2-2\theta_3)+\frac{1}{20r_1}\varepsilon^3 r_3^3 u_1\cos(\theta_1-\theta_3)$$

$$+\frac{1}{10r_1}\varepsilon^3 r_2 r_3^2 u_1 \sin(\theta_1+\theta_2-2\theta_3)-\frac{3}{5r_1}\varepsilon^3 r_3^3 u_1 \sin(\theta_1-\theta_3)$$

$$\dot{r}_2=-\frac{1}{8}\varepsilon^2 r_2^3-\frac{1}{8}\varepsilon^4 r_2^5+\left(\frac{17}{128}\varepsilon^4 r_2^4 r_3-\frac{15}{64}\varepsilon^4 r_2^2 r_3^3\right)\cos(\theta_2-\theta_3)+\frac{1}{4}\varepsilon^2 r_2 r_3^2$$
$$+\left(\frac{1}{8}\varepsilon^2 r_2 r_3^2+\frac{7}{128}\varepsilon^4 r_2^3 r_3^2-\frac{39}{128}\varepsilon^4 r_2 r_3^4\right)\cos 2(\theta_2-\theta_3)+\frac{9}{64}\varepsilon^4 r_2^3 r_3^2$$
$$-\frac{3}{32}\varepsilon^4 r_2^2 r_3^3\cos 3(\theta_2-\theta_3)-\frac{1}{32}\varepsilon^4 r_2^2 r_3^3\sin 3(\theta_2-\theta_3)$$
$$+\left(-\frac{3}{8}\varepsilon^2 r_2 r_3^2+\frac{35}{128}\varepsilon^4 r_2^3 r_3^2+\frac{27}{128}\varepsilon^4 r_2 r_3^4\right)\sin 2(\theta_2-\theta_3)$$
$$-\left(\frac{21}{128}\varepsilon^4 r_2^4 r_3+\frac{1}{64}\varepsilon^4 r_2^2 r_3^3\right)\sin(\theta_2-\theta_3)$$

$$\dot{\theta}_2=1-\frac{3}{2}\varepsilon^2 r_2^2-\frac{827}{256}\varepsilon^4 r_2^4+\left(\frac{21}{128}\varepsilon^4 r_2^3 r_3-\frac{5}{64}\varepsilon^4 r_2 r_3^3\right)\cos(\theta_2-\theta_3)$$
$$+\frac{3}{4}\varepsilon^2 r_3^2+\left(-\frac{3}{8}\varepsilon^2 r_3^2+\frac{37}{64}\varepsilon^4 r_2^2 r_3^2+\frac{27}{128}\varepsilon^4 r_3^4\right)\cos 2(\theta_2-\theta_3)-\frac{145}{64}\varepsilon^4 r_2^2 r_3^2.$$
$$-\frac{1}{32}\varepsilon^4 r_2 r_3^3\cos 3(\theta_2-\theta_3)-\frac{45}{128}\varepsilon^4 r_3^4+\frac{3}{32}\varepsilon^4 r_2 r_3^3\sin 3(\theta_2-\theta_3)$$
$$+\left(-\frac{1}{8}\varepsilon^2 r_3^2-\frac{1}{64}\varepsilon^4 r_2^2 r_3^2+\frac{39}{128}\varepsilon^4 r_3^4\right)\sin 2(\theta_2-\theta_3)$$
$$+\left(-\frac{7}{128}\varepsilon^4 r_2^3 r_3+\frac{27}{64}\varepsilon^4 r_2 r_3^3\right)\sin(\theta_2-\theta_3)$$

$$\dot{r}_3=\left(-\frac{37}{256}\varepsilon^4 r_2^5-\frac{3}{4}\varepsilon^2 r_2 r_3^2+\frac{93}{256}\varepsilon^4 r_2^3 r_3^2-\frac{159}{640}\varepsilon^4 r_2 r_3^4\right)\cos(\theta_2-\theta_3)-\frac{1}{2}\varepsilon^2 r_2^2 r_3$$
$$+\left(-\frac{1}{4}\varepsilon^2 r_2^2 r_3-\frac{9}{64}\varepsilon^4 r_2^4 r_3+\frac{21}{40}\varepsilon^4 r_2^2 r_3^3\right)\cos 2(\theta_2-\theta_3)-\frac{9}{16}\varepsilon^4 r_2^4 r_3$$
$$+\frac{3}{256}\varepsilon^4 r_2^3 r_3^2\cos 3(\theta_2-\theta_3)+\frac{3}{8}\varepsilon^2 r_3^3-\frac{239}{320}\varepsilon^4 r_2^2 r_3^3$$
$$+\left(-\frac{7}{64}\varepsilon^4 r_2^4 r_3-\frac{171}{320}\varepsilon^4 r_2^2 r_3^3\right)\sin 2(\theta_2-\theta_3)$$
$$+\left(\frac{3}{8}\varepsilon^2 r_2^3+\frac{51}{64}\varepsilon^4 r_2^5+\frac{29}{256}\varepsilon^4 r_2^3 r_3^2-\frac{189}{320}\varepsilon^4 r_2 r_3^4\right)\sin(\theta_2-\theta_3)$$

$$\dot{\theta}_3=1+\frac{3}{32}\varepsilon^4 r_2^4+\left(\frac{7}{64}\varepsilon^4 r_2^4+\frac{1}{800}\varepsilon^4 r_2^2 r_3^2\right)\cos 2(\theta_2-\theta_3)$$
$$+\left(-\frac{3}{8r_3}\varepsilon^2 r_2^3-\frac{51}{64r_3}\varepsilon^4 r_2^5+\frac{69}{256}\varepsilon^4 r_2^3 r_3+\frac{147}{1\,600}\varepsilon^4 r_2 r_3^3\right)\cos(\theta_2-\theta_3)$$
$$+\frac{313}{320}\varepsilon^4 r_2^2 r_3^2+\frac{461}{6\,400}\varepsilon^4 r_3^4+\frac{3}{256}\varepsilon^4 r_2^3 r_3\sin 2(\theta_2-\theta_3)$$
$$+\left(-\frac{1}{4}\varepsilon^2 r_2^2-\frac{9}{64}\varepsilon^4 r_2^4+\frac{109}{400}\varepsilon^4 r_2^2 r_3^2\right)\sin 2(\theta_2-\theta_3)$$

$$+\left(-\frac{37}{256r_3}\varepsilon^4 r_2^5-\frac{1}{4}\varepsilon^2 r_2 r_3+\frac{243}{256}\varepsilon^4 r_2^3 r_3+\frac{2\,677}{3\,200}\varepsilon^4 r_2 r_3^3\right)\sin(\theta_2-\theta_3)$$

借助 Mathematica 语言编制的简单高效的符号计算程序，可以不经中心流形简化而计算半单系统的高维、高次规范形。根据原微分方程系数给出了规范形系数及相关的非线性变换，此程序很容易被扩展为适用于计算更高维规范形的程序。

5.10 用规范形理论研究霍普夫分岔系统的焦点量问题

微分方程焦点量(定义见文献杜乃林与曾宪武，1994)的研究对分析微分方程的稳定性、极限环的的数量，以及微分方程在奇点的其他性态等是非常重要的。本节介绍了一种计算焦点量问题的新方法。根据该方法可以计算常微分方程的任意阶焦点量，并且在计算机语言 Mathematica 的帮助下，实现了该方法的程序化(见附录 2 中 5.10)。

5.10.1 规范形的系数与焦点量之间的关系

考虑方程

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{F}^k(\boldsymbol{X}) \tag{5.10.1}$$

其中

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-\omega\\\omega&0\end{bmatrix},\boldsymbol{F}^k(X)=\begin{bmatrix}F_1^k\\F_2^k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i+j=k}a_{ij}x_1^i x_2^j\\\sum\limits_{i+j=k}b_{ij}x_1^i x_2^j\end{bmatrix}\quad(i,j=0,1,2,\cdots k)$$

对上式取复变换

$$\begin{cases}z=x_1+\mathrm{i}x_2\\\bar{z}=x_1-\mathrm{i}x_2\end{cases}$$

则方程(5.10.1)变为

$$\left.\begin{aligned}\dot{z}&=\mathrm{i}\omega z+g_1^2(z,\bar{z})+\cdots+g_1^{2m+1}(z,\bar{z})+\mathrm{h.o.t}\\\dot{\bar{z}}&=-\mathrm{i}\omega\bar{z}+\overline{g_1^2(z,\bar{z})}+\cdots+\overline{g_1^{2m+1}(z,\bar{z})}+\mathrm{h.o.t}\end{aligned}\right\} \tag{5.10.2}$$

利用规范形理论，对方程(5.10.2)经过一系列近恒同的非线性变换，$z=v+\xi^k(v,\bar{v})$，$\xi^k\in H_2^k$，$k=2,\cdots l$，用 $A_{i,j}^{(l)}$ 表示 $g_l^i(z,\bar{z})$ 中 $z^i\bar{z}^j(i+j)=k$ 的系数，则有下述结论。

定理 5.10.1 方程(5.10.2)的原点的第 m 阶焦点量

$$v_{2m+1}=\mathrm{Re}(\boldsymbol{A}_{m+1,m}^{(m+1)})$$

定理的证明可参看文献(王铎，1990)。该定理说明，对于式(5.10.2)那样的方程经过 m 次接近恒同的变换后，方程的前 $m+1$ 阶齐次多项式都已经规范化了，其 $2m+1$ 阶齐次多项式中单项式 $z^{m+1}\bar{z}^m$ 的系数的实部与第 m 阶焦点量相等或者与其相差一常数倍。

对于二维普霍夫分岔问题，利用上述定理来计算其第四焦点量。计算方法分如下三步：①因为第四焦点量与方程(5.10.1)的前 9 阶齐次多项式的系数有关，所以，首先应将方程(5.10.1)的非线性部分用“和式极数”表示为 2 至 9 阶齐次多项式的和；②计算方程(5.10.1)

的规范形系数以及所取的各次变换中 P^2、P^3、P^4、P^5 的系数；③提取第 9 阶齐次多项式中单项式的系数的实部，这样就得到了第 m 阶焦点量。

5.10.2　规范形的系数的计算

将式(5.10.1)表示为和式级数的形式

$$\dot{X} = AX + F^2(X) + F^3(X) + \cdots + F^9(X) \tag{5.10.3}$$

式中 X、A、$F^k(X)$的形式与式(5.2.1)中相同。

第一次变换：取变换

$$X = X + P^2(X), P^2(X) \in H_2^2$$①

其中

$$P^k(X) = \begin{bmatrix} P^{k(1)} \\ P^{k(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i+j=k} c_{ij} x_1^i x_2^j \\ \sum\limits_{i+j=k} d_{ij} x_1^i x_2^j \end{bmatrix} \quad (i,j = 0,1,2,3\cdots k) \tag{5.10.4}$$

将 $k=2$ 代入式(5.10.4)，得到 P^2，将二阶变换代入式(5.10.3)，得

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \sum_{N=0}^{9} (-1)^N [DP^2 X]^N \left\{ AX + AP^2(X) + \sum_{N=2}^{9} \sum_{m=0}^{n} \frac{D^m F^n(X)}{m!} \cdot [P^2(X)]^m \right\} \\ &= AX + F_1^2(X) + F_1^3(X) + \cdots + F_1^9(X) \end{aligned} \tag{5.10.5}$$

式中 F_i^k 是指在经过第 i 次变换后 k 阶非线性项

$$F_1^k(X) = \begin{bmatrix} F_1^{k(1)} \\ F_1^{k(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i+j=k} a_{ij}^1 x_1^i x_2^j \\ \sum\limits_{i+j=k} b_{ij}^1 x_1^i x_2^j \end{bmatrix} \quad (i,j = 0,1,2,3\cdots k; k = 2,3\cdots 9)$$

$$\begin{cases} F_1^2 = F^2 + AP^2 - DP^2 AX \\ F_1^3 = F^3 + DF^2 P^2 - DP^2 \\ F_1^4 = F^4 + \frac{1}{2} D^2 F^2 (P^2)^2 + DF^3 P^2 - DP^2 F_1^3 \\ F_1^5 = F^5 + \frac{1}{2} D^2 F^3 (P^2)^2 + DF^4 P^2 - DP^2 F_1^4 \\ F_1^6 = F^6 + \frac{1}{6} D^3 F^3 (P^2)^3 + \frac{1}{2} D^2 F^4 (P^2)^2 + DF^5 P^2 - DP^2 F_1^5 \\ F_1^7 = F^7 + \frac{1}{6} D^3 F^4 (P^2)^3 + \frac{1}{2} D^2 F^5 (P^2)^2 + DF^6 P^2 - DP^2 F_1^6 \\ F_1^8 = F^8 + \frac{1}{24} D^4 F^4 (P^2)^4 + \frac{1}{6} D^2 F^5 (P^2)^3 + \frac{1}{2} D^2 F^6 (P^2)^2 + DF^7 P^2 - DP^2 F_1^7 \\ F_1^9 = F^9 + \frac{1}{24} D^4 F^5 (P^2)^4 + \frac{1}{6} D^2 F^6 (P^2)^3 + \frac{1}{2} D^2 F^7 (P^2)^2 + DF^8 P^2 - DP^2 F_1^8 \end{cases}$$

① 为了便于编制计算机程序，在变换中避免过多地使用变量，所以，变换后仍采用同一变量——X。

其中

$$D\boldsymbol{P}^2=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial P^{2^{(1)}}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial P^{2^{(1)}}}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial P^{2^{(2)}}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial P^{2^{(2)}}}{\partial x_2}\end{bmatrix},\ D\boldsymbol{F}^k=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial F^{k^{(1)}}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F^{k^{(1)}}}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial F^{k^{(2)}}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F^{k^{(2)}}}{\partial x_2}\end{bmatrix}\quad(k=2,3\cdots,8)$$

$$D^2\boldsymbol{F}^k=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 F^{k^{(1)}}}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 F^{k^{(1)}}}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F^{k^{(1)}}}{\partial x_2^2}\\ \dfrac{\partial^2 F^{k^{(2)}}}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 F^{k^{(2)}}}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F^{k^{(2)}}}{\partial x_2^2}\end{bmatrix}\quad(k=2,3\cdots7)$$

$$D^3\boldsymbol{F}^k=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^3 F^{k^{(1)}}}{\partial x_1^3} & \dfrac{\partial^3 F^{k^{(1)}}}{\partial x_1^2\partial x_2} & \dfrac{\partial^3 F^{k^{(1)}}}{\partial x_1\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^3 F^{k^{(1)}}}{\partial x_2^3}\\ \dfrac{\partial^3 F^{k^{(2)}}}{\partial x_1^3} & \dfrac{\partial^3 F^{k^{(2)}}}{\partial x_1^2\partial x_2} & \dfrac{\partial^3 F^{k^{(2)}}}{\partial x_1\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^3 F^{k^{(2)}}}{\partial x_2^3}\end{bmatrix}\quad(k=3,4,5,6)$$

$$D^4\boldsymbol{F}^k=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^4 F^{k^{(1)}}}{\partial x_1^4} & \dfrac{\partial^4 F^{k^{(1)}}}{\partial x_1^3\partial x_2} & \dfrac{\partial^4 F^{k^{(1)}}}{\partial x_1^2\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^4 F^{k^{(1)}}}{\partial x_1\partial x_2^3} & \dfrac{\partial^4 F^{k^{(1)}}}{\partial x_2^4}\\ \dfrac{\partial^4 F^{k^{(2)}}}{\partial x_1^4} & \dfrac{\partial^4 F^{k^{(2)}}}{\partial x_1^3\partial x_2} & \dfrac{\partial^4 F^{k^{(2)}}}{\partial x_1^2\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^4 F^{k^{(2)}}}{\partial x_1\partial x_2^3} & \dfrac{\partial^4 F^{k^{(2)}}}{\partial x_2^4}\end{bmatrix}\quad(k=4,5)$$

$$(\boldsymbol{P}^2)^2=[(P^{2^{(1)}})^2\quad 2\times P^{2^{(1)}}P^{2^{(2)}}\quad (P^{2^{(2)}})^2]^{\mathrm{T}}$$

$$(\boldsymbol{P}^2)^3=[(P^{2^{(1)}})^3\quad 3\times(P^{2^{(1)}})^2P^{2^{(2)}}\quad 3\times P^{2^{(1)}}(P^{2^{(2)}})^2\ .\ (P^{2^{(2)}})^3]^{\mathrm{T}}$$

$$(\boldsymbol{P}^2)^4=[(P^{2^{(1)}})^4\quad 4(P^{2^{(1)}})^3P^{2^{(2)}}\quad 4(P^{2^{(1)}})^3(P^{2^{(2)}})^2\quad 4P^{2^{(1)}}(P^{2^{(2)}})^3\quad (P^{2^{(2)}})^4]^{\mathrm{T}}$$

对式(5.10.2),因为 $z_2=\bar{z}_1$,由定理5.3.3,可得其规范形为

$$\dot{z}_1=\mathrm{i}\omega z_1+A_3|z_1|^2z_1+\cdots+A_{2k+1}|z_1|^{2k}z_1$$

将其变为直角坐标形式,得式(5.10.1)的规范形如下:

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+G^3(\boldsymbol{X})+G^5(\boldsymbol{X})+G^7(\boldsymbol{X})+G^9(\boldsymbol{X})\tag{5.10.6}$$

其中

$$G^j(\boldsymbol{X})=(x_1^2+x_2^2)^j\begin{bmatrix}a_j & -b_j\\ b_j & a_j\end{bmatrix}\boldsymbol{X}\quad\left(j=\frac{(i-1)}{2};i=3,5,7,9\right)\tag{5.10.7}$$

由式(5.10.7)知,在霍普夫分岔的规范形中,不存在偶次项,所以有

$$\boldsymbol{F}_1^2=0\tag{5.10.8}$$

由上式可解得 $\boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{X})$的系数如下:

$$\begin{bmatrix} d_{20} \\ d_{11} \\ d_{02} \\ c_{20} \\ c_{11} \\ c_{02} \end{bmatrix} = \frac{1}{3\omega} \begin{bmatrix} a_{20} - b_{11} + 2a_{02} \\ 2b_{20} - a_{11} - 2b_{02} \\ 2a_{20} + b_{11} + a_{02} \\ -b_{20} - a_{11} - 2b_{02} \\ 2a_{20} + b_{11} - 2a_{02} \\ -b_{20} + a_{11} - b_{02} \end{bmatrix} \tag{5.10.9}$$

第二次变换:取变换

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{P}^3(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{P}^3(\boldsymbol{X}) \in H_2^3$$

将 $k=3$ 代入式(5.10.4),可得到 $\boldsymbol{P}^3(\boldsymbol{X})$,将所取变换代入式(5.10.5),得

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{X}} &= \sum_{N=0}^{9} (-1)^N [D\boldsymbol{P}^3(\boldsymbol{X})]^N \left\{ \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^3(\boldsymbol{X}) + \sum_{n=0}^{9} \sum_{m=0}^{n} \frac{D^m \boldsymbol{F}_1^n(\boldsymbol{X})}{m!} \cdot [\boldsymbol{P}^3(\boldsymbol{X})]^m \right\} \\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{F}_2^3(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{F}_2^4(\boldsymbol{X}) + \cdots + \boldsymbol{F}_2^9(\boldsymbol{X}) \end{aligned} \tag{5.10.10}$$

其中

$$\boldsymbol{F}_2^k(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} F_2^{k(1)} \\ F_2^{k(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i+j=k} a_{ij}^2 x_1^i x_2^j \\ \sum\limits_{i+j=k} b_{ij}^2 x_1^i x_2^j \end{bmatrix} \quad (i,j = 0,1,2,3\cdots k; k = 3,4,\cdots 9)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_2^3 = \boldsymbol{F}_1^3 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^3 - D\boldsymbol{P}^3 \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{F}_2^4 = \boldsymbol{F}_1^4 \\ \boldsymbol{F}_2^5 = \boldsymbol{F}_1^5 + D\boldsymbol{F}_1^3 \boldsymbol{P}^3 - D\boldsymbol{P}^3 \boldsymbol{F}_2^3 \\ \boldsymbol{F}_2^6 = \boldsymbol{F}_1^6 + D\boldsymbol{F}_1^4 \boldsymbol{P}^3 - D\boldsymbol{P}^3 \boldsymbol{F}_2^4 \\ \boldsymbol{F}_2^7 = \boldsymbol{F}_1^7 + \frac{1}{2} D^2 \boldsymbol{F}_1^3 (\boldsymbol{P}^3)^2 + D\boldsymbol{F}_1^5 \boldsymbol{P}^3 - D\boldsymbol{P}^3 \boldsymbol{F}_2^5 \\ \boldsymbol{F}_2^8 = \boldsymbol{F}_1^8 + \frac{1}{2} D^2 \boldsymbol{F}_1^4 (\boldsymbol{P}^3)^2 + D\boldsymbol{F}_1^6 \boldsymbol{P}^3 - D\boldsymbol{P}^3 \boldsymbol{F}_2^6 \\ \boldsymbol{F}_2^9 = \boldsymbol{F}_1^9 + \frac{1}{6} D^3 \boldsymbol{F}_1^3 (\boldsymbol{P}^3)^3 + \frac{1}{2} D^2 \boldsymbol{F}_1^4 (\boldsymbol{P}^3)^2 + D\boldsymbol{F}_1^7 \boldsymbol{P}^3 - D\boldsymbol{P}^3 \boldsymbol{F}_2^7 \end{cases}$$

$$D\boldsymbol{P}^3 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial P^{3(1)}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial P^{3(1)}}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial P^{3(2)}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial P^{3(2)}}{\partial x_2} \end{bmatrix}, D\boldsymbol{F}_1^k = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1^{k(1)}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1^{k(1)}}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial F_1^{k(2)}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1^{k(2)}}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (k = 3,4\cdots,7)$$

$$D^2 \boldsymbol{F}_1^k = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 F_1^{k(1)}}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 F_1^{k(1)}}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F_1^{k(1)}}{\partial x_2^2} \\ \dfrac{\partial^2 F_1^{k(2)}}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 F_1^{k(2)}}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F_1^{k(2)}}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \quad (k = 3,4)$$

$$D^3F_1^3=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^3F_1^{3(1)}}{\partial x_1^3} & \dfrac{\partial^3F_1^{3(1)}}{\partial x_1^2\partial x_2} & \dfrac{\partial^3F_1^{3(1)}}{\partial x_1\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^3F_1^{3(1)}}{\partial x_2^3}\\ \dfrac{\partial^3F_1^{3(2)}}{\partial x_1^3} & \dfrac{\partial^3F_1^{3(2)}}{\partial x_1^2\partial x_2} & \dfrac{\partial^3F_1^{3(2)}}{\partial x_1\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^3F_1^{3(2)}}{\partial x_2^3}\end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{P}^3)^2=[(P^{3^{(1)}})^2 \quad 2P^{3^{(1)}}P^{3^{(2)}} \quad (P^{3^{(2)}})^2]^{\mathrm{T}};$$

$$(\boldsymbol{P}^3)^3=[(P^{3^{(1)}})^3 \quad 3(P^{3^{(1)}})^2P^{3^{(2)}} \quad 3P^{3^{(1)}}(P^{3^{(2)}})^2 \quad (P^{3^{(2)}})^3]^{\mathrm{T}}$$

由系统的规范形式(5.10.6)知

$$\boldsymbol{F}_2^3=\boldsymbol{G}^3(\boldsymbol{X}) \tag{5.10.11}$$

由式(5.10.10)可解得 $\boldsymbol{P}^3(\boldsymbol{X})$的各个系数如下：

c_{30}、c_{03}为任意常数。

$$\left.\begin{aligned}
c_{21}&=(8\omega c_{03}+b_{21}^2-b_{03}^2+3a_{30}^2-3a_{12}^2)/(8\omega)\\
c_{12}&=(8\omega c_{30}-b_{30}^2+b_{12}^2+3a_{21}^2-3a_{03}^2)/(8\omega)\\
d_{30}&=(-4\omega c_{03}-b_{21}^2+b_{03}^2+a_{30}^2+a_{12}^2)/(4\omega)\\
d_{21}&=(8\omega c_{30}+5b_{30}^2-b_{12}^2+a_{21}^2+3a_{03}^2)/(8\omega)\\
d_{12}&=(-8\omega c_{03}+b_{21}^2-5b_{03}^2+3a_{30}^2+3a_{12}^2)/(8\omega)\\
d_{03}&=(4\omega c_{30}+b_{30}^2+b_{12}^2+a_{21}^2+a_{03}^2)/(4\omega)
\end{aligned}\right\} \tag{5.10.12}$$

注：a_{ij}^2、b_{ij}^2中的上标 2 表示 a_{ij}^2、b_{ij}^2为 $F_2^k(\boldsymbol{X})$的系数，而不是表示 a_{ij}或 b_{ij}的平方。

第三次变换：取变换

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{P}^4(\boldsymbol{X}),\ \boldsymbol{P}^4(\boldsymbol{X})\in H_2^4$$

将 $k=4$ 代入式(5.10.4)，可得到 $\boldsymbol{P}^4(\boldsymbol{X})$，将所取变换代入式(5.10.10)，得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{X}}&=\sum_{N=0}^{9}(-1)^N[D\boldsymbol{P}^4(\boldsymbol{X})]^N\left\{\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{AP}^4(\boldsymbol{X})+\sum_{n=4}^{9}\sum_{m=0}^{n}\frac{D^m\boldsymbol{F}_2^n(\boldsymbol{X})}{m!}\cdot[\boldsymbol{P}^4(\boldsymbol{X})]^m\right\}\\&=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{F}_2^3(\boldsymbol{X})+\boldsymbol{F}_3^4(\boldsymbol{X})+\boldsymbol{F}_3^5(\boldsymbol{X})+\cdots+\boldsymbol{F}_3^9(\boldsymbol{X})\end{aligned} \tag{5.10.13}$$

其中

$$\boldsymbol{F}_3^k(\boldsymbol{X})=\begin{bmatrix}F_3^{k^{(1)}}\\F_3^{k^{(2)}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i+j=k}a_{ij}^3x_1^ix_2^j\\\sum\limits_{i+j=k}b_{ij}^3x_1^ix_2^j\end{bmatrix}\quad(i,j=0,1,2,3\cdots k;k=4,5,\cdots 9)$$

$$\left\{\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_3^4&=\boldsymbol{F}_2^4+\boldsymbol{AP}^4-D\boldsymbol{P}^4\boldsymbol{AX}\\
\boldsymbol{F}_3^5&=\boldsymbol{F}_2^5\\
\boldsymbol{F}_3^6&=\boldsymbol{F}_2^6\\
\boldsymbol{F}_3^7&=\boldsymbol{F}_2^7+D\boldsymbol{F}_2^4\boldsymbol{P}^4-D\boldsymbol{P}^4\boldsymbol{F}_3^4\\
\boldsymbol{F}_3^8&=\boldsymbol{F}_2^8+D\boldsymbol{F}_2^5\boldsymbol{P}^4-D\boldsymbol{P}^4\boldsymbol{F}_3^5\\
\boldsymbol{F}_3^9&=\boldsymbol{F}_2^9+\frac{1}{2}D^2\boldsymbol{F}_2^5(\boldsymbol{P}^4)^2+D\boldsymbol{F}_3^6\boldsymbol{P}^4-D\boldsymbol{P}^4\boldsymbol{F}_3^6
\end{aligned}\right.$$

$$DP^4=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial P^{4(1)}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial P^{4(1)}}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial P^{4(2)}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial P^{4(2)}}{\partial x_2}\end{bmatrix},\ DF_2^k=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial F_2^{k(1)}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2^{k(1)}}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial F_2^{k(2)}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2^{k(2)}}{\partial x_2}\end{bmatrix}\quad (k=4,5,6)$$

$$D^2F_2^5=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 F_2^{5(1)}}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 F_2^{5(1)}}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F_2^{5(1)}}{\partial x_2^2}\\ \dfrac{\partial^2 F_2^{5(2)}}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 F_2^{5(2)}}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F_2^{5(2)}}{\partial x_2^2}\end{bmatrix},\ (P^4)^2=\begin{bmatrix}(P^{4(1)})^2\\ 2P^{4(1)}P^{3(2)}\\ (P^{4(2)})^2\end{bmatrix}$$

由系统的规范形式(5.10.6)知

$$F_3^4=0 \tag{5.10.14}$$

由式(5.9.12)可解得 $P^4(X)$的各个系数如下：

$$\left.\begin{aligned}
d_{40}&=(-3b_{31}^3-2b_{13}^3+3a_{40}^3+2a_{22}^3+8a_{04}^3)/(15\omega)\\
d_{31}&=(12b_{40}^3-2b_{22}^3-8b_{40}^3-3a_{31}^3-2a_{13}^3)/(15\omega)\\
d_{22}&=(b_{31}^3-b_{13}^3+4a_{40}^3+a_{22}^3+4a_{04}^3)/(5\omega)\\
d_{13}&=(8b_{40}^3+2b_{22}^3-12b_{04}^3-2a_{31}^3-3a_{13}^3)/(15\omega)\\
d_{04}&=(2b_{31}^3+3b_{13}^3+8a_{40}^3+2a_{22}^3+3a_{04}^3)/(15\omega)\\
c_{40}&=(-3b_{40}^3-2b_{22}^3-8b_{04}^3-3a_{31}^3-2a_{13}^3)/(15\omega)\\
c_{31}&=(3b_{31}^3+2b_{13}^3+12a_{40}^3-2a_{22}^3-8a_{04}^3)/(15\omega)\\
c_{22}&=(-4b_{40}^3-b_{22}^3-4b_{04}^3+a_{31}^3-a_{13}^3)/(15\omega)\\
c_{13}&=(2b_{31}^3+3b_{13}^3+8a_{40}^3+2a_{22}^3-12a_{04}^3)/(15\omega)\\
c_{04}&=(-8b_{40}^3-2b_{22}^3-3b_{04}^3+2a_{31}^3+3a_{13}^3)/(15\omega)
\end{aligned}\right\} \tag{5.10.15}$$

第四次变换：取变换

$$X+X+P^5(X),\ P^5(X)\in H_2^5$$

将 $k=5$ 代入式(5.10.4)，可得到 $P^5(X)$，将所取变换代入式(5.10.13)，得

$$\begin{aligned}\dot{X}&=\sum_{N=0}^{9}(-1)^N[DP^4X]^N\left\{AX+AP^5(X)+\sum_{n=5}^{9}\sum_{m=0}^{n}\frac{D^mF_3^n(X)}{m!}\cdot[P^5(X)]^m\right\}\\&=AX+F_2^3(X)+F_4^5(X)+F_4^6(X)\cdots+F_4^9(X)\end{aligned} \tag{5.10.16}$$

其中

$$F_4^k(X)=\begin{bmatrix}F_4^{k(1)}\\ F^{k(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i+j=k}a_{ij}^4x_1^ix_2^j\\ \sum\limits_{i+j=k}b_{ij}^4x_1^ix_2^j\end{bmatrix}\quad (i,j=0,1,2,3\cdots k;\ k=5,6\cdots 9)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_4^5 = \boldsymbol{F}_3^5 + \boldsymbol{AP}^5 - \boldsymbol{DP}^5\boldsymbol{AX} \\ \boldsymbol{F}_4^6 = \boldsymbol{F}_3^6 \\ \boldsymbol{F}_4^7 = \boldsymbol{F}_3^7 \\ \boldsymbol{F}_4^8 = \boldsymbol{F}_3^8 \\ \boldsymbol{F}_4^9 = \boldsymbol{F}_3^9 + \boldsymbol{DF}_3^5\boldsymbol{P}^5 - \boldsymbol{DP}^5\boldsymbol{F}_4^5 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{DP}^5 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial P^{5(1)}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial P^{5(1)}}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial P^{5(2)}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial P^{5(2)}}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \boldsymbol{D}^2\boldsymbol{F}_3^5 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 F_3^{5(1)}}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 F_3^{5(1)}}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F_3^{5(1)}}{\partial x_2^2} \\ \dfrac{\partial^2 F_3^{5(2)}}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 F_3^{5(2)}}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F_3^{5(2)}}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

由系统的规范形式(5.10.6)知

$$\boldsymbol{F}_4^5 = \boldsymbol{G}^5(\boldsymbol{X}) \tag{5.10.17}$$

由式(5.10.14)可解得 $\boldsymbol{P}^4(\boldsymbol{X})$的各个系数如下：

c_{50}、c_{05}为任意常数。

$$\left.\begin{aligned} c_{32} &= (32\omega c_{50} - 3b_{50}^4 + b_{32}^4 + b_{14}^4 + 7a_{41}^4 - a_{23}^4 - 5a_{05}^4)/(16\omega) \\ c_{23} &= (32\omega c_{05} + b_{41}^4 + b_{23}^4 - 3b_{05}^4 + 5a_{50}^4 + a_{32}^4 - 7a_{14}^4)/(16\omega) \\ c_{41} &= (48\omega c_{05} + 5b_{41}^4 + b_{23}^4 - 7b_{05}^4 + 25a_{50}^4 - 7a_{32}^4 - 11a_{14}^4)/(48\omega) \\ c_{14} &= (48\omega c_{50} - 7b_{50}^4 + b_{32}^4 + 5b_{14}^4 + 11a_{41}^4 + 7a_{23}^4 - 25a_{05}^4)/(48\omega) \\ d_{41} &= (16\omega c_{50} + 11b_{50}^4 - b_{32}^4 - b_{14}^4 + a_{41}^4 + a_{23}^4 + 5a_{05}^4)/(16\omega) \\ d_{50} &= (-12\omega c_{05} - 2b_{41}^4 - b_{23}^4 - 2b_{05}^4 + 2a_{50}^4 + a_{32}^4 + 2a_{14}^4)/(12\omega) \\ d_{05} &= (12\omega c_{50} + 2b_{50}^4 + b_{32}^4 + 2b_{14}^4 + 2a_{41}^4 + a_{23}^4 + 2a_{05}^4)/(12\omega) \\ d_{14} &= (-16\omega c_{05} + b_{41}^4 + b_{32}^4 - 11b_{05}^4 + 5a_{50}^4 + a_{32}^4 + a_{14}^4)/(16\omega) \\ d_{32} &= (-96\omega c_{05} + 5b_{41}^4 - 11b_{23}^4 - 31b_{05}^4 + 25a_{50}^4 + 5a_{32}^4 + 13a_{14}^4)/(48\omega) \\ d_{23} &= (96\omega c_{50} + 31b_{50}^4 + 11b_{32}^4 - 5b_{14}^4 + 13a_{41}^4 + 5a_{23}^4 + 25a_{05}^4)/(48\omega) \end{aligned}\right\} \tag{5.10.18}$$

至此，由式(5.10.9)、式(5.10.12)、式(5.10.15)、式(5.10.18)已经计算出了 P^2、P^3、P^4、P^5 的各值。将其代入方程(5.10.1)，可得到其经过4次近恒同变换后的第9阶齐次多项式。

5.10.3 第四阶焦点量的计算

由第二节，得出

$$\boldsymbol{F}_4^9 = \boldsymbol{F}_3^9 + \boldsymbol{DF}_3^5\boldsymbol{P}^5 - \boldsymbol{DP}^5\boldsymbol{F}_4^5 \tag{5.10.19}$$

为了利用定理5.10.1，将式(5.10.19)化为复数形式，令

$$\begin{cases} x_1 = (z_1 + z_2)/2 \\ x_2 = -\mathrm{i}(z_1 - z_2)/2 \end{cases}$$

则

$$g_4^9(z_1, z_2) = F_4^{9(1)} + \mathrm{i}F_4^{9(2)}$$

这样，得到了经过 4 次变换的复数形式的 9 次齐次多项式，那么在这个多项式中 $z_1^5 z_2^4$ 的系数即为第四阶焦点量。

$$C_4 = v_9 = \mathrm{Re}(A_{5,4}^{(5)}) = \mathrm{Re}\left(\frac{\partial^9 g_4^9(z_1, z_2)}{\partial z_1^5 \partial z_2^4}\right)$$

$$= \frac{45}{4}(63a_{90}^4 + 7a_{72}^4 + 3a_{54}^4 + 3a_{36}^4 + 7a_{18}^4 + 7b_{81}^4 + 3b_{45}^4 + 3b_{27}^4 + 63b_{09}^4)$$

5.10.4　程序及算例

根据规范形系数与焦点量之间关系的定理可知，对于方程(5.10.1)经过 k 次近恒同的变换后，其 $2k+1$ 阶齐次多项式中单项式 $z^{m+1}\bar{z}^m$ 的系数的实部与第 k 阶焦点量相等，这样，得到了一种计算常微分方程焦点量问题的新方法，以前计算机语言的发展，对该方法实现程序化提供了很好的平台，本节利用 Mathematica 语言编制的程序，可见本章附录。

例 5.10.1　考虑满足霍普夫分岔条件的下列系统(Farr and Li, 1989)：

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \lambda_1 x - \lambda x_3 x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5)xy + \lambda_6 y^2 \\ \dot{y} &= x + \lambda_1 y + \lambda_2 x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)xy - \lambda_2 y^2 \end{aligned}\right\} \tag{5.10.20}$$

这是一个二次系统，通过附录中的程序，可以得到该系统的前四阶焦点量为

$$C_1 = v_3 = \frac{1}{8}\lambda_5(-\lambda_3 + \lambda_6)$$

$$C_2 = v_5 = -\frac{1}{48}\lambda_2\lambda_4(5\lambda_3 + \lambda_4 - 5\lambda_6)(-\lambda_3 + \lambda_6)$$

$$C_3 = v_7 = \frac{25}{64}\lambda_2(\lambda_3 - \lambda_6)^2(-\lambda_2^2 + \lambda_3\lambda_6 - 2\lambda_6^2)$$

$$C_4 = v_9 = \frac{5}{1\,152}\lambda_2(\lambda_3 - \lambda_6)^3(-392\lambda_2^4 - 353\lambda_2^2\lambda_3^2 + 1\,325\lambda_2^2\lambda_3\lambda_6 + 353\lambda_3^3\lambda_6 - 1\,756\lambda_2^2\lambda_6^2$$
$$- 1\,639\lambda_3^2\lambda_6^2 + 2\,838\lambda_3\lambda_6^3 - 1\,944\lambda_6^4)$$

所得的结果与 Farr and Li(1989)所得结果完全一致。由于计算高阶焦点量的工作难度较大，所以该方法程序化的实现对于实际应用有重要的意义。

第 6 章 奇异性理论

对于一个高维系统，人们通常先用 L-S 方法或中心流形定理将其降维，再用范式理论将其化简，从而得到最简形式的约化方程。奇异性理论是处理静态分岔的有效手段。本章主要介绍用奇异性理论处理形如

$$g(x,\mu)=0$$

的一维静态分岔问题。

分岔的奇异性理论包括三方面的内容：识别问题、开折问题和分类问题。

6.1 识别问题

在用 L-S 方法或中心流形定理对高维系统进行降维以得到约化方程的过程中，一般只能求出约化方程的有限项。识别问题研究这有限项能否反映原系统的分岔特性，或者说原系统在满足何种条件时才等价于有限项的约化方程。为此先给出几个定义。

定义 6.1.1 设$(0,0)\in U\times V\subset \mathbf{R}\times\mathbf{R}$，$g$、$h:U\times V\to\mathbf{R}$是两个 C^∞ 函数。若在点$(0,0)$的某个邻域 $U_1\times V_1\subset U\times V$ 内，存在 C^∞ 微分同胚 $T(x,\mu)\to(X(x,\mu)M(\mu))$和 C^∞ 函数 $S(x,\mu)$，其中 $X:U_1\times V_1\to R$，$M:V_1\to R$，$S:U_1\times V_1\to R$，它们满足

$$\left.\begin{aligned}&M(0)=0\\&X(0,0)=0\\&M'(\mu)>0\\&X_x(x,\mu)>0\\&S(x,\mu)>0\end{aligned}\right\}\tag{6.1.1}$$

并在$(0,0)$点附近有

$$g(x,\mu)=S(x,\mu)h(X(x,\mu)),M(\mu)\tag{6.1.2}$$

则称 g 和 h 是等价的，记为 $g\sim h$。若此时 $M(\mu)=\mu$，则称 g 和 h 是强等价的，记为 $g\overset{s}{\sim}h$。

由定义 6.1.1 可以推出以下几点结论。

推论 6.1.1 若 $g\sim h$，且$(0,0)$是 g 的一个奇异点，则$(0,0)$也是 h 的一个奇异点。

推论 6.1.2 若 $g\sim h$，则方程 $g(x,\mu)=0$ 和 $h(x,\mu)=0$ 在$(0,0)$附近解的数目有对应关系，$n_g(\mu)=n_h(M(\mu))$。

推论 6.1.3 若 $g\sim h$，则方程 $\dot{x}-g(x,\mu)=0$ 与 $\dot{x}-h(x,\mu)=0$ 的对应轨线有相同的时间定向，故对应的平衡点有相同的稳定性。

定义 6.1.2　若 $g \sim h$，且在点(0,0)的某个邻域 $U_1 \times V_1 \subset U \times V$ 内，有 $g(x,\mu) = h(x,\mu)$，则将 $g(x,\mu)$与 $h(x,\mu)$视为等同的。显然这种等同是一种等价关系。按这种等价关系得到的等价类称为芽。所有这样的芽组成一个线性空间，称为芽空间，记为 $\varepsilon_{x,\mu}$。

应用奇异性理论研究单变量分岔问题往往用到 $\varepsilon_{x,\mu}$ 中的三个重要理想，它们分别是限制切空间 $RT(f)$、扰动集 $P(f)$和内蕴理想 $I(f)$。

6.1.1　限制切空间

限制切空间是一个基本的概念，它是建立在强等价的基础上的。它的概念源于下面的问题，设芽 $g \in \varepsilon_{x,\mu}$，摄动 $p \in \varepsilon_{x,\mu}$ 满足什么样的条件时，会有 $g \overset{s}{\sim} g + tp$（$t$ 为小量）？先假设某些摄动 $p \in \varepsilon_{x,\mu}$ 满足上述要求，即对于小量 t，存在函数 $S(x,\mu,t)$及 $X(x,\mu,t)$，使得

$$g(x,\mu) + tp(x,\mu) = S(x,\mu,t)g(X(x,\mu,t),\mu) \tag{6.1.3}$$

其中

$$X(0,0,t) = 0 \tag{6.1.4}$$

进一步假设 X 和 S 是 x、μ、t 的光滑函数，且在 $t=0$ 处还有如下的恒等变换：

$$\left.\begin{aligned} S(x,\mu,0) &\equiv 1 \\ X(x,\mu,0) &\equiv x \end{aligned}\right\} \tag{6.1.5}$$

关于 t 在 $t=0$ 处，对式(6.1.3)求导，并利用式(6.1.5)得到

$$p(x,\mu) = \dot{S}(x,\mu,0)g(x,\mu) + g_x(x,\mu)\dot{X}(x,\mu,0) \tag{6.1.6}$$

“·”表示对时间 t 求导，由式(6.1.4)可知 $\dot{X}(0,0,0) = 0$。

限制切空间 $RT(g)$是上面所构造函数的全体，可得到下面的定义。

定义 6.1.3　芽 g 的限制切空间可由 $RT(g)$表示，它是芽 p 的全体构成

$$p(x,\mu) = a(x,\mu)g(x,\mu) + b(x,\mu)g_x(x,\mu) \tag{6.1.7}$$

其中 $a, b \in \varepsilon_{x,\mu}$，$b(0,0) = 0$，即

$$RT(g) = \{ag + bg_x \mid a, b \in \varepsilon_{x,\mu}, b(0,0) = 0\} \tag{6.1.8}$$

由上面的推导不难看出，$p \in RT(g)$是 $g + tp$（t 为小量）强等价于 g 的必要而非充分条件，因而有如下定理。

定理 6.1.1　设 $g, p \in \varepsilon_{x,\mu}$，若 $RT(g + tp) = RT(g)$，$\forall\, t \in [0,1]$，则

$$g \overset{s}{\sim} g + tp,\ \forall\, t \in [0,1] \tag{6.1.9}$$

可知，如果式(6.1.9)成立，必有 $p \in RT(g)$。

考虑条件 $b(0,0)$，则有 $b(x,\mu) = b_1 x + b_2 \mu$，因而限制切空间又可写为

$$RT(g) = \{ag + (bx + c\mu)g_x \mid a, b, c \in \varepsilon_{x,\mu}\} = \langle g, xg_x, \mu g_x \rangle$$

计算限制切空间的一般理论如下。

引理 6.1.1　设 $f(x) \in \varepsilon_n$，且 $f(0) = 0$，则存在光滑芽 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \varepsilon_n$，使得

$$f(x) = x_1 a_1(x) + \cdots + x_n a_n(x) \tag{6.1.10}$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots x_n)$，ε_n 是 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 的 C^∞ 函数芽组成的芽空间。

证明：设 f 定义在某个球 $B_\varepsilon\subset\mathbf{R}^n$ 上，任意给定 $x\in B_\varepsilon$，定义一个函数 $h(x)\equiv f(sx)$，其中 $0\leqslant s\leqslant 1$，利用 $h(0)=f(0)=0$ 得

$$f(x)=h(1)-h(0)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}(s)\mathrm{d}s$$

利用链锁法则得

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}(s)=\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(sx)$$

如果

$$a_i(x)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_i}(sx)\mathrm{d}s$$

显然 $a_i,i=1,2,\cdots,n\in\varepsilon_n$，且 f 具有表达式(6.1.10)。

引理 6.1.2　设芽 $g\in\varepsilon_{x,\mu}$，芽 $f\in RT(g)$ 当且仅当存在芽 $a,b,c\in\varepsilon_{x,\mu}$，使得

$$f=ag+(xb+\mu c)g_x \tag{6.1.11}$$

证明：充分性是显然的。下面证明必要性。

设 $f\in RT(g)$，于是存在 $a,b\in\varepsilon_{x,\mu}$，$b(0,0)=0$，使得

$$f(x,\mu)=a(x,\mu)g(x,\mu)+b(x,\mu)g_x(x,\mu)$$

再由 $b(0,0)=0$ 及引理 6.1.1 知，存在 $\bar{b}(x,\mu),\bar{c}(x,\mu)\in\varepsilon_{x,\mu}$，使得

$$b(x,\mu)=x\bar{b}(x,\mu)+\mu\bar{c}(x,\mu)$$

从而有

$$f(x,\mu)=a(x,\mu)g(x,\mu)+(x\bar{b}(x,\mu)+\mu\bar{c}(x,\mu))g_x$$

即式(6.1.11)成立。

设 $f\in\varepsilon_n$，用 $j^kf(x)$ 表示 f 在原点得 k 阶泰勒多项式，即

$$j^kf(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\frac{1}{\alpha!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f|_{x=0}x^\alpha$$

其中 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是非负整数的多重指标，且

$$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n,\quad \alpha=(\alpha_1)!\ \cdots(\alpha_n)!$$

$$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n},\quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

引理 6.1.3　**泰勒引理**　设 $f\in\varepsilon_n$，对任意非负整数 k 存在系数 $a_\alpha\in\varepsilon_n$，α 是多重复数指标且 $|\alpha|=k+1$，使得

$$f(x)=j^kf(x)+\sum_{|\alpha|=k+1}a_\alpha(x)x^\alpha \tag{6.1.12}$$

注 1：限制切空间 $RT(g)$ 为 $\varepsilon_{x,\mu}$ 中的理想。

注 2：限制切空间可用 g 的“初值条件”确定。

例 6.1.1　①证明下式：

$$RT(x^2+\mu)=\{g\in\varepsilon_{x,\mu}:g(0,0)=g_x(0,0)=0\} \tag{6.1.13}$$

证明：由引理 6.1.2 知，$RT(x^2+\mu)$由下面的芽的全体构成：

$$a(x^2+\mu)+(xb+\mu c)(2x)=(a+2b)x^2+(a+2xc)\mu \tag{6.1.14}$$

其中 $a,b,c\in\varepsilon_{x,\mu}$。

$RT(x^2+\mu)$还可用具有下面形式的芽的全体构成：

$$\alpha x^2+\beta\mu,\quad \alpha,\beta\in\varepsilon_{x,\mu}$$

反过来，给定 $\alpha,\beta\in\varepsilon_{x,\mu}$，令 $a=\beta,b=(\alpha-\beta)/2,c=0$，则

$$\alpha x^2+\beta\mu=(a+2b)x^2+(a+2xc)\mu\in RT(g)$$

如果 $g\in RT(g)$，可计算出 $g(0,0)=g_x(0,0)=0$。反过来，假设 $g(0,0)=g_x(0,0)=0$，应用引理 6.1.3($k=1$)知，存在系数 $a_{20},a_{11},a_{02}\in\varepsilon_{x,\mu}$，使得

$$g(x,\mu)=g_\mu(0,0)\mu+a_{20}x^2+a_{11}\mu x+a_{02}\mu^2\in RT(g)$$

此时

$$\alpha=a_{20},\beta=g_\mu(0,0)+a_{11}x+a_{02}\mu$$

至此，式(6.1.13)得证。

②证明下式：

$$RT(x^3-\mu x)=\{g\in\varepsilon_{x,\mu}:g(0,0)=g_x(0,0)=g_\mu(0,0)=g_{\mu\mu}(0,0)=0\} \tag{6.1.15}$$

证明：与上面的证明相似，先由引理 6.1.2 重新给出所有组成 $RT(x^3-\mu x)$的芽的形式

$$(a+3b)x^3-(a+2b-3xc)\mu x-c\mu^2\quad(a,b,c\in\varepsilon_{x,\mu})$$

每个芽可以写成下面的形式：

$$\alpha x^3+\beta\mu x+\gamma\mu^2\quad(\alpha,\beta,\gamma\in\varepsilon_{x,\mu})$$

这里的关键是线性系统

$$\begin{cases}a+3b=\alpha\\-a-2b+3xc=\beta\\-c=\gamma\end{cases}$$

是可逆的。当且仅当 $g(0,0)=g_x(0,0)=g_\mu(0,0)=g_{xx}(0,0)=0$，应用泰勒定理给出具有下列形式的芽 $\alpha x^3+\beta\mu x+\gamma\mu^2$，式(6.1.15)得证。

由上面的证明知道，在特征化一个芽的限制切空间时，下列三个步骤具有普遍的意义：

①去掉多余的生成子。如式 (6.1.14)中生成子 $2\mu x$ 可由另外两个生成子的线性组合

$$2\mu x=2x(x^2+\mu)-x(2x^2)$$

因此，可以去掉这个生成子。

②简化生成子

$$x^2=\frac{1}{2}(2x^2),\mu=(x^2+\mu)-\frac{1}{2}(2x^2)$$

③由 $RT(g)$的生成子特征化 $RT(g)$。特征化 $RT(g)$,即是寻求芽 $f\in RT(g)$的充要条件。这些条件包括 $f(0)$以及 f 在零点处的一些导数值。

下面的两个引理在求限制切空间 $RT(g)$时有很重要的作用。

引理 6.1.4 设 $F=<p_1,\cdots,p_k>$是在 ε_n 中有生成子 $p_1,\cdots,p_k$ 的一个理想。如果 $p_k=a_1p_1+\cdots a_{k-1}p_{k-1}$,其中 $a_i\in\varepsilon_n(i=1,\cdots k-1)$,则 F 由 $p_1,\cdots,p_{k-1}$生成。

引理 6.1.5 设 $F=<p_1,\cdots,p_k>$是 ε_n 中的理想。对于 $i=1,\cdots k$,若

$$q_i=\sum_{j=1}^{k}a_{ij}p_j \tag{6.1.16}$$

其中 $a_{ij}\in\varepsilon_n$。而且矩阵$\{a_{ij}(0)\mid i,j=1,\cdots,k\}$是可逆的,则 F 也是由 $q_1,\cdots,q_k$ 生成的。

需要证明$<q_1,q_2,\cdots,q_k>=<p_1,p_2,\cdots,p_k>$。

证明:由式(6.1.16)易见,$<q_1,q_2,\cdots,q_k>\subset<p_1,p_2,\cdots,p_k>$。为了得到逆包含的关系,即$<p_1,p_2,\cdots,p_k>\subset<q_1,q_2,\cdots,q_k>$,转化式(6.1.16)。设 $\boldsymbol{A}(x)$是有元素$\{a_{ij}(x)\}$的 $k\times k$ 阶矩阵。由 Cramer 法则,得

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{\det\boldsymbol{A}}\operatorname{adj}\boldsymbol{A} \tag{6.1.17}$$

其中 adj $\boldsymbol{A}$ 是$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,假设 $\det\boldsymbol{A}(0)\neq0$,由于连续性在原点的邻域内$\det\boldsymbol{A}(x)\neq0$,易知 adj $\boldsymbol{A}$ 的元素是光滑芽,从而 $\boldsymbol{A}^{-1}$的元素也是光滑芽。

解关于 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 的线性方程组(6.1.16)得

$$p_i=\sum_{j=1}^{k}b_{ij}q_j$$

其中 $b_{ij}\in\varepsilon_n$ 是$\boldsymbol{A}^{-1}(x)$的元素,由此易见$<p_1,p_2,\cdots,p_k>\subset<q_1,q_2,\cdots,q_k>$,结论得证。

引理 6.1.4 用于去掉多余的生成子,引理 6.1.5 用于简化生成子。因此有:

①$RT(x^2+\mu)=<x^2+\mu,2x^2,2\mu x>=<x^2+\mu,2x^2>=<x^2,\mu>$;

②$RT(x^3-\mu x)=<x^3-\mu x,3x^3-\mu x,3x^2\mu-\mu^2>=<x^3,\mu x,\mu^2>$。

引理 6.1.6 设 $g\in\varepsilon_{x,\mu}$,k 为一个正整数,若 $M^k\subset RT(g)+M^{k+1}$,则 $M^k\subset RT(g)$。

6.1.2 有限确定性与“扰动集”

令 $M=\{f\in\varepsilon_n\mid f(0)=0\}$,$M$ 是ε_n 中的一个理想,且由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 生成,即

$$M=<x_1,x_2,\cdots,x_n> \tag{6.1.18}$$

给定的 $F,G\in\varepsilon_n$,若 $F=<p_1,\cdots,p_k>$,$G=<q_1,\cdots,q_l>$,则

$$F+G=<p_1,\cdots,p_k,q_1,\cdots,q_l>,\ FG=\{p_iq_j\mid i=1,\cdots,k;j=1,\cdots,l\} \tag{6.1.19}$$

令 $M^2=M\cdot M$,$M^3=M\cdot M^2$,$\cdots$,$M^k=M\cdot M^{k-1}$,$\cdots$,根据式(6.1.19),由积理想定义可得

$$M^k=<x^\alpha\mid|\alpha|=k>$$

还可得

$$M^k=\left\{f\in\varepsilon_n\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(0)=0,|\alpha|\leqslant k-1\right.\right\}$$

引理 6.1.7　**中山引理**　设 F、G 均为 ε_n 中的理想，且 $F=<p_1,p_2,\cdots,p_l>$ 是有限生成的，则 $F\subset G$，当且仅当 $F\subset G+MF$。

证明：因为 $G\subset G+MF$，因此必要性是显然的。下面仅证明充分性。

设 $F\subset G+MF$，从而有

$$p_i=g_i\sum_{j=1}^{l}a_{ij}p_j \tag{6.1.20}$$

其中 $g_i\in G$，$a_{ij}\in M$，于是 $a_{ij}(0)=0$。设 $\boldsymbol{A}$ 是由元素 a_{ij} 构成的 $l\times l$ 矩阵，$\boldsymbol{I}$ 是 $l\times l$ 单位阵，线性方程组(6.1.20)变为

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\begin{bmatrix}p_1\\ \vdots\\ p_l\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g_1\\ \vdots\\ g_l\end{bmatrix} \tag{6.1.21}$$

由于 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{I}$，从而在原点的某个邻域内 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 是可逆的，可得到

$$\boldsymbol{p}_i=\sum_{j=1}^{l}\boldsymbol{b}_{ij}\boldsymbol{g}_j$$

其中 $\boldsymbol{b}_{ij}$ 是 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 的元素，再由 $g_j\in G(j=1,2,\cdots,l)$ 可知，$p_i\in G(i=1,2,\cdots,l)$，故有 $F\subset G$。

推论 6.1.4　设 $F=<p_1,p,\cdots,p_l>$ 是 ε_n 中的理想，$q_1,q_2,\cdots,q_l\in M\cdot F$，则 $F=<p_1+q_1,p_2+q_2,\cdots,p_l+q_l>$。

证明：设 $G=<p_1+q_1,p_2+q_2,\cdots,p_l+q_l>$，由 $p_i+q_i\in M+MF=F$ 知 $G\subset F$；反之，由 $p_i=(p_i+q_i-q_i)\in G+MF$ 及中山引理知 $F\subset G$。

推论 6.1.5　若芽 $g\in\varepsilon_{x,\mu}$ 满足 $M^k\subset RT(g)$，则 $g\overset{s}{\sim}j^*g$，j^*g 是 g 在原点处的 k 阶泰勒多项式。

证明：令 $r=j^*g-g\in M^{k+1}$，由定理 6.1.1 可知，要证明 $g\overset{s}{\sim}j^*g$，只需要证明

$$RT(g)=RT(g+tr)\quad(0\leqslant t\leqslant 1)$$

由 tr，txr_x，$t\mu r_x\in M^{k+1}\subset M^k$ 可知 $RT(g+tr)\subset RT(g)$。反之有 $g=(g+tr)-tr\in RT(g+tr)+M\cdot M^k\subset RT(g+tr)+MRT(g)$。

对于 xg_x 和 μg_x 亦有类似的情况，由中山引理可知

$$RT(g)=RT(g+tr)$$

定义 6.1.4　对于 $g\in\varepsilon_{x,\mu}$，若存在 k 使 g 与 $j^k(g)$ 强等价，则称 g 为有限确定。

定义 6.1.5　设 $F\subset\varepsilon_n$ 是一线性子空间，若存在一有限维子空间 $V\subset\varepsilon_n$，使得 $F+V=\varepsilon_n$，则称 F 有有限余维，否则称 F 具有无穷余维。

定理 6.1.2　设 $F\subset\varepsilon_n$ 为一理想，则 F 有有限余维的充要条件是：存在整数 k 使得 M^k

$\subset F$。

证明:充分性。若 $M^k \subset F$,则 codim $F \leqslant$ codim $M^k < \infty$。

必要性。设 codim $F = l - 1$,则由

$$F \subset F + M^l \subset F + M^{l-1} \subset \cdots \subset F + M = M$$

知

$$l - 1 = \text{codim} F \geqslant \text{codim}\ (F + M^l) \geqslant \cdots \geqslant 1$$

可见存在 $k \leqslant l$ 使 codim $(F + M^k) \geqslant$ codim $(F + M^{k+1})$,由 $F + M^{k+1} \subset F + M^k$ 知 $F + M^k = F + M_{k+1}$,进而 $M^k \subset F + M^{k+1}$,从而 $M^k \subset F$。

定义 6.1.6 称 $g \in \varepsilon_{x,\mu}$有有限余维,是指 $RT(g)$在 $\varepsilon_{x,\mu}$中的余维有限。

定理 6.1.3 若 $g \in \varepsilon_{x,\mu}$有有限余维,则 g 是有限确定的。

现在引进"扰动集"的概念。

定义 6.1.7 $\forall t \in \mathbf{R}, g \overset{s}{\sim} h$,芽 $h \in \varepsilon_{x,\mu}$的"扰动集"定义为

$$P(h) = \{p \in \varepsilon_{x,\mu} : TR(g + p) = RT(g)\}$$

由 $p(h)$的定义及推论 6.1.5 即得下面定理。

定理 6.1.4 设 $p \in P(h), g \overset{s}{\sim} h$,则 $g + tp \overset{s}{\sim} g, \forall t \in \mathbf{R}$。特别地,$g + tp$ 与 g 强等价。

定理 6.1.5 设 $h \in \varepsilon_{x,\mu}$,则 $P(h)$是 $\varepsilon_{x,\mu}2$ 中的理想。

证明:设 $p_1, p_2 \in P(h), g \overset{s}{\sim} h$,则 $g + tp_1 \overset{s}{\sim} g \overset{s}{\sim} h$,进而 $RT(g + tp_1 + sp_2) = RT(g + tp_1) = RT(g)$。令 $s = t$ 知 $p_1 + p_2 \in P(h)$。由此可见 $P(h)$为线性空间,设 $f \in \varepsilon_{x,\mu}, p \in P(h)$,记

$$f(x,\mu) = s + k(x + \mu), s \in \mathbf{R}, k \in M$$

由 $RT(g + t(sp_1)) = RT(g)$知 $sp \in P(h)$,故只要证明 $kp \in P(h)$。由 $RT(g + p) = RT(g)$易知 $p, xp_x, \mu p_x \in RT(g)$,进而 $kp, x(kp)_x$ 和 $\mu(kp)_x \in M \cdot RT(g)$,从而

$$RT(g + tp) = < g + tkp, xg_x + tx(kp)_x, \mu g_x + t\mu(kp)_x >$$
$$= < g, xg_x, \mu g_x > = RT(g)$$

故 $kp \in P(h)$,可见 $P(h)$为理想。

定理 6.1.6 设 $h \in \varepsilon_{x,\mu}$有有限余维,$P(h)$为 h 的"扰动集",设 $p \in P(h), g \overset{s}{\sim} h$,则 $g \in P(h)$。

证明:只证当 $g \overset{s}{\sim} h$ 时,$RT(g + tp)RT(g)$。

设

$$q(x,\mu) = s(x,\mu)p(X(x,\mu)\mu), s(0,0) > 0, X(0,0) = 0, X_x(0,0) > 0$$

记 $\gamma = (s, X)$,则 $g = \gamma^* p$,因而

$$RT(g + tp) = RT(g + tr^* p) = \gamma^* RT((r^*)^{-1} g + tp)$$

$$= r^* RT((r^*)^{-1}g) = RT(g)$$

6.1.3　内蕴理想

为得到识别问题的解，必须引进内蕴理想的概念，讨论只适合在芽空间 $\varepsilon_{x,\mu}$ 中进行。内蕴理想是强等价交换下不变的理想。

定义 6.1.8　称理想 $G\subset\varepsilon_{x,\mu}$ 是内蕴的，若对所有的 g，有 $h\in\varepsilon_{x,\mu}$，当 $g\in G$ 及 $g \overset{s}{\sim} h$ 时，则有 $h\in G$。

例 6.1.2　$M, <\mu>$ 均为内蕴理想，且 M 有有限余维。

易见，若 $G, F\in\varepsilon_{x,\mu}$ 是内蕴理想，则 $G+F$ 和 $G\cdot F$ 亦为内蕴理想，于是，形如

$$M^k + M^{k_1} <\mu^{l_1}> + \cdots + M^{k_s} <\mu^{l_s}> \tag{6.1.22}$$

是(余维有限的)内蕴理想。

对于有有限余维的理想 $G\subset\varepsilon_{x,\mu}$ 记 $G^{\perp}$ 为 $\varepsilon_{x,\mu}$ 中不属于 G 中的单项式张成的有限维子空间，显然有 $\varepsilon_{x,\mu} = G\oplus G^{\perp}$。

例 6.1.3　$G = <x+\mu, \mu^2>$ $(G = M^2 + <x+\mu>)$，则 $G^{\perp} = R\{1, \mu, x\}$。

定理 6.1.7　设 $G\subset\varepsilon_{x,\mu}$ 为有有限余维内蕴理想，则

①若 $f\in G$，则 $xf_x, \mu f_x\in G$，进而 $RT(f)\subset G$；

②$p(x,\mu) = \sum a_\alpha x^{\alpha_1}\mu^{\alpha_2}$，则 $p\in G$，当且仅当 $a_\alpha\neq 0$ 时，$x^{\alpha_1}\mu^{\alpha_2}\in G$；

③若 $x^{\alpha_1}\mu^{\alpha_2}\in G$，则 $M^{\alpha_1} <\mu^{\alpha_2}>\subset G$；

④G 可以表示为

$$G = M^{k_0} + M^{k_1} <\mu^{l_1}> + \cdots + M^{k_s} <\mu^{l_s}>$$

其中 $0<l_1<l_2<\cdots<l_s, k_0>k_1+l_1>\cdots>k_s+l_s>0$。

推论 6.1.6　设 $G\subset\varepsilon_{x,\mu}$ 为有有限余维的内蕴理想，则 $\varepsilon_{x,\mu} = G\oplus G^{\perp}$。

设理想 $G\subset\varepsilon_{x,\mu}$ 有有限余维，用 Itr G 为含于 G 中的最大内蕴理想，它可看成 G 中所有内蕴理想的和。

推论 6.1.7　设 $G\subset\varepsilon_{x,\mu}$ 有有限余维，则 $G = (\text{Itr } G)\oplus V_g$，其中 $V_g = G\cap(\text{Itr } G)^{\perp}$。

用 $I(h)$ 表示含有 h 的最小内蕴理想，它可以视为所有含有 h 的内蕴理想的交。明显地，若 $g \overset{s}{\sim} h$，则 $I(g) = I(h)$，事实上，由定义可知 $g\in I(h)$，故 $I(g)\subset I(h)$，同理 $I(h)\subset I(g)$。

定理 6.1.8　设 $h\in\varepsilon_{x,\mu}$ 为有有限余维，则

①$I(h)$ 亦为有有限余维的内蕴理想；

②$I(h) = \sum\{M^{\alpha_1} <\mu^{\alpha_2}> \mid D^{\alpha}h(0,0)\neq 0\}$；

③设 $g \overset{s}{\sim} h$，则当 $x^{\alpha_1}\mu^{\alpha_2}\in I(h)^{\perp}$ 时，$D^{\alpha}g(0,0) = 0$；

④设 $g \overset{s}{\sim} h$,则当 $x^{\beta_1}\mu^{\beta_2}$ 为 $I(h)$的内蕴生成子时,$D^{\beta}g(0,0)\neq 0$。

证明:仍设 $M^k \subset RT(h)$。

①由推论 6.1.5,$h \overset{s}{\sim} j^k h$,进而 $I(h)=I(j^k h)$,所以可设 h 为多项式,当 h 为多项式时,不难证明定理 6.1.8 亦真,故 $RT(h)\subset I(h)$,因此 $\operatorname{codim} I(h)<\infty$。

②利用定理 6.1.7 中的②及推论 6.1.7 结论②获证。

③若 $x^{\alpha_1}\mu^{\alpha_2}\in I(h)^{\perp}$,而 $D^{\alpha}g(0,0)\neq 0$,则由②知 $x^{\alpha_1}\mu^{\alpha_2}\in I(g)=I(h)$,矛盾。

④设 $x^{\beta_1}\mu^{\beta_2}$ 为 $I(h)$的内蕴生成元,由①知 $M^{\beta_1}<\mu^{\beta_2}>\subset I(h)=I(g)$,故 $D^{\beta}(0,0)\neq 0$。

例 6.1.4 设 $h=x^3-\mu x$,由定理 6.1.8②得

$$I(h)=M^3+M<\mu>$$

此时

$$(I(h))^{\perp}=R\{1,x,\mu,x^2\}$$

$x^3,\mu x$ 是 $I(h)$的内蕴生成子,结合定理 6.1.8③和④知:若 $g \overset{s}{\sim} h$,则必有在$(x,\mu)=(0,0)$处,$g=g_x=g_u=g_{xx}=0$,且 $g_{xxx}\neq 0, g_{\mu x}\neq 0$。

下面两个定理给出内蕴理想和“扰动集”的关系。

定理 6.1.9 设 G 为内蕴理想,而且 $RT(h+p)=RT(h)$对一切 $p\in G$,则 $G\subset P(h)$。

定理 6.1.10 设 h 为有有限余维,则 $P(h)$为有有限余维的内蕴理想,且

$$\operatorname{Itr} MRT(h)\subset \mathrm{P}(h)\subset \operatorname{Itr} RT(h)$$

6.1.4 识别问题

以上讨论了 3 个有用的理想,现在转入识别问题的求解。如前所述,这里的一个关键是对某个分岔问题 h 计算出它的“扰动集”$P(h)$。

定理 6.1.11 设 $h\in \varepsilon_{x,\mu}$为有有限余维,则

$$P(h)=\operatorname{Itr} Q(h)$$

其中 $Q(h)=<xh,\mu h,x^2h_x,\mu h_x>=M\cdot RT(h)+<\mu h_x>$。

证明:仅证 $P(h)\subset \operatorname{Itr} Q$,设 $P(h)\in \operatorname{Itr} Q(h)$,只要证明 $RT(h+p)=RT(h)$。由定理 6.1.7 知 $xp_x,\mu p_x\in \operatorname{Itr} Q(h)\subset Q(h)$,因而

$$p=A_1h+B_1xh_x+C_1\mu h_x$$

$$xp_x=A_2h+B_2xh_x+C_2\mu h_x$$

$$\mu p_x=A_3h+B_3xh_x+C_3\mu h_x$$

其中 $A_i(0,0)=B_i(0,0)=0(i=1,2,3)$,$C_3(0,0)=0$ 两边加上向量$[h \quad xh_x \quad \mu h_x]^{\mathrm{T}}$,然后表示成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} h+p \\ x(h+p)_x \\ \mu(h+p)_x \end{bmatrix}=(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{I})\begin{bmatrix} h \\ xh_x \\ \mu h_x \end{bmatrix}$$

其中 Q 为在(0,0)点的奇异矩阵,因而 $I+Q$ 非奇异,从而

$$RT(h+p)=RT(h)$$

例 6.1.5　芽 $g\in\varepsilon_{x,\mu}$ 强等价于 $h=\varepsilon x^k+\delta\mu$,当且仅当在 $x=\mu=0$ 处,$g=\frac{\partial}{\partial x}g=\cdots=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k-1}g=0,\varepsilon=\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k g$ 及 $\delta=\operatorname{sgn} g_\mu(\varepsilon=\pm1,\delta=\pm1)$。

证明:明显地 $I(h)=M^k+<\mu>$,故 $g=ax^k+b\mu p(x,\mu)$。这里实数 $a,b\neq0,p\in M^{k+1}+M<\mu>$。其次,由于 $MRT(h)=M(M^k+<\mu>)=M^{k+1}+M<\mu>$ 及 $<\mu h_x>=<\mu x^{k-1}>\subset M<\mu>$,可知 $P(h)^{k+1}+M<\mu>$,故

$$g\overset{s}{\sim}ax^k+b\mu\overset{s}{\sim}h$$

例 6.1.6　$g\in\varepsilon_{x,\mu}$ 强等价于 $h=\varepsilon x^k+\varepsilon\mu x(\varepsilon=\pm1,\delta=\pm1)$,当且仅当在 $x=\mu=0$ 处有

$$g=\frac{\partial}{\partial x}g=\cdots=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k-1}g=0,\varepsilon=\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k g,\delta=\operatorname{sgn}\frac{\partial}{\partial x\partial\mu}g$$

证明:$I(h)=M^k+M<\mu>$,故 $g=ax^k+b\mu x+p(x,\mu),p(x,\mu)\in M^{k+1}+M^2<\mu>+<\mu^2>$。而 $P(h)=M^{K+1}+M^2<\mu>+<\mu^2>$,故

$$g\overset{s}{\sim}ax^k+b\mu x\overset{s}{\sim}h$$

例 6.1.7　$g\in\varepsilon_{x,\mu}$ 强等价于 $h=\varepsilon x^3+\delta\mu^2(\varepsilon=\pm1,\delta=\pm1)$,当且仅当在 $x=\mu=0$ 处,

$$g=g_x=g_\mu=g_{xx}=g_{\mu x}=0\text{ 及 }\varepsilon=\operatorname{sgn} g_{xxx},\delta=\operatorname{sgn} g_{\mu\mu}$$

证明:$I(h)=M^3+<\mu^2>$,且 $P(h)=M^4+M^2<\mu>$,类似地可得到所要求的结果。

设 $h\in\varepsilon_{x,\mu}$,且(0,0)为 h 的一个奇异点,则 h 的识别问题就是研究与 h 强等价的 g 所需满足的条件,这些条件称为 h 的识别条件。由数学分析可知,任意一个复杂的连续函数,只要其足够光滑,总可以在原点处展开为多项式级数,而在 5.1 节中知道,k 阶多项式可以通过近恒同变换化为简单的 k 阶范式。故范式的识别条件一直是人们研究的重点。表 6-1 列出了对应函数 $g(x,\mu)$ 的一些常用的范式的识别条件。这些范式称为戈鲁比茨基-沙弗范式,简称 GS 范式。

表 6-1　一些 GS 范式的识别条件($\varepsilon,\delta=\pm1$)

编号	GS 范式	在 $x=\mu=0$ 处的识别条件
1	$\varepsilon x^k+\delta\mu$ $(k\geqslant2)$	$g=g_x=\cdots=\partial^{k-1}g/\partial x^{k-1}=0$ $\varepsilon=\operatorname{sgn}(\partial^k g/\partial x^k),\delta=\operatorname{sgn} g_\mu$
2	$\varepsilon x^k+\delta\mu x$ $(k\geqslant3)$	$g=g_x=\cdots=\partial^{k-1}g/\partial x^{k-1}=g_\mu=0$ $\varepsilon=\operatorname{sgn}(\partial^k g/\partial x^k),\delta=\operatorname{sgn} g_{x,\mu}$
3	$\varepsilon(x^2+\delta\mu^2)$	$g=g_x=g_\mu=0$ $\varepsilon=\operatorname{sgn} g_{xx},\delta=\operatorname{sgn}\det D^2 g$

续表

编号	GS 范式	在 $x=\mu=0$ 处的识别条件
4	$\varepsilon x^2+\delta\mu^3$	$g=g_x=g_\mu=\det D^2 g=0$ $\varepsilon=\operatorname{sgn} g_{x\mu}, \delta=\operatorname{sgn} g^*_{\mu\mu}$
5	$\varepsilon x^2+\delta\mu^4$	$g=g_x=g_\mu=\det D^2 g=g_{\mu\mu}=0$ $\varepsilon=\operatorname{sgn} g_{xx}, \delta=\operatorname{sgn} q^*$
6	$\varepsilon x^3+\delta\mu^2$	$g=g_x=g_\mu=g_{xx}=g_{x\mu}=0$ $\varepsilon=\operatorname{sgn} g_{xxx}, \delta=\operatorname{sgn} g_{\mu\mu}$

关于表 6-1 有以下几点要说明。

①限定条件和非退化条件都是对$(x,\mu)=(0,0)$取值的。在非退化条件中要求在 sgn 的括号内的部分不等于 0。

②$\Delta=\det D^2 g$,其中 $D^2 g$ 是$g(x,\mu)$的海赛矩阵,即

$$D^2 g=\begin{bmatrix} g_{xx} & g_{x\mu} \\ g_{\mu x} & g_{\mu\mu} \end{bmatrix}$$

③在第 4、5 两行中,由于 $\Delta=0$,故 $D^2 g$ 有零特征根。记 $\boldsymbol{v}$ 为 $D^2 g$ 的零特征根所对应的特征向量,g_v 表示 g 沿着 $\boldsymbol{v}$ 的方向导数,$q=g_{vvv}g_{xx}-3g_{vvx}^2$。

例如,若 $g(x,\mu)=a(x+b\mu)^2$,其中 $a\neq 0$,则

$$D^2 g=\begin{bmatrix} 2a & 2ab \\ 2ab & 2ab^2 \end{bmatrix}$$

显然此时 $\Delta=0$,取 $\boldsymbol{v}=[b \quad -1]^{\mathrm{T}}$ 为 $D^2 g$ 的零特征根所对应的特征向量,则此时方向导数算子为

$$\frac{\partial}{\partial v}=b\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial \mu}$$

由于表 6-1 中给出的识别条件只包括 g 的几个偏导数,故只需计算 g 的泰勒展开式的有限多项,就可以判定 g 是否与 h 等价。此时称 h 是有限确定的。

下面举例说明如何利用表 6-1 来研究一维静态分岔问题。

例 6.1.8 考虑方程

$$g(x,\mu)=-x+(2\mu+1)\sin x=0 \tag{6.1.23}$$

的分岔特性。

解:上式有平衡点(0,0),且有

$$g(0,0)=g_x(0,0)=g_{xx}(0,0)=g_\mu(0,0)=0, g_{xxx}(0,0)=-1, g_{x\mu}=2$$

符合表 6-1 的第二行的识别条件,故知 $g(x,\mu)$的范式为 $h(x,\mu)=\mu x-x^3$,$g(x,\mu)$在点(0,0)处会发生超临界叉形分岔。

6.2　开折问题

方程往往是对真实物理现象作一定的简化后得到的理想的数学模型，而真实状态与理想状态之间有一定的差别，这种差别称为非完全性。把非完全性看成对理想系统的一个扰动，并通过引入附加参数来体现非完全性对系统的扰动，这种方法称为开折。开折问题就是研究非完全性对方程的分岔性态的影响。

6.2.1　普适开折与切空间的概念

定义 6.2.1　对芽 $g(x,\mu)\in\varepsilon_{x,\mu}$，其中 $\mu\in\mathbf{R}$，若存在芽 $G(x,\mu,a)\in\varepsilon_{x,\mu,a}$，其中 $a=(a_1,\cdots,a_k)\in\mathbf{R}^k(k\geqslant 0)$，使得当 $a=0$ 时有

$$G(x,\mu,0)=g(x,\mu) \tag{6.2.1}$$

则称 G 为 g 的一个 k-参数开折，a 称为开折参数。特别地，g 的 0-参数开折就是 g 本身。

由于 $G(x,\mu,a)=g(x,\mu)+[G(x,\mu,a)-G(x,\mu,0)]$，所以 $G(x,\mu,a)$ 可以看作是 $g(x,\mu)$ 的一个扰动函数，其中扰动与 k 个附加参数 $a_1,\cdots,a_k$ 有关。

由定义 6.2.1 可以看出，函数 $g(x,\mu)$ 有无穷多个开折。下面讨论这些开折之间的关系。

定义 6.2.2　设 $G(x,\mu,a)$ 和 $G(x,\mu,\beta)$ 是芽 $g(x,\mu)$ 的两个开折。$(x,\mu,\beta)=(0,0,0)$ 的某邻域内存在 C^∞ 同胚 $T(x,\mu)\to(X(x,\mu,\beta),M(\mu,\beta),S(x,\mu,\beta))\in\varepsilon_{x,\mu}A(\beta)\in\varepsilon_\beta$，并满足

$$\left.\begin{aligned}&S(0,0,0)>0\\&X'_x(0,0,0)>0\\&M'_\mu(0,0)>0\end{aligned}\right\} \tag{6.2.2}$$

和

$$\left.\begin{aligned}&S(x,\mu,0)\equiv 1\\&X(x,\mu,0)\equiv x\\&M(\mu,0)\equiv\mu\\&A(0)=0\end{aligned}\right\} \tag{6.2.3}$$

使得

$$H(x,\mu,\beta)=S(x,\mu,\beta)G(X(x,\mu,\beta),M(\mu,\beta),A(\beta)) \tag{6.2.4}$$

则称 H 由 G 代理。

将定义 6.2.2 中的条件与定义 6.1.1 相比较，可以立即得到如下结论。

推论 6.2.1　若开折 H 由开折 G 代理，则对开折 H 的每个元素 $H(*,*,\beta)$，都可以找到开折 G 的某个元素 $G(*,*,A(\beta))$ 与 $H(*,*,\beta)$ 等价。也就是说，开折 G 在等价的意义下包含了由开折 H 给出的一切扰动。

例 6.2.1 设 $g(x,\mu)=x^3-\mu x$。显然，$G(x,\mu,\alpha_1,\alpha_2)=x^3-\mu x+\alpha_1+\alpha_2 x^2$ 是 g 的一个 2-参数开折，而 $H(x,\mu,\beta)=x^3-\mu x+\beta^3$ 是 g 的一个 1-参数开折，其中 $\mu,\alpha_1,\alpha_2,\beta\in\mathbf{R}$。若取 $S=1, X=x+\beta, M=\mu+3\beta^2, A_1=0, A_2=-3\beta$，则有 $H(x,\mu,\beta)=S\cdot G(X,M,A_1,A_2)$。这表明 H 可由 G 代理。

定义 6.2.3 设 $g\in\varepsilon_{x,\mu}, \mu\in\mathbf{R}$，$G$ 是 g 的某个开折，且 g 的任何开折都可由 G 代理，则称 G 是 g 的一个通有开折。g 的通有开折通常有无数个。它们中间所含参数的数目最少的开折称为普适开折，其开折参数的个数称为 g 的余维数，记作 codim g。并非任何 $g\in\varepsilon_{x,\mu}$ 都有通有开折。若 g 没有通有开折，则称 g 的余维数为无穷大。此外，g 的普适开折一般不是唯一的。

由普适开折的定义和推论 6.2.1 立即可知，g 的普适开折通过引入数目最少的参数就能在等价的意义下包含了 g 的一切扰动函数。因此普适开折的计算就成为开折问题的主要研究内容。

下面简介普适开折的计算方法。为此引入切空间的概念。

定义 6.2.4 芽 $g(x,\mu)\in\varepsilon_{x,\mu}$ 的切空间 $T(g)$ 定义为

$$T(g)=\{a(x,\mu)g+b(x,\mu)g_x+c(\mu)g_\mu\} \tag{6.2.5}$$

其中 $a,b\in\varepsilon_{x,\mu}, c\in\varepsilon_\mu$。

定理 6.2.1 **普适开折定理** 设 $g\in\varepsilon_{x,\mu}$，G 为 g 的 k-参数开折，则 G 为 g 的普适开折的充要条件是

$$\varepsilon_{x,\mu}=T(g)+R\left\{\frac{\partial G}{\partial\alpha_i}(x,\mu,0),\cdots,\frac{\partial G}{\partial\alpha_k}(x,\mu,0)\right\}$$

显然，$T(g)$ 是 $\varepsilon_{x,\mu}$ 的子空间。可以证明，g 的余维数等于切空间 $T(g)$ 的余维数，即

$$\text{codim } g=\text{codim } T(g)=\dim V=k$$

其中 V 是 $T(g)$ 在 $\varepsilon_{x,\mu}$ 中的补空间，$\varepsilon_{x,\mu}=T(g)\oplus V$。若 V 有一组基向量 $\{p_1,\cdots,p_k\}$，则

$$G(x,\mu,a)=g(x,\mu)+\sum_{j=1}^{k}a_jp_j(x,\mu) \tag{6.2.6}$$

是 g 的一个普适开折，其中 $a=(a_1,\cdots,a_k)\in\mathbf{R}^k$ 是开折参数。于是普适开折的计算可归结为确定补空间 V 的基向量。

6.2.2 普适开折的计算

定理 6.2.2 $RT(g)$ 有有穷余维的充要条件是 $T(g)$ 具有有穷余维。

定理 6.2.3 设 $g\in\varepsilon_{x,\mu}$ 有有限余维，则存在 $l\geqslant 0$，使

$$T(g)=RT(g)\oplus R\{g_x,g_\mu,\mu g_\mu,\cdots,\mu^l g_\mu\}$$

应用以上的定理及普适开折的结构，可以给出普适开折的计算步骤如下：

①确定整数 l 使得

$$T(g) = RT(g) \oplus R\{g_x, g_\mu, \mu g_\mu, \cdots, \mu^l g_\mu\}$$

②将 $T(g)$分解为下列形式

$$T(g) = [\mathrm{Itr}\ T(g)] \oplus V_g$$

其中 $V_g = T(g) \cap [\mathrm{Itr} T(g)]^\perp$。

③在$[\mathrm{Itr}\ (g)]^\perp$中找出 V_g 的补基$p_1, p_2, \cdots, p_k$，即

$$[\mathrm{Itr}\ T(g)]^\perp = V_g \oplus R\{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$$

则 g 的普适开折为

$$G(x, \mu, \alpha) = g(x, \mu) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i p_i(x, \mu)$$

例 6.2.2　计算 $g = x^3 - \mu x$ 的余维数和普适开折。

解：易知 $RT(g) = M^2 + <\mu>$ 且 $T(g) = \varepsilon_{x,\mu}$，于是 $g = x^2 + \mu$ 的余维数为零，普适开折即为其本身。

6.2.3　普适开折的识别

定理 6.2.4　设 $G(x, \mu, a)$是 $g(x, \mu)$的一个 k-参数开折，$g(x, \mu)$与某个余维数为 k 的 GS 范式 $h(x, \mu)$强等价，若按表 6-2 根据 $h(x, \mu)$的形式并利用 $G(x, \mu, a)$和 $g(x, \mu)$的一些导数构造矩阵 $A(x, \mu, a)$，则 $G(x, \mu, a)$是 $g(x, \mu)$的普适开折的充要条件是

$$\det A(0,0,0) \neq 0$$

表 6-2 列出了对应函数 $g(x, \mu)$的初等分岔普适开折的识别条件。

表 6-2　初等分岔普适开折的识别条件 $\varepsilon = \pm 1, \delta = \pm 1$

GS 范式	余维数	非奇异矩阵
① $\varepsilon x^2 + \delta\mu$	0	—
②、③ $\varepsilon(x^2 + \delta\mu^2)$	1	G_α
④ $\varepsilon x^3 + \delta\mu$	1	$\begin{bmatrix} g_\mu & g_{\mu x} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} \end{bmatrix}$
⑤ $\varepsilon x^2 + \delta\mu^3$	2	$\begin{bmatrix} 0 & g_{xx} & g_{x\mu} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\mu} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\mu} \end{bmatrix}$
⑥ $\varepsilon x^3 + \delta\mu x$	2	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & g_{x\mu} & g_{xxx} \\ 0 & g_{\mu x} & g_{\mu\mu} & g_{\mu xx} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\mu} & G_{\alpha xx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\mu} & G_{\beta xx} \end{bmatrix}$
⑦ $\varepsilon x^4 + \delta\mu$	2	$\begin{bmatrix} g_\mu & g_{\mu x} & g_{\mu xx} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha xx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta xx} \end{bmatrix}$

续表

GS范式	余维数	非奇异矩阵
⑧$\varepsilon x^2+\delta\mu^4$	3	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{xx} & g_{x\mu} & g_{\mu\mu} \\ 0 & g_{xx} & g_{x\mu} & g_{xxx} & g_{xx\mu} & g_{x\mu\mu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{xx} & 2g_{x\mu} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\mu} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha x\mu} & G_{\alpha\mu\mu} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\mu} & G_{\beta xx} & G_{\beta x\mu} & G_{\beta\mu\omega} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma\mu} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma x\mu} & G_{\gamma\mu\mu} \end{bmatrix}$
⑨$\varepsilon x^3+\delta\mu^2$	3	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & g_{x\mu} & g_{xxx} & g_{xx\mu} \\ 0 & g_{\mu x} & g_{\mu\mu} & g_{\mu xx} & g_{\mu\mu x} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\mu} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha\mu x} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\mu} & G_{\beta xx} & G_{\beta\mu x} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma\mu} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma\mu x} \end{bmatrix}$
⑩$\varepsilon x^4+\delta\mu x$	3	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & g_{xxxx} \\ 0 & 0 & g_{\mu\mu} & g_{\mu xx} & g_{\mu xxx} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\mu} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha xxx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\mu} & G_{\beta xx} & G_{\beta xxx} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma\mu} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma xxx} \end{bmatrix}$
⑪$\varepsilon x^5+\delta\mu$	3	$\begin{bmatrix} g_\mu & g_{\mu x} & g_{\mu xx} & g_{\mu xxx} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha xxx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta xx} & G_{\beta xxx} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma xxx} \end{bmatrix}$

表中 α、β、γ 是普适开折中的开折参数，$\varepsilon=\pm1$，$\delta=\pm1$。

6.2.4 普适开折的保持性、分岔图

设 $G(x,\mu,a)$是 $g(x,\mu)$的普适开折，(0,0)是 g 的一个奇异点，由于普适开折 G 已包含了对 g 的一切扰动，因此 G 的静态分岔反映了当 g 受扰时可能出现的各种分岔性态。下面讨论开折参数 α 对普适开折 G 的分岔图的影响，即“保持性”问题。

定义 6.2.5 若对于 $\alpha\in\mathbf{R}^k$ 的一个邻域 U 中的任意 β，$G(*,*,\alpha)$与 $G(*,*,\beta)$等价，从而当 $G(x,\mu,\alpha)$受到小扰动时分岔图的定性性态保持不变，则称 G 在 α 处的分岔图是持久的，即分岔是通有的；否则称分岔图是非持久的，即分岔是退化的。

可以证明，当且仅当 α 属于下列点集之一时，$G(x,\mu,\alpha)$的分岔图是非持久的。

①$B=\{\alpha\in\mathbf{R}^k\mid$存在$(x,\mu)$，使得在$(x,\mu,\alpha)$处有 $G=G_x=G_\mu=0\}$；

②$H=\{\alpha\in\mathbf{R}^k\mid$存在$(x,\mu)$，使得在$(x,\mu,\alpha)$处有 $G=G_x=G_{xx}=0\}$；

③$D=\{\alpha\in\mathbf{R}^k\mid$存在$(x_i,\mu),i=1,2,x_1\neq x_2$,使得在$(x,\mu,\alpha)$处有 $G=G_x=0\}$。

将满足集 B、H 和 D 中的条件的 $G(*,*,\alpha)$的奇异点(x,μ)分别称为分支点、滞后点和双极限点。

记集 $\Sigma=B\cup H\cup D$,称为转迁集。它把开折参数空间划分为若干区域。由上可知,$G(*,*,\alpha)$的分岔图按开折参数 α 可分为两大类:

①当 $\alpha\in\Sigma$ 时,$G(*,*,\alpha)$的分岔图是非持久的,并可按 Σ 的不同子集作进一步的分类;

②当 $\alpha\notin\Sigma$ 时,$G(*,*,\alpha)$的分岔图是持久的,并可按 Σ 划分的子区域作进一步的分类。

例 6.2.3　考虑 $g(x,\mu)=x^3-\mu x$,它的一个普适开折为

$$G(x,\mu,\alpha,\beta)=x^3+\mu x+\alpha+\beta x^3\quad(\alpha,\beta\in R^2)$$

利用 $G_x=3x^2-\mu+2\beta x$, $G_\mu=-x$, $G_{xx}=6x+2\beta$,不难求出

$$B\{(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2:\alpha=0\},H=\{(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2:\alpha=\beta^3/27\}$$

$D=\Phi$,转迁集为 $\Sigma=B\cup H$。转迁集把参数(α,β)平面分成 4 个连通分支,在图 6-1 上给出普适开折 G 在不同的(α,β)数值下的静态分岔图。在 4 个连通分支Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ中,G 的分岔图上的点都是极限点;在集 B 上,G 的分岔图上有跨临界点(它是分岔点);在集 H 上(即曲线 $\alpha=\beta^3/27$ 上),G 的分岔图上有滞后点;在原点处,G 的分岔图上有叉形点(它既是分岔点,又是滞后点),由于 $D=\Phi$,因而其分岔图上没有双极限点。

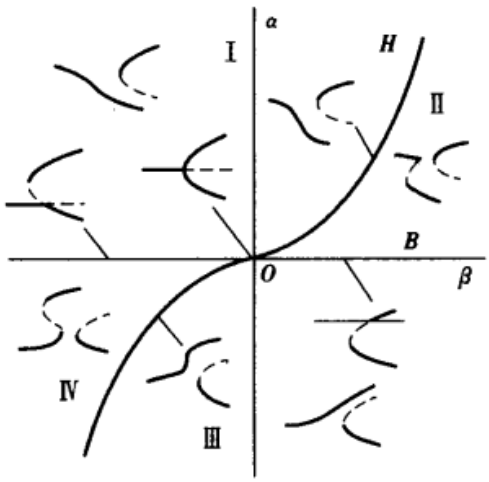


图 6-1　普适开折分岔图

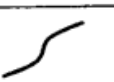
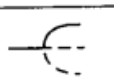
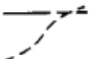
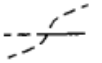
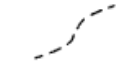
6.3　分类问题

分类问题研究对方程 $g(x,\mu)=0$ 的静态分岔按定性性态进行分类。随着 g 的余维数增加,奇异点的退化程度增大,在 g 受扰动后可能出现的分岔情况变得更加复杂,因此余维

数在静态分岔的分类问题中起着重要的作用。表 6-3 列出了余维数不超过 3 的奇异点的分类结果和相应的分岔图。

可以证明，若(0,0)是 g 的奇异点，且 codim $g \leqslant 3$，则 g 必与表 6-3 中所列的 11 种 GS 范式中的某一个强等价，或者说，余维数不超过 3 的奇异点只有 11 种静态分岔性态。

表 6-3 余维数≤3 的分岔问题的 GS 范式、普适开折及分岔图

序号	余维数	GS 范式	普适开折	分岔图 $\epsilon=1$		分岔图 $\epsilon=-1$		奇点类型
				$\delta=-1$	$\delta=1$	$\delta=-1$	$\delta=1$	
1	0	$\epsilon x^2+\delta\mu$	$\epsilon x^2+\delta\mu$					极限点
2	1	$\epsilon(x^2-\mu^2)$	$\epsilon(x^2-\mu^2)+\alpha$					跨临界点
3	1	$\epsilon(x^2+\mu^2)$	$\epsilon(x^2+\mu^2)+\alpha$					孤立点
4	1	$\epsilon x^3+\delta\mu$	$\epsilon x^3+\delta\mu+\alpha x$					滞后点
5	2	$\epsilon x^2+\delta\mu^3$	$\epsilon x^2+\delta\mu^3+\alpha+\beta\mu$					非对称尖点
6	2	$\epsilon x^3+\delta\mu x$	$\epsilon x^3+\delta\mu x+\alpha+\beta x^2$					树枝分岔点
7	2	$\epsilon x^4+\delta\mu$	$\epsilon x^4+\delta\mu+\alpha x+\beta x^2$					四次折叠点
8	3	$\epsilon x^2+\delta\mu^4$	$\epsilon x^2+\delta\mu^4+\alpha+\beta\mu+\gamma\mu^2$					四次孤立点
9	3	$\epsilon x^3+\delta\mu^2$	$\epsilon x^3+\delta\mu^2+\alpha+\beta x+\gamma\mu x$					双翼尖点
10	3	$\epsilon x^4+\delta\mu x$	$\epsilon x^4+\delta\mu x+\alpha+\beta\mu+\gamma x^2$					四次跨临界点
11	3	$\epsilon x^5+\delta\mu$	$\epsilon x^5+\delta\mu+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3$					五次滞后点

6.4 计算实例

前面介绍了单变量静态分岔的奇异性理论，本节通过几个例子进一步说明它们的应用。

6.4.1　弹性结构系统

先考虑图 6-2 所示的力学系统(杆件—弹簧系统)。它由两根铰接的刚性杆及扭转弹簧组成。设杆长等于 1,弹簧的弹性系数也等于 1。在 B 点处作用着水平压力 λ。取角度 x 为此系统的状态变量。该系统处于静平衡状态。该系统的势能

$$V(x,\lambda)=\frac{x^2}{2}+2\lambda(\cos\ x-1) \tag{6.4.1}$$

其中第一项是弹簧的弹性势能,第二项是外力所做的功。静平衡状态由下面的方程决定:

$$\bar{g}(x,\lambda)\equiv\frac{\partial V}{\partial x}=x-2\lambda\sin\ x=0 \tag{6.4.2}$$

显然,$\bar{g}\left(0,\frac{1}{2}\right)=\bar{g}_x\left(0,\frac{1}{2}\right)=0$,故$(x,\lambda)=\left(0,\frac{1}{2}\right)$是 $\bar{g}$ 的一个奇异点。

作变换 $\mu=\lambda-1/2$,方程(6.4.2)变为

$$g(x,\mu)\equiv x-(2\mu+1)\sin\ x=0 \tag{6.4.3}$$

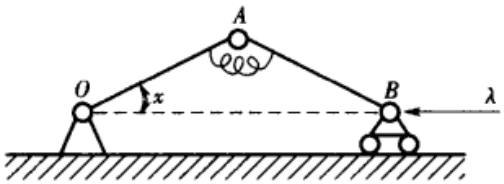


图 6-2　杆件—弹簧系统

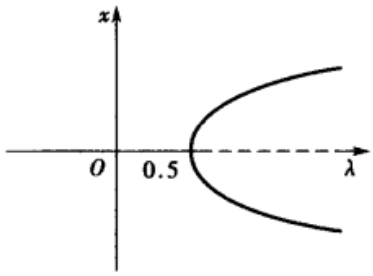


图 6-3　分岔图

$(x,\mu)=(0,0)$是 g 的一个奇异点,在该处有

$$g(0,0)=g_x(0,0)=g_{xx}(0,0)=g_\mu(0,0)=0$$

$$g_{xxx}(0,0)=1,g_{x\mu}(0,0)=-2$$

根据表 6-1 给出的识别条件,可知 $g(x,\mu)$与 GS 范式 $h(x^3,\mu)=x^3-\mu x$ 强等价。从而,在 $(0,0)$处方程 $g(x,\mu)=0$ 与方程 $h(x,\mu)=0$ 有相同的分岔性态,即在该处出现超临界叉形分岔。由于 $\lambda=\mu+\frac{1}{2}$,$\bar{g}(x,\lambda)=0$ 在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$处出现超临界叉形分岔(见图 6-3)。

再考虑上述系统的一个振动系统(见图 6-4)。扰动来自两个方面。一方面是结构重量的影响,它可由作用在中间铰链向下的力 ε 表示。另一方面是弹簧的非对称性,它可由当所有外力皆为 0 时杆系的平衡位置 $x_0=\delta$

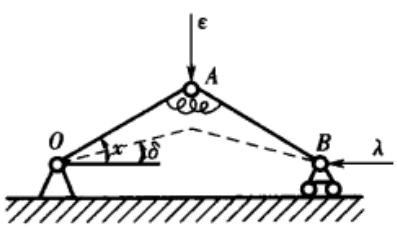


图 6-4　杆件—弹簧振动系统

表示;如果弹簧是对称的,则 $\delta=0$。通过附加的小参数和 δ 去描述扰动,这个扰动系统的势能

$$V^*(x,\lambda,\varepsilon,\delta)\equiv(x-\delta)^2/2+2\lambda(\cos x-1)+\varepsilon\sin x \tag{6.4.4}$$

静态平衡由下面的方程决定:

$$G^*(x,\lambda,\varepsilon,\delta)\equiv x-\delta-2\lambda\sin x+\varepsilon\cos x=0 \tag{6.4.5}$$

即

$$G(x,\mu,\varepsilon,\delta)\equiv x-\delta-(2\mu+1)\sin x+\varepsilon\cos x=0 \tag{6.4.6}$$

因为 $G(x,\mu,0,0)=g(x,\mu)$,所以 G 是 g 的一个 2-参数开折。想知道 G 是否是 g 的一个普适开折,即 G 能否包含 g 的一切扰动。由于 g 与 GS 范式 $h=x^3-\mu x$ 强等价,可以根据表 6-2 给出的普适开折识别条件去判定。这里不作详细计算,只从另外的角度给出一些说明。作变换

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{x}{\sqrt[3]{6}}\\ v&=2\sqrt[3]{6}\mu\\ \alpha_1&=\varepsilon-\delta\\ \alpha_2&=\frac{-\varepsilon}{2\sqrt[3]{6}}\end{aligned}\right\} \tag{6.4.7}$$

则方程(6.4.6)可写成泰勒展开式:

$$H(y,v,\alpha_1,\alpha_2)\equiv y^3-vy+\alpha_1+\alpha_2y^2+\cdots=0 \tag{6.4.8}$$

如果略去高阶项,式(6.4.8)给出 $h(y,v)=y^3-vy$ 的一个普适开折。由于式(6.4.7)是微分同胚,它把 $h(y,v)$ 和 $H(y,v,\alpha_1,\alpha_2)$ 分别变为 $g(x,\mu)$ 和 $G(x,\mu,\varepsilon,\delta)$,因此 $G(x,\mu,\varepsilon,\delta)$ 应当是 $g(x,\mu)$ 的普适开折。若取组合参数 α_1,α_2,则 $g(x,\mu)$ 的奇异点(0,0)受扰后可能出现的各种分岔图以及转迁集的情况,见图 6-1。还可通过变换式(6.4.7),得知在原来参数 (ε,δ) 平面上的转迁集。

6.4.2 化学反应器系统

现在讨论 CSTR 的静态分岔问题。该系统的平衡态 (y,θ) 满足静态方程

$$\left.\begin{aligned}&\lambda y-D_a(1-y)E(\theta)=0\\&\lambda\theta-\beta_1D_a(1-y)E(\theta)+\beta D(\theta-\theta_c)=0\end{aligned}\right\} \tag{6.4.9}$$

其中 $y=(C_f-C)/C$ 是无量纲反应物浓度,$\theta=r(T-T_f)/T_f$ 是无量纲反应物温度,γ、β_1 和 β_2 分别为无量纲活化能、反应热和热交换系数,$\theta_c=\gamma(T_c-T_f)/T_f$ 是无量纲冷却剂温度,D 是 Damkohler 数,$E(\theta)=\exp[\theta(1+\theta/\gamma)^{-1}]$,$\lambda$ 是一部分反应物所占比例。从第一个式中解出 y,并代入第二式,令 $x=\theta/\lambda$,则有

$$G(x,\mu,\alpha,\beta,\eta)\equiv(1+\mu)x-\eta-\frac{\alpha\mu}{1+\beta\mu A(x)}=0 \tag{6.4.10}$$

其中

$$A(x)=\exp[-\gamma x/(1+x)],\mu=\lambda/(\beta D),\eta=\theta_c/\gamma,\alpha=\beta_1/\gamma$$

γ 为常数,并要求 $x>0$。

首先指出,对 $\gamma>8/3$,存在唯一的一组数 $z_0=(x_0,\mu_0,\alpha_0,\beta_0,\eta_0)$,使得在$(x_0,\mu_0)$处 $g(x,\mu)=G(x,\mu,\alpha_0,\beta_0,\eta_0)$有一对双翼尖点。为此,证明关于 x、μ、α、β、η 的方程组

$$G=G_x=G_{xx}=G_\mu=G_{x\mu}=0$$

有唯一的解 $z_0=(x_0,\mu_0,\alpha_0,\beta_0,\eta_0)$,使得在该处有 $G_{xxx}>0$ 和 $G_{\mu\mu}>0$。记 $\Delta=1+\beta\mu A(x)$。容易求出下列结果:

$$\left.\begin{aligned}
&G=(1+\mu)x-\eta-\alpha\mu/\Delta=0\\
&G_x=(1+\mu)+\alpha\beta\mu^2A'(x)/\Delta^2=0\\
&G_{xx}=\alpha\beta\mu^2[A''(x)/\Delta^2-2\beta\mu(A'(x))^2/\Delta^3]=0\\
&G_\mu=x-\alpha/\Delta^2=0\\
&G_{x\mu}=1+2\alpha\beta\mu A'(x)/\Delta^3=0
\end{aligned}\right\} \tag{6.4.11}$$

当 α_0、β_0、η_0 固定后,系统在(x_0,μ_0)处 $g\overset{s}{\sim}x^2+\mu^2$,即在$(x_0,\mu_0)$点有尖点分岔。

$$g(x_0,\mu_0)=0,\quad g_\mu(x_0,\mu_0)=0$$
$$g_x(x_0,\mu_0)=0,\quad g_{x\mu}(x_0,\mu_0)=0$$
$$g_{xx}(x_0,\mu_0)=0$$

所以 $g(x,\mu)=G(x,\mu,\alpha_0,\beta_0,\eta_0)$。

$G(x,\mu,\alpha,\beta,\eta)$是 α、β、η 在α_0、β_0、η_0 附近取值,也可写成

$$\alpha=\alpha_0+\alpha,\beta=\beta_0+\beta,\eta=\eta_0+\eta$$

此时 α、β、μ 都是小量。

此外,对 $x>-1,\gamma>0$,有

$$A(x)=\exp[-\gamma x/(1+x)]>0$$
$$A'(x)=-\gamma A(x)/(1+x)^2<0$$
$$A''(x)=[\gamma^2+2\gamma(1+x)]A(x)/(1+x)^4>0$$

由式(6.4.11)的第四式,求得

$$\alpha=x\Delta^2 \tag{6.4.12}$$

代入式(6.4.11)的第五式,并利用 Δ 的表达式,有

$$\beta\mu(A+2xA')=-1 \tag{6.4.13}$$

再由式(6.4.11)的第三式,有

$$\beta\mu(2A'^2 - AA'') = A'' \tag{6.4.14}$$

由式(6.4.13)和式(6.4.14),得到

$$A' + xA'' = 0 \tag{6.4.15}$$

即

$$x^2 + \gamma x - 1 = 0 \tag{6.4.16}$$

当 $\gamma > 0$ 时,式(6.4.16)有唯一的解 x_0,满足 $x_0 > 0$。

把式(6.4.12)代入式(6.4.11)的第二式,有

$$\beta\mu x A' = -\frac{1+\mu}{\mu} \tag{6.4.17}$$

将式(6.4.13)与式(6.4.17)相除,并令 $x = x_0$,有

$$\mu_0 = -\frac{A(x_0) + 2x_0A'(x_0)}{A(x_0) + x_0A'(x_0)} \tag{6.4.18}$$

代入式(6.4.13),可得

$$\beta_0 = \frac{A(x_0) + x_0A'(x_0)}{[A(x_0) + 2x_0A'(x_0)]^2} \tag{6.4.19}$$

在式(6.4.12)中,令 $x = x_0$,有

$$\alpha_0 = x_0[1 + \beta_0\mu_0A(x_0)]^2 \tag{6.4.20}$$

最后,把上面的结果代入式(6.4.11)的第一式,有

$$\eta_0 = (1 + \mu_0)x_0 - \alpha_0\mu_0/(1 + \beta_0\mu_0A(x_0)) \tag{6.4.21}$$

这样便得到唯一的解 $z_0 = (x_0, \mu_0, \alpha_0, \beta_0, \eta_0)$。

记 $\Delta_0 = 1 + \beta_0\mu_0A(x_0)$,容易计算在 z_0 处有

$$G_{\mu\mu}|_{z_0} = \frac{2\alpha_0\beta_0A(x_0)}{\Delta_0^3} > 0 \tag{6.4.22}$$

这是因为当 $\gamma > 8/3$ 时,可证 α_0、β_0、μ_0、$A(x_0)$ 和 Δ_0 都大于 0。此外,在 z_0 处还有

$$G_{xxx}|_{z_0} = \frac{\alpha_0\beta_0\mu_0^2[\Delta_0A'''(x_0) - 3\beta_0\mu_0A'(x_0)A''(x_0)]}{\Delta_0^3} \tag{6.4.23}$$

这里已用到在该处 $G_{xx} = 0$ 的条件。因此,根据表 6-1 的识别条件,$g(x,\mu) \equiv G(x,\mu,\alpha_0,\beta_0,\eta_0)$ 在奇异点(x_0,μ_0)附近与 $h(x,\mu) = x^3 + \mu^2$ 强等价。

把 $G(x,\mu,\alpha,\beta,\eta)$作为 $g(x,\mu)$在(x_0,μ_0)附近的 3-参数开折,现在证明 G 是 g 的一个普适开折。根据表 6-2 的普适开折识别条件,只需证明矩阵(注意到在 z_0 处 $G_{xx\mu} = 0$)

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & G_{xxx} & G_{xx\mu} \\ 0 & 0 & G_{\mu\mu} & G_{\mu xx} & G_{\mu\mu x} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\mu} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha\mu x} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\mu} & G_{\beta xx} & G_{\beta\mu x} \\ G_\eta & G_{\eta x} & G_{\eta\mu} & G_{\eta xx} & G_{\eta\mu x} \end{bmatrix} \tag{6.4.24}$$

在 z_0 处的行列式不等于 0。在 B 的第五行中，除 $G_\eta = 1$ 外，其他元素均为 0，故

$$\det \boldsymbol{B} = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & G_{xxx} & G_{xx\mu} \\ 0 & G_{\mu\mu} & G_{\mu xx} & G_{\mu\mu x} \\ G_{\alpha x} & G_{\alpha\mu} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha\mu x} \\ G_{\beta x} & G_{\beta\mu} & G_{\beta xx} & G_{\beta\mu x} \end{bmatrix} \tag{6.4.25}$$

容易计算，在式(6.4.25)的第二行和第四行的元素中有

$$\frac{G_{\mu\mu}}{G_{\beta\mu}} = \frac{G_{\mu xx}}{G_{\beta xx}} = \frac{G_{\mu\mu x}}{G_{\beta\mu x}} = \frac{\beta}{\mu} \tag{6.4.26}$$

把式(6.4.25)的第二行乘以 $-\mu/\beta$ 再加到第四行的后三个元素变为 0，从而

$$\det \boldsymbol{B} = -G_{\beta x} \det \begin{bmatrix} 0 & G_{xxx} & G_{xx\mu} \\ G_{\mu\mu} & G_{\mu xx} & G_{\mu\mu x} \\ G_{\alpha\mu} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha\mu x} \end{bmatrix} \tag{6.4.27}$$

考虑到 $G_{\beta x} = \alpha\mu^2[1 - \beta\mu A(x)]A'(x)/\Delta^3$，利用前面的结果，可知 $G_{\beta x}|_{z_0} \neq 0$。再证明式(6.4.27)中的行列式不为 0。注意到在 z_0 处有

$$G_{\alpha xx}|_{z_0} = \alpha_0^{-1} G_{xx}|_{z_0} = 0 \tag{6.4.28}$$

因此该行列式等于 $G_{xxx}(G_{\mu\mu x}G_{\alpha\mu} - G_{\mu\mu}G_{\alpha\mu x}) - G_{xx\mu}^2 G_{\alpha\mu}$。

容易计算 G 的其他几个导数

$$\begin{aligned} G_{\alpha\mu} &= -1/\Delta^2 \\ G_{\alpha\mu x} &= 2\beta\mu A'(x)/\Delta^3 \\ G_{\mu\mu x} &= 2\alpha\beta[1 - 2\beta\mu A(x)]A'(x)/\Delta^4 \end{aligned} \tag{6.4.29}$$

因为 $G_{\alpha\mu}|_{z_0} < 0$，并由式(6.4.22)，有

$$(G_{\mu\mu x}G_{\alpha\mu} - G_{\mu\mu}G_{\alpha\mu x})|_{z_0} = -2\alpha_0\beta_0 A'(x_0)/\Delta_0^6 > 0 \tag{6.4.30}$$

由式(6.4.23)，有 $G_{xxx}|_{z_0}$。所以，在 z_0 处该行列式大于 0。综合上面结果，便有 $\det \boldsymbol{B}|_{z_0} \neq 0$。

由于 $g(x,\mu)$在(x_0,μ_0)附近与 $h(x,\mu) = x^3 + \mu^2$ 强等价，它们的普适开折就有相应的持久分岔图。图 6-5 给出在$(x_0,\mu_0,\alpha_0,\beta_0,\eta_0)$附近 $G(x,\mu,\alpha,\beta,\eta)$的主要分岔类型，其中图(a)是对 $g(x,\mu) = G(x,\mu,\alpha_0,\beta_0,\eta_0)$给出的双翼尖点分岔图(即 α_0、β_0、η_0 固定后 $g(x,\mu)$图)，图(b)～(h)是 7 种持久分岔图(是其开折图)。它们描述了 CSTR 系统的平衡态可能出现的主要静态分岔图。

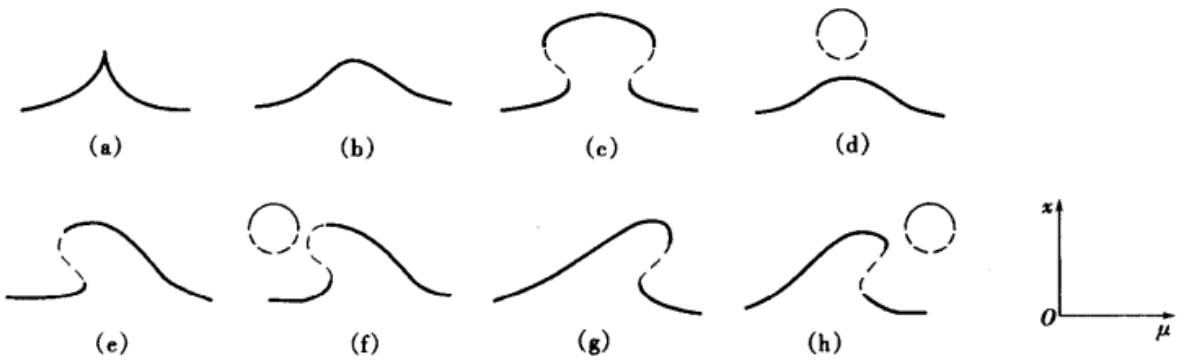


图 6-5 静态分岔图

第7章 全局分岔

在第3章至第6章介绍了分岔理论的4大主要内容，即李雅普诺夫-施密特方法、中心流形方法、规范形理论和奇异性理论。这些理论和方法主要是解决向量场的局部分岔问题。考虑向量场的全局特性的分岔称为全局分岔。全局分岔除了依靠数值计算外，主要依靠根据相空间里各平衡点/闭轨的局部分岔特性得出轨线的局部流向，并进行综合以推测出相空间全局的轨线性态。本章以洛伦兹系统为例，详细阐述从洛伦兹系统的平衡点/闭轨的局部分岔特性到相空间全局的轨线性态的研究过程，以便使读者能够更全面地掌握系统全局的性态。

洛伦兹(Lorenz)系统是1963年美国科学家洛伦兹在研究气象预报时，对无穷维动力系统的瑞利-伯纳德热对流问题进行三维截断得到的。它是世界上第一个表现出奇异吸引子的动力学系统。作为一个极为简洁的非线性动力学系统，洛伦兹系统拥有极为丰富复杂的非线性动力学行为，包括平衡点的叉形分岔和霍普夫分岔，闭轨的叉形分岔、鞍结分岔和倍周期分岔，同宿轨线分岔和混沌运动等。特别是洛伦兹系统的混沌运动，是世界上第一个被发现的由确定性动力学系统表现出的非确定性行为，洛伦兹以此指出长期的天气预报是不可靠的。混沌运动动摇了长期统治科学界的拉普拉斯确定论思想，与相对论、量子力学一起被誉为20世纪物理学三大发现，而洛伦兹系统的混沌运动则在混沌动力学的发展史上居于创始性、奠基性的地位。本章介绍洛伦兹系统的分岔问题，关于洛伦兹系统的混沌运动将在第8章介绍。

7.1 洛伦兹系统的起源

洛伦兹系统起源于热对流问题。热对流问题是流体力学的重要研究领域，在大气物理学、天体物理学、溶液力学和工业技术中都有着重要的应用。

考虑底部受热的均匀厚度的水平流体层。设底部温度 T_0 高于顶部温度 T_1，且流体受到重力作用(图7-1)。当底部流体受热膨胀时，下面的流体密度小于上面的流体密度，于是在重力场的作用下，上面的流体有下沉的趋势，而下面的流体有上浮的趋势。当温度梯度较小时，由于流体黏性的阻碍，流体仍处于稳定的静止状态，在流体内部只有热传导，温度随高度呈线性变化；然而当温度梯度较大时，流体的静止平衡状态失

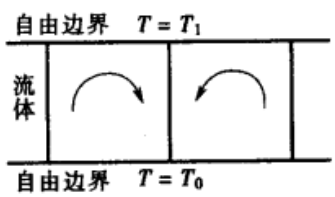


图7-1 热对流示意图

稳，出现热对流现象，称为瑞利-伯纳德(Lord Rayleigh-H. Benard)对流。

实验表明，当温度梯度超过某个临界值后就会出现热对流现象。起初它是定常流动，其内部自发地形成对流胞腔。这些胞腔通常是水平的长柱形，其截面是矩形，但有时也会出现截面为正三角形、矩形或正六角形的垂直胞腔。若把流体的静止平衡状态作为基本状态，则上述的定常热对流状态就是初级分岔状态。随着温度梯度进一步增大，还会出现其他的分岔，并最终变为湍流。

假设在流体动力学方程组中，将重力项中的密度取为温度的线性函数(随温度的上升而减小)，其他各项中的密度均取为常数，并假设密度与压强无关，则得到无量纲形式的热对流基本方程组，称为奥勃贝克-波辛尼斯克(Oberbeck-J. Boussinesq)方程组：

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p + Pr\theta\boldsymbol{k} + Pr\,\nabla^2\boldsymbol{v} \\ &\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \\ &\theta_t + (v\cdot\nabla)\theta = \nabla^2\theta + Rav_z \end{aligned}\right\} \tag{7.1.1}$$

式中：$\boldsymbol{v}$、p、θ 分别为无量纲的速度向量、压强和温度，$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$；$z$ 轴垂直向上；$\boldsymbol{k}$ 是沿 z 轴正向的单位向量；Pr 和 Ra 分别为普朗特(Prandtl)数和瑞利(Rayleigh)数，$Pr = \frac{\nu}{\kappa}$，$Ra = \frac{\alpha g \Delta T h^3}{\nu\kappa}$，其中 ν、κ 和 α 分别为流体的运动黏性系数、热传导系数和热膨胀系数，g 为重力加速度，$\Delta T = T_0 - T_1$，h 为流体层的厚度。奥勃贝克-波辛尼斯克方程组常用于对瑞利-伯纳德热对流的分岔问题进行理论分析。

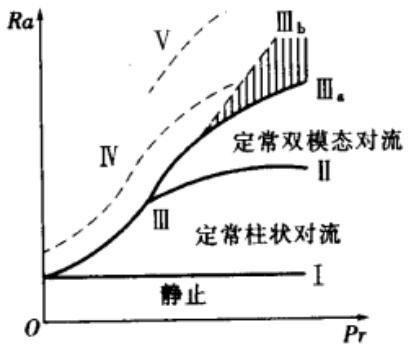


图 7-2 不同的热对流状态之间的转变关系

图 7-2 给出了不同的热对流状态之间的转变关系。曲线Ⅰ对应由静止状态向定常二维热对流(柱状对流)的过渡，曲线Ⅱ对应向定常三维热对流的过渡，曲线Ⅲ对应向非定常三维热对流的过渡(其中曲线 $Ⅲ_a$ 和 $Ⅲ_b$ 之间是尚未清楚的区域)，曲线Ⅳ的上方将出现更高频率(如倍频)的非定常热对流，在曲线Ⅴ上方对应的流动已完全变为湍流了。

除重力之外，表面张力也是在局部受热的流体中出现热对流的一个重要原因。当流体表面局部受热时，表面张力变小，该处的流体被邻近表面拉开，从而引起局部压强下降和流体从下往上流动。这种由表面张力引起的热对流现象称为热毛细管对流或马格兰哥尼(Magrangoni)效应，它也存在着丰富的分岔现象。通常的热对流是重力与表面张力共同作用的结果。

考虑到太阳辐射和土壤的比热，地球表面的温度总是高于临近地表的大气温度的，因此限定于一定区域的大气层可以视为底部受热的均匀厚度的水平流体层，其底部温度 T_0 高于顶部温度 T_1，且大气受到重力作用，符合瑞利-伯纳德热对流的假定。因此在不考虑气体

压缩的前提下，可以用奥勃贝克-波辛尼斯克方程组来描述大气热对流问题。1963年，美国科学家洛伦兹研究了大气热对流的柱状胞腔情况，这是矩形区域中的二维热对流问题。由于不考虑气体压缩，由流体的不可压缩条件$\nabla \cdot v = 0$知，速度场v可用流函数ψ代替，使$v = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$。假设流函数$\psi$和温度$\theta$在矩形区域内可对空间变量展开成傅里叶级数，其系数与时间t有关，将傅里叶展开式代入方程组(7.1.1)，并取头三阶模态进行截断，可得到以下三维自治系统，后人称之为洛伦兹系统，即

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -xz \\ xy \end{bmatrix} \tag{7.1.2}$$

其中x、y分别为流函数ψ和温度θ的傅里叶展开式的第一项的系数，z反映沿垂线的温度型，$\sigma = Pr$(普朗特数)，$\rho = Ra/Ra_c$，Ra为瑞利数，$Ra_c = \frac{\alpha g \Delta T_c h^3}{\nu \kappa}$为临界瑞利数，$\beta = 4/(1+\alpha^2)$，$\alpha$为矩形的长宽比。洛伦兹系统的形式十分简洁，但却拥有极为丰富复杂的非线性动力学行为。下面依次予以介绍。

7.2 洛伦兹系统平衡点的叉形分岔

考虑洛伦兹系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -xz \\ xy \end{bmatrix}$$

所有系数意义同上，显然σ、ρ、β均大于0。对一切$\rho \in \mathbf{R}$，系统都有平衡点(0,0,0)，该平衡点称为平凡平衡点。当$\rho > 1$时，系统(7-2)除平凡平衡点$p = (0,0,0)$外，还有两个非平凡平衡点：$q^{\pm} = (\pm s, \pm s, \rho - 1)$，其中$s = \sqrt{\beta(\rho - 1)}$。本节讨论平衡点$p = (0,0,0)$处的分岔情况，非平凡平衡点$q^{\pm} = (\pm s, \pm s, \rho - 1)$处的分岔情况留待下一节讨论。在平衡点$p = (0,0,0)$处，原系统的线性化系统为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{7.2.1}$$

线性化系统矩阵的特征值满足

$$[\lambda^2 + (1+\sigma)\lambda + \sigma(1-\rho)](\lambda + \beta) = 0 \tag{7.2.2}$$

由此解出

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{1+\sigma}{2}+\sqrt{\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)^2-\sigma(1-\rho)}\\ \lambda_2 &= -\frac{1+\sigma}{2}-\sqrt{\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)^2-\sigma(1-\rho)}\\ \lambda_3 &= -\beta\end{aligned}\right\} \tag{7.2.3}$$

显然，$\rho=1$ 时 $\lambda_1=0$，满足静态分岔的条件，因此 $\rho=1$ 为分岔点，ρ 为分岔参数。由于平衡点分岔是局部分岔，可以在分岔点附近的小邻域内研究。在 $\rho=1$ 的小邻域内，不妨假设 $\rho=1+\varepsilon$，其中 ε 为小量，则有

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{1+\sigma}{2}+\sqrt{\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)^2-\sigma(1-\rho)}\\ &= \frac{1+\sigma}{2}\left\{-1+\sqrt{1+\frac{4\sigma\varepsilon}{(1+\sigma)^2}}\right\}\\ &= \frac{1+\sigma}{2}\left\{-1+\left(1+\frac{2\sigma\varepsilon}{(1+\sigma)^2}+\cdots\right)\right\}\\ &= \frac{\sigma\varepsilon}{1+\sigma}+O(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

同理可得

$$\lambda_2=-(1+\sigma)+\frac{\sigma\varepsilon}{1+\sigma}+O(\varepsilon^2)$$

由于 ε 为小量，故规定 ε 及更高阶项在与常量加减时自动舍去，以简化计算，则式(7.2.3)变为

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{\sigma\varepsilon}{1+\sigma}\\ \lambda_2 &= -(1+\sigma)\\ \lambda_3 &= -\beta\end{aligned}\right\} \tag{7.2.4}$$

下面来求 λ_1、λ_2、λ_3 对应的特征向量，解得对应 λ_1 的特征向量为$[1\quad 1\quad 0]^{\mathrm{T}}$，对应 λ_2 的特征向量为$[\sigma\quad -1\quad 0]^{\mathrm{T}}$，对应 λ_3 的特征向量为$[0\quad 0\quad 1]^{\mathrm{T}}$。计算过程中将 $\lambda_1=\frac{\sigma\varepsilon}{1+\sigma}$ 按0处理，这样并不会影响最终的结果，读者可自行验证。

为将系统对角化，由 λ_1、λ_2、λ_3 对应的特征向量构造线性变换矩阵

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=u\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+v\begin{bmatrix}\sigma\\ -1\\ 0\end{bmatrix}+w\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix} \tag{7.2.5}$$

则

$$T=\begin{bmatrix}1 & \sigma & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ T^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{1+\sigma} & \dfrac{\sigma}{1+\sigma} & 0\\ \dfrac{1}{1+\sigma} & \dfrac{-1}{1+\sigma} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

对式(7.1.2)两边同乘 T^{-1},并考虑式(7.2.5),得

$$\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\\ \dot{w}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & -(1+\sigma) & 0\\ 0 & 0 & -\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\dfrac{\sigma}{1+\sigma}(u+\sigma v)w\\ \dfrac{\sigma}{1+\sigma}(u+\sigma v)w\\ (u+\sigma v)(u-v)\end{bmatrix} \tag{7.2.6}$$

这里仍然保留了 λ_1,在分岔点 $\rho=1$ 处有 $\lambda_1=0$,对应的特征向量为$[1\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}$,可见此时 u 轴就是中心子空间 E^{c}。此外,由于 σ、ρ、β 均大于0,故有 $\lambda_2=-(1+\sigma)<0$,$\lambda_3=-\beta<0$,因此不稳定子空间 $E^{\mathrm{u}}=\phi$,而稳定子空间 E^{u} 则由 λ_2 和 λ_3 对应的特征向量$[0\quad 1\quad 0]^{\mathrm{T}}$ 和$[0\quad 0\quad 1]^{\mathrm{T}}$ 张成,即 $E^{\mathrm{u}}=\mathrm{span}\{[0\quad v\quad w]^{\mathrm{T}}\}$。

现在来求在平衡点 $p=(0,0,0)$的邻域内中心流形 W^{c} 从 u 轴(即中心子空间 E^{c})向 v 轴和 w 轴偏离的函数 $v=h_1(u)$和 $w=h_2(u)$。W^{c} 与中心子空间 E^{c} 在平衡点 $p=(0,0,0)$处相切,故有 $h_i(0)=0$,$D_u h_i(0)=0$,$i=1,2$,因此将 $v=h_1(u)$和 $w=h_2(u)$展开为关于 u 的泰勒级数时,其最低阶次为2次,所以不妨假设

$$\left.\begin{aligned}v&=h_1(u)=a_1u^2+b_1u^3+c_1u^4+\cdots\\ w&=h_2(u)=a_2u^2+b_2u^3+c_2u^4+\cdots\end{aligned}\right\} \tag{7.2.7}$$

将式(7.2.7)代入式(7.2.6)的第2、3式,并令 u 的同次项的系数相等,可得

关于 v 的方程:

$$u^2:0=-(1+\sigma)a_1\Rightarrow a_1=0$$

$$u^3:0=-(1+\sigma)b_1+\left(\frac{1}{1+\sigma}\right)a_2$$

$$u^4:2\left(\frac{-\sigma}{1+\sigma}\right)a_1a_2=-(1+\sigma)c_1+\left(\frac{\sigma}{1+\sigma}\right)a_1a_2+\left(\frac{1}{1+\sigma}\right)b_2$$

$$\vdots$$

关于 w 的方程:

$$u^2:0=-\beta a_2+1\Rightarrow a_2=1/\beta$$

$$u^3:0=-\beta b_2+\sigma a_1-a_1\Rightarrow b_2=0$$

$$u^4:2\left(\frac{-\sigma}{1+\sigma}\right)a_2^2=-\beta c_2+\sigma c_1-c_1$$

$$\vdots$$

联立解得

$$a_1=0, a_2=1/\beta, b_1=\frac{1}{(1+\sigma)^2\beta}, b_2=0, c_1=0, c_2=\frac{2\sigma}{(1+\sigma)\beta^3}, \cdots$$

精确到四次方的中心流形为

$$W^c=\left\{\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}v\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h_1(u)\\h_2(u)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{u^3}{(1+\sigma)^2\beta}+O(u^5)\\ \dfrac{1}{\beta}u^2+\dfrac{2\sigma}{(1+\sigma)\beta^3}u^4+O(u^5)\end{bmatrix}\right\} \tag{7.2.8}$$

将 $v=h_1(u)$和 $w=h_2(u)$的表达式代入式(7.2.6)的第 1 式,即得中心流形上流的方程

$$\dot{u}=\lambda_1 u-\frac{\sigma}{(1+\sigma)\beta}u^3-\frac{\sigma^2[\beta+2(1+\sigma)]}{(1+\sigma)^3\beta^3}u^5+O(u^6) \tag{7.2.9}$$

其中 $\lambda_1=-\frac{1+\sigma}{2}+\sqrt{\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)^2-\sigma(1-\rho)}\approx\frac{\sigma\varepsilon}{(1+\sigma)}$,在 $\rho=1$ 时(即 $\varepsilon=0$ 时)$\lambda_1=0$。取式(7.2.9)的前两项(即从 u^3 截断),得

$$\dot{u}=\lambda_1 u-\frac{\sigma}{(1+\sigma)\beta}u^3 \tag{7.2.10}$$

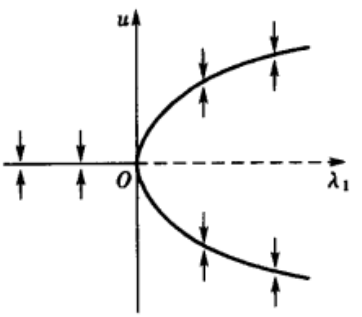


图 7-3 系统超临界叉形分岔图

对照第 2 章可知,系统发生超临界叉形分岔,λ_1 为分岔参数,系统分岔图如图 7-3 所示。

由于原系统(7.1.2)是以 ρ 为分岔参数,$\lambda_1=0$ 时 $\rho=1$,因此原系统在 $\rho=1$ 处发生分岔,注意到 $\rho=Ra/Ra_c$。可见,当流体的温度梯度 ΔT 超过临界温度梯度 ΔT_c 时,流体的瑞利数 Ra 将超过临界瑞利数 Ra_c,此时 ρ 越过分岔点 $\rho=1$,系统发生分岔,表现为物理现象就是由静止状态转变为定常二维热对流(柱状对流)。

7.3 洛伦兹系统平衡点的霍普夫分岔

仍考虑洛伦兹系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sigma & \sigma & 0\\ \rho & -1 & 0\\ 0 & 0 & -\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\-xz\\xy\end{bmatrix}$$

所有系数意义同上,显然 σ、ρ、β 均大于 0。对一切 $\rho\in\mathbf{R}$,系统都有平衡点 $p=(0,0,0)$,该平衡点称为平凡平衡点。由 7.2 节知,系统(7.1.2)在 $\rho=1$ 处发生超临界叉形分岔。

当 $\rho>1$ 时,系统(7.1.2)除平凡平衡点(0,0,0)外,还有两个非平凡平衡点:$q^+=(s,s,\rho-1)$,$q^-=(-s,-s,\rho-1)$,其中 $s=\sqrt{\beta(\rho-1)}$。由 7.2 节知,当 $\rho>1$ 时,对平凡平衡点 $p=(0,0,0)$来说,恒有 $\lambda_1=\frac{\sigma\varepsilon}{(1+\sigma)}>0, \lambda_2=-(1+\sigma)<0, \lambda_3=-\beta<0$。因此当 $\rho>1$ 时,系

统在平凡平衡点 $p=(0,0,0)$处的结构是稳定的,不会再出现分岔。所以 $\rho>1$ 时可能发生的平衡点分岔一定出现在两个非平凡平衡点 q^+ 和 q^- 处。事实上,系统(7.1.2)的雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-\sigma & \sigma & 0\\ \rho-z & -1 & -x\\ y & x & -\beta\end{bmatrix}$$

在平衡点 q^+ 和 q^- 处,雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-\sigma & \sigma & 0\\ 1 & -1 & \mp s\\ \pm s & \pm s & -\beta\end{bmatrix}$$

因此,在平衡点 q^+ 和 q^- 处,系统线性化矩阵的特征值满足:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\sigma-\lambda & \sigma & 0\\ 1 & -1-\lambda & \mp s\\ \pm s & \pm s & -\beta-\lambda\end{vmatrix}=0 \tag{7.3.1}$$

由于 $s=\sqrt{\beta(\rho-1)}$,得

$$\lambda^3+(\beta+\sigma+1)\lambda^2+\beta(\sigma+\rho)\lambda+2\sigma\beta(\rho-1)=0 \tag{7.3.2}$$

因为 σ、ρ、β 均大于0,且 $\rho>1$,所以式(7.3.2)的常数项 $2\sigma\beta(\rho-1)\neq 0$,即系统不可能出现零根,因此系统若要出现平衡点分岔,就只可能出现一对纯虚根来引发霍普夫分岔。不妨设 $\lambda_1=\mathrm{i}b$,$\lambda_2=-\mathrm{i}b$,$\lambda_3=a$。由于式(7.3.1)可以写成

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\sigma-\lambda & \sigma & 0\\ 1 & -1-\lambda & \mp s\\ \pm s & \pm s & -\beta-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)=0$$

将 $\lambda_1=\mathrm{i}b$,$\lambda_2=-\mathrm{i}b$,$\lambda_3=a$ 代入上式,得

$$\lambda^3-a\lambda^2+b^2\lambda-ab^2=0 \tag{7.3.3}$$

将式(7.3.3)与式(7.3.2)比较,可得

$$\left.\begin{aligned}a&=-(\beta+\sigma+1)\\ b^2&=\beta(\sigma+\rho)\\ -ab^2&=2\sigma\beta(\rho-1)\end{aligned}\right\} \tag{7.3.4}$$

由此解出

$$\rho=\bar{\rho}=\frac{\sigma(\sigma+\beta+3)}{\sigma-\beta-1} \tag{7.3.5}$$

这就是系统发生霍普夫分岔的条件(即分岔参数值)。此时系统在平衡点 q^+ 和 q^- 处的特征值为

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= \mathrm{i}\sqrt{\beta(\sigma+\bar{\rho})}\\ \lambda_2 &= -\mathrm{i}\sqrt{\beta(\sigma+\bar{\rho})}\\ \lambda_3 &= -(\sigma+\beta+1)\end{aligned}\right\} \tag{7.3.6}$$

例如，当系统参数取 $\sigma=10$、$\beta=\frac{8}{3}$时，马上可以计算出系统发生霍普夫分岔的分岔参数值

$$\bar{\rho}=\frac{\sigma(\sigma+\beta+3)}{\sigma-\beta-1}=\frac{490}{19}\approx 24.74$$

这一结果与洛伦兹在 1963 年运用数值积分的方法研究系统(7.1.2)时得到的结果完全一致。

可以证明，该系统在平衡点发生亚临界霍普夫分岔，极限环不稳定。

7.4 洛伦兹系统的吸引集

在研究洛伦兹系统的全局分岔前，先给出洛伦兹系统的吸引集。

系统(7.1.2)有全局吸引集。作变量替换：$x\to x$，$y\to y$，$z\to z+\rho+\sigma$，则系统(7.1.2)变为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sigma & \sigma & 0\\ -\sigma & -1 & 0\\ 0 & 0 & -\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -xz\\ xy-\beta(\rho+\sigma)\end{bmatrix} \tag{7.4.1}$$

故有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2+y^2+z^2) &= x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z}\\ &=(-\sigma x^2+\sigma xy)+(-\sigma xy-y^2-xyz)+[-\beta z^2+xyz-\beta z(\rho+\sigma)]\\ &=-\sigma x^2-y^2-\beta z^2-\beta z(\rho+\sigma)\end{aligned} \tag{7.4.2}$$

因

$$\begin{aligned}0 &\leqslant[\beta(\rho+\sigma)+2(\beta-1)z]^2\\ &=\beta^2(\rho+\sigma)^2+4\beta z(\rho+\sigma)+4(\beta-1)^2z^2\end{aligned}$$

故有

$$-4\beta z(\rho+\sigma)(\beta-1)\leqslant\beta^2(\rho+\sigma)^2+4(\beta-1)^2z^2$$

即

$$-\beta z(\rho+\sigma)\leqslant\frac{1}{4(\beta-1)}\beta^2(\rho+\sigma)^2+(\beta-1)z^2 \tag{7.4.3}$$

将式(7.4.3)代入式(7.4.2)，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2+y^2+z^2)\leqslant-\sigma x^2-y^2-\beta z^2+(\beta-1)z^2+\frac{\beta^2(\rho+\sigma)^2}{4(\beta-1)}$$

$$= -(\sigma x^2 + y^2 + z^2) + \frac{\beta^2(\rho+\sigma)^2}{4(\beta-1)} \tag{7.4.4}$$

因

$$\sigma^2 x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 0$$

则

$$(\sigma^2 x^2 + y^2 + z^2) + \sigma(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant \sigma(x^2 + y^2 + z^2)$$

即

$$(\sigma+1)(\sigma x^2 + y^2 + z^2) \geqslant \sigma(x^2 + y^2 + z^2)$$

故有

$$-(\sigma x^2 + y^2 + z^2) \leqslant -\frac{\sigma}{\sigma+1}(x^2 + y^2 + z^2) \tag{7.4.5}$$

将式(7.4.5)代入式(7.4.4),得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2 + y^2 + z^2) \leqslant -\frac{\sigma}{\sigma+1}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{\beta^2(\rho+\sigma)^2}{4(\beta-1)}$$

故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{2\sigma}{\sigma+1}(x^2 + y^2 + z^2) \leqslant \frac{\beta^2(\rho+\sigma)^2}{2(\beta-1)}$$

积分得

$$x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) \leqslant (x^2(0) + y^2(0) + z^2(0))\mathrm{e}^{-\frac{2\sigma}{\sigma+1}t} + \frac{\beta^2(\rho+\sigma)^2(1+\sigma)}{4\sigma(\beta-1)}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{2\sigma}{\sigma+1}t})$$

令

$$L_\rho = \beta(\rho+\sigma)\sqrt{\frac{1+\sigma}{4\sigma(\beta-1)}} \tag{7.4.6}$$

$$U_\rho = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid |(x,y,z)|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leqslant L_\rho\} \tag{7.4.7}$$

则当$(x(0),y(0),z(0)) \in U_\rho$时,有

$$x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) \leqslant L_\rho^2 \mathrm{e}^{-\frac{2\sigma}{\sigma+1}t} + L_\rho^2(1 - \mathrm{e}^{-\frac{2\sigma}{\sigma+1}t}) = L_\rho^2 \tag{7.4.8}$$

且对于$\forall (x(0),y(0),z(0)) \in \mathbf{R}^3$,均有

$$\lim_{t \to +\infty} [x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)] \leqslant L_\rho^2$$

因此,令

$$\varphi^t(x(0),y(0),z(0)) = (x(t),y(t),z(t))$$

则得到洛伦兹系统的整体吸引集

$$A_\rho = \bigcap_{t \geqslant 0} \varphi^t(U_\rho) \tag{7.4.9}$$

A_ρ 也称为洛伦兹吸引集。

在7.2和7.3节中,运用中心流形定理和霍普夫分岔定理研究了系统平衡点的叉形分岔和霍普夫分岔。事实上,有了吸引集的概念后,结合运动稳定性理论,可以直接判断系统

的分岔情况。以平衡点 $p=(0,0,0)$处的叉形分岔为例,作法如下。

先标记平衡点 $p=(0,0,0)$, $q^+=(s,s,\rho-1)$, $q^-=(-s,-s,\rho-1)$,其中 $s=\sqrt{\beta(\rho-1)}$。可以看到,q^+ 和 q^- 是随着 $\rho<1\to\rho=1\to\rho>1$ 的连续变化而产生的,当 $\rho=1$ 时 q^+ 和 q^- 退化为 p。

由 7.2 节知,当 $\rho<1$ 时,$\varepsilon<0$,则 $\lambda_1=\frac{\sigma\varepsilon}{1+\sigma}<0$, $\lambda_2=-(1+\sigma)<0$, $\lambda_3=-\beta<0$,故 λ_1、λ_2、λ_3 均为负实数,原点为稳定的结点(汇),此时吸引集 $A_\rho=\{p\}$,系统有三维稳定流形;当 $\rho>1$ 时,$\varepsilon>0$,则 $\lambda_1=\frac{\sigma\varepsilon}{1+\sigma}>0$,而 $\lambda_2=-(1+\sigma)<0$, $\lambda_3=-\beta<0$,故此时平衡点 p 为鞍点,此时有二维稳定流形和一维不稳定流形;当 $\rho=1$ 时,$\varepsilon=0$,则 $\lambda_1=0$,原点为非双曲平衡点,有模糊吸引子,此时由于 $\lambda_1=0$,中心流形上流的方程(即式(7.2.9))变为

$$\dot{u}=-\frac{\sigma}{(1+\sigma)\beta}u^3 \tag{7.4.10}$$

由于 u^3 的系数为负,中心流形上的流是稳定的。因此,在 $\rho<0\to\rho=0\to\rho>0$ 的过程中,流形在原点从双曲→非双曲→双曲,故有分岔发生。

为判断产生的分岔的类型,需要判定平衡点 q^+ 和 q^- 的类型。由式(7.3.2)知,平衡点 q^+ 和 q^- 处系统的特征值满足

$$\lambda^3+(\beta+\sigma+1)\lambda^2+\beta(\sigma+\rho)\lambda+2\sigma\beta(\rho-1)=0 \tag{7.4.11}$$

由于上式的解析解形式较复杂,难以直接判定特征值实部的正负。但是由于 q^+ 和 q^- 是随着 $\rho<1\to\rho=1\to\rho>1$ 的连续变化而产生的,当 $\rho=1$ 时 q^+ 和 q^- 退化为 p。因此 q^+ 和 q^- 处系统的特征值也与 p 处系统的特征值有着一定的连续性关系。事实上,由式(7.3.1)知,q^+ 和 q^- 处系统的特征值满足

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\sigma-\lambda & \sigma & 0\\ 1 & -1-\lambda & \mp s\\ \pm s & \pm s & -\beta-\lambda\end{vmatrix}=0 \tag{7.4.12}$$

在 $\rho=1$ 的邻域内(即 $\rho=1+\varepsilon$ 时),该式退化为

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\sigma-\lambda & \sigma & 0\\ 1 & -1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\beta-\lambda\end{vmatrix}=0 \tag{7.4.13}$$

实际上就是系统(7.2.1)在 $\rho=1$ 时的特征多项式。因此,在 $\rho=1$ 的邻域内,q^+ 和 q^- 处系统的特征值的符号也与 p 处系统的特征值符号有着一定的连续性。现讨论 q^+ 的情况(q^- 的情况可类似得到),设 q^+ 处系统的特征值为 $\lambda_1(q^+)$、$\lambda_2(q^+)$、$\lambda_3(q^+)$,由上知 p 处系统的特征值:

$\lambda_1(p)=\frac{\sigma\varepsilon}{(1+\sigma)}$,当 $\rho<0\to\rho=0\to\rho>0$ 时符号改变;

$\lambda_2(p)=-(1+\sigma)$，当 $\rho<0\to\rho=0\to\rho>0$ 时符号不变，恒为负；

$\lambda_3(p)=-\beta$，当 $\rho<0\to\rho=0\to\rho>0$ 时符号不变，恒为负。

因此若设 $\lambda_i(p)$ 对应 $\lambda_i(q^+)(i=1,2,3)$，则在 $\rho=1$ 的邻域内，由连续性依然有 $\lambda_2(q^+)$ 和 $\lambda_3(q^+)$ 的实部为负（$\lambda_2(q^+)$ 和 $\lambda_3(q^+)$ 未必是实数，可能是复数）。至于 $\lambda_1(q^+)$ 的正负性虽然不能根据 $\lambda_1(p)$ 判定，但是由于已知 $\lambda_2(q^+)$ 和 $\lambda_3(q^+)$ 的实部为负，又由式(7.4.11)根据多项式理论知

$$\lambda_1(q^+)\cdot\lambda_2(q^+)\cdot\lambda_3(q^+)=-2\sigma\beta(\rho-1)<0 \tag{7.4.14}$$

则立即可知 $\lambda_1(q^+)$ 一定具有负实部。理由如下：

①若 $\lambda_1(q^+)=0$，则 $\lambda_1(q^+)\cdot\lambda_2(q^+)\cdot\lambda_3(q^+)=0\neq-2\sigma\beta(\rho-1)$，矛盾。

②若 $\lambda_1(q^+)$ 为纯虚数，则由于虚根特征值必须成对出现，则 $\lambda_2(q^+)$ 和 $\lambda_3(q^+)$ 中必须有一个是纯虚数，而事实上 $\lambda_2(q^+)$ 和 $\lambda_3(q^+)$ 的实部均为负，矛盾。

③若 $\lambda_1(q^+)$ 为具有正实部的复数，则由于复根特征值也必须成对出现，则 $\lambda_2(q^+)$ 和 $\lambda_3(q^+)$ 中必须有一个是具有正实部的复数，而事实上 $\lambda_2(q^+)$ 和 $\lambda_3(q^+)$ 的实部均为负，矛盾。

④若 $\lambda_1(q^+)$ 为正实数，则由式(7.4.14)知必有 $\lambda_2(q^+)\cdot\lambda_3(q^+)<0$，但是 $\lambda_2(q^+)$ 和 $\lambda_3(q^+)$ 的实部均为负，则只有两种情况：

a.若 $\lambda_2(q^+)$ 为负实数，$\lambda_3(q^+)$ 也一定是负实数（此时 $\lambda_3(K_2)$ 不能是负实部的复数，因为复根特征值必须成对出现），则 $\lambda_2(K_2)\cdot\lambda_3(K_2)>0$，与 $\lambda_2(K_2)\cdot\lambda_3(K_2)<0$ 矛盾；

b.若 $\lambda_2(q^+)$ 为负实部的复数，不妨设 $\lambda_2(q^+)=a+\mathrm{i}b$，其中 $a<0$。由于复根特征值必须成对出现，则 $\lambda_3(q^+)$ 一定是与 $\lambda_2(q^+)$ 共轭的负实部的复数，则有 $\lambda_2(q^+)\cdot\lambda_3(q^+)=(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b)=a^2+b^2>0$，与 $\lambda_2(q^+)\cdot\lambda_3(q^+)<0$ 矛盾。

综如上述，$\lambda_1(q^+)$ 一定具有负实部，则 q^+ 处系统的特征值 $\lambda_1(q^+)$、$\lambda_2(q^+)$、$\lambda_3(q^+)$ 均具有负实部。这只有两种情况：①三者均为负实数；②三者为一个负实数和一对负实部的共轭复根。但由7.3节知，当 $\bar{\rho}\approx24.74$ 时，系统在 q^+、q^- 处发生霍普夫分岔，由式(7.3.5)知，此时系统特征值为一对纯虚根 $\lambda_1=\mathrm{i}\sqrt{\beta(\sigma+\bar{\rho})}$、$\lambda_2=-\mathrm{i}\sqrt{\beta(\sigma+\bar{\rho})}$ 和一个负实根 $\lambda_3=-(\sigma+\beta+1)$。考虑到解的连续性，情况①可以排除。因此，在平衡点 q^+ 处，系统特征值为一对负实部的共轭复根和一个负实根，可见平衡点 q^+ 为稳定的焦点。同理可知平衡点 q^- 也是稳定的焦点。因此，在 $\rho<1\to\rho=1\to\rho>1$ 的变化过程中，系统的平衡点从一个稳定的结点 $p=(0,0,0)$ 分岔出两个稳定的焦点 $q^+=(s,s,\rho-1)$、$q^-=(-s,-s,\rho-1)$ 和一个鞍点 $p=(0,0,0)$，吸引集 A_ρ 由单点集 $\{p\}$ 变成连接 p 与 q^+、q^- 的两条异宿轨线之并（可参看图7-4），这正是超临界叉形分岔的特征，故系统发生超临界叉形分岔。这与7.2节中运用中心流形定理得到的结果是一致的。

7.5 洛伦兹系统的奇异吸引子

广义地说，若集合 $A_\rho \subset \mathbf{R}^3$ 是系统(7.2.1)的混沌吸引子，则称 A_ρ 为洛伦兹奇异吸引子。本节研究狭义的洛伦兹奇异吸引子，即洛伦兹在 1963 年研究的 $\rho = 28$ 时的 A_ρ。

由 7.4 节知，当 $\rho > 1$ 时鞍点 $p = (0,0,0)$有一维不稳定流形 W^u，即 W^u 是一条曲线。从鞍点 $p = (0,0,0)$附近出发的轨道总是与 W^u 越来越靠近，这样可以借助数值计算找到 W^u。图 7-4 是 $\rho = 28$ 时 W^u 从右边出发的前 40 圈的轨迹。事实上，当 $\rho = 28$ 时 W^u 是没有端点的，它在 A_ρ 中不停地绕圈子，且任一以 W^u 中的点为初值的轨线都在 A_ρ 中稠密。

对 $\rho > 1$，建立系统(7.1.2)的庞加莱(Poincare)映射，在平面 $z = \rho - 1$ 内，取闭集 $\Sigma = \Sigma_\rho$，使得

$$\{K_2, K_3\} \subset \Sigma \subset \{(x,y,z) \mid z = \rho - 1, |xy| < \beta(\rho - 1)\} \cup \{K_2, K_3\}$$

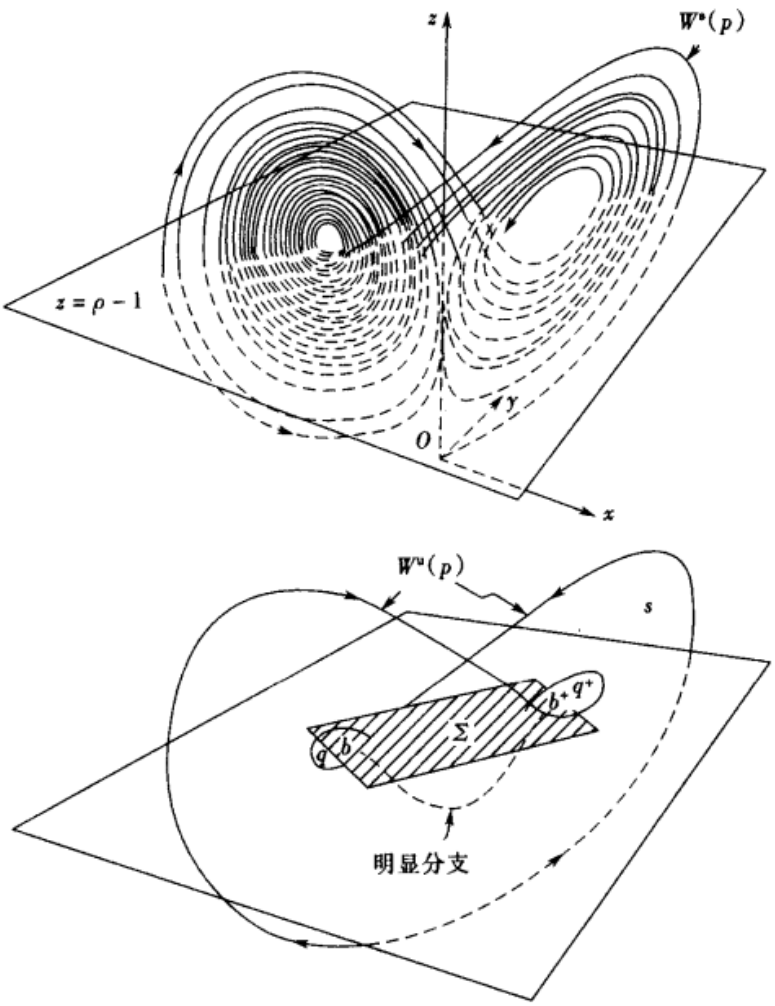


图 7－4 $\rho = 28$ 时 W^u 轨迹示意图

Σ 的中线 D 位于鞍点 $p=(0,0,0)$ 的稳定流形 W^s 上，且任一以 $\Sigma \setminus D$ 中的点为初值的轨线都必然会返回 Σ。由式(7.1.2)，当轨线处于 Σ 内部时，有

$$\dot{z} = -\beta z + xy = -\beta(\rho - 1) + xy < 0$$

因此轨线与 Σ 横截相交，且均为自上而下地穿过 Σ，因此存在庞加莱映射 $P = P_\rho : \Sigma \to \Sigma$。当 $\rho = 28$ 时，Σ 的图形如图 7-5 所示。

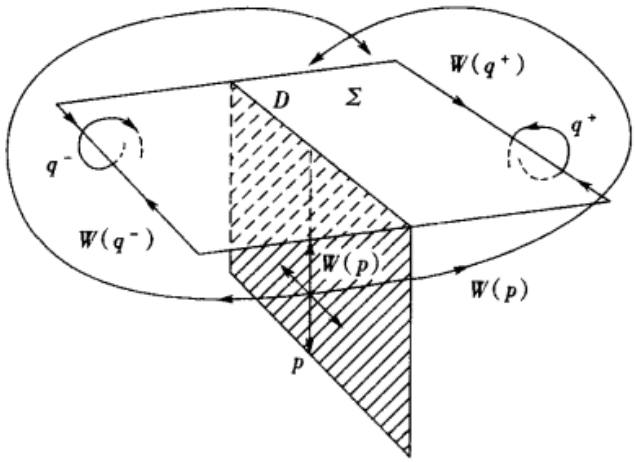


图 7-5　$\rho = 28$ 时系统的截面

记 D 为 v 轴，与 D 垂直且平分 Σ 的轴线为 u 轴，Σ_+ 和 Σ_- 分别是 Σ 中 $u>0$ 和 $u<0$ 的部分，则 P 在 Σ 上不连续，其图像见图 7-6。当点从 Σ_- 中趋于 D 时，该点在 P 作用下的像趋于一个固定点 b^+，而当点从 Σ_+ 中趋于 D 时，该点在 P 作用下的像趋于另一个固定点 b^-，即 $P(D_-) = b^+$，$P(D_+) = b^-$。P 在 D 上没有定义，与 D 相交的轨线必然被 P 吸引，最终到达 P，此后可以把 P 看作 u、v 的函数。

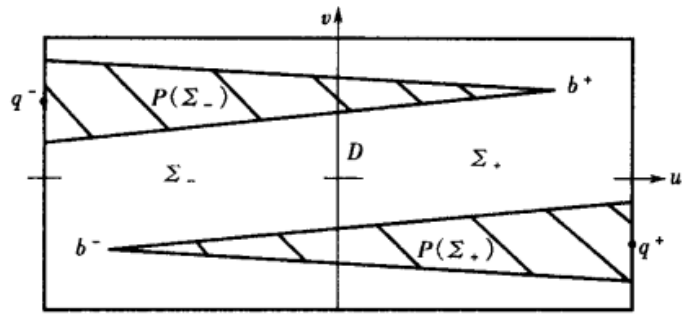


图 7-6　庞加莱映射 P

可以证明，存在函数 $f = f_\rho$ 和 $g = g_\rho$，使得 $P(u,v) = (f(u), g(u,v))$，$f = f_\rho$ 是一不连续的函数，称为洛伦兹映射，其图像如图 7-7 所示。

可见，P 与斯麦尔(Smale)马蹄映射相似，因此可以类似地定义闭集

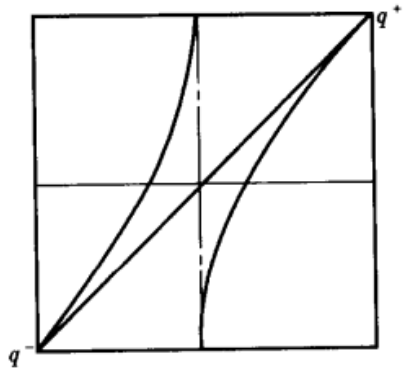


图 7-7 洛伦兹映射 $f=f_\rho$

$$A=\bigcap_{k=0}^{\infty}P^k(\Sigma)$$

对照式(7.4.9),可见 A 就是 A_ρ。注意这里的 $A=A_\rho$ 不是 P 的不变集,因为由上知 P 在 D 上没有定义,而 D 为 Σ 的中线。事实上,D 的严格的数学定义为

$$D=\{x\in A\mid \exists\, i\geqslant 0,\text{s.t.}\,P^i(x)\in D\}$$

而动力系统 P^k 在集合 D 上无定义。但是可以想到,$A=\bigcup_{t\geqslant 0}\varphi^t(A)$,因此 A_ρ 已与 P 的不变集相当接近。

将 $P=P_\rho:\Sigma\to\Sigma$ 看作双边符号动力系统,则对于 $x\in\Sigma$ 有对应

$$x\to(\cdots a_{-n}(x)\cdots a_{-1}(x)a_0(x)a_1(x)\cdots a_n(x)\cdots)$$

其中:

$a_k(x)=1$,若 $P^k(x)\in\Sigma$;

$a_k(x)=0$,若 $P^k(x)=0$,$k\in\mathbf{Z}$。

由于 $A=A_\rho$ 不是 P 的不变集,因此这种对应关系较之 Smale 马蹄映射要复杂。例如,当 $x\in D$ 时意味着存在 $k\in z$ 使得 $P^k(x)\in D$,而由上知动力系统 P^k 在集合 D 上无定义,因此 $x\in D$ 时没有双边符号列与之对应。不过由于 D 为疏朗的康托(Cantor)点集,相对于 A 可以忽略。

从 A 的定义可见,A 在 b^+(或 b^-)附近分别由一束以 b^+(或 b^-)为交点的线段组成,这两束线段与垂线 $u=\text{const}$ 都相交成康托集,因此这两束线段可以称为康托线,而 $A=A_\rho$ 在 $W^u_{\text{Loc}}(p)$附近就是康托面或称为康托书,书页之间是稀疏相间的,如图 7-8 所示。

设

$$W=\{(\cdots s_{-k}\cdots s_{-1}s_0s_1\cdots s_k\cdots)\mid s_k,s_{-k}\in\{0,1\}\}$$

设 T 是由式(7.5.1)定义的映射,即 $T:A\setminus D\to W$,则 $P^k:A\setminus D\to A\setminus D$ 为混沌动力系统,这是因为:

①$\psi^k:W\to W$ 是混沌的,其中 ψ 为左移映射;

②D 为疏朗的康托点集,而 A 为康托面集(康托书),因此 D 相对于 A 来说是低维的集合,从而 $A=\bigcup_{t\geqslant 0}\varphi^t(A)$必然是 φ^t 的混沌集(其中 φ^t 为洛伦兹动力系统),而 A 又是吸引集,所以 φ^t 为混沌动力系统。

进一步,由图 7-8 还可以想象,平衡点 p 处的不稳定流形的闭包就是吸引集 A 本身,即 $\overline{W^u(p)}=A$;同样不难想像,对于 $\forall\, x\in W^u(p)$,有轨线 $\varphi^t(x)$在 A 中稠密,即 A 是拓扑可迁的,从而 A 是吸引子且出现混沌,故为混沌吸引子。

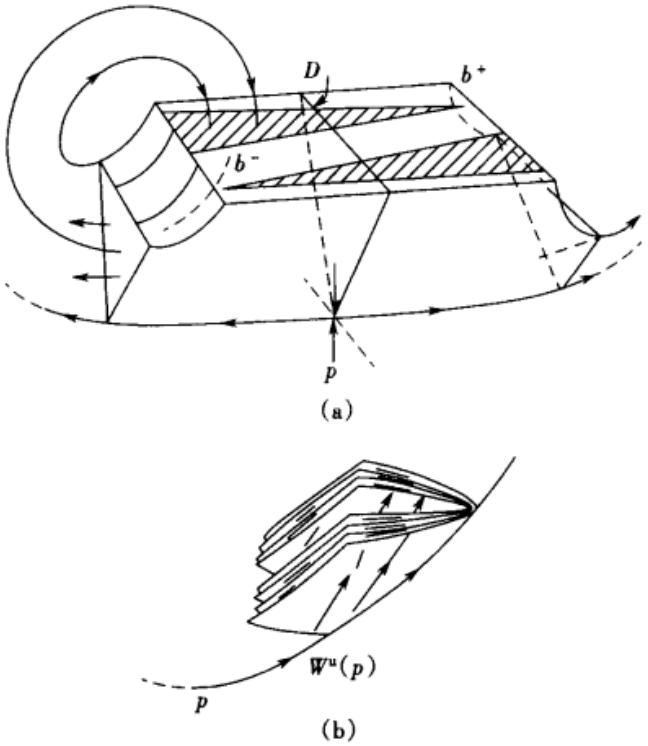


图 7-8 洛伦兹吸引子

(a)洛伦兹流的几何结构;(b)洛伦兹吸引子的局部几何结构

7.6 洛伦兹系统的全局分岔

本节研究洛伦兹系统(7.1.2)在 $\sigma=10$、$\beta=8/3$ 时的全局分岔,这也是洛伦兹在 1963 年运用数值方法研究的情况。全局分岔主要依靠定性分析和数值计算结合来判断。

系统(7.1.2)在 $\sigma=10$、$\beta=8/3$ 时的平衡点分岔问题,已经在 7.2 节和 7.3 节中运用中心流形定理和霍普夫分岔定理进行了研究,找到了以下两个分岔值:

$\rho=1$ 时,在平衡点 $p=(0,0,0)$ 处发生超临界叉形分岔;

$\rho=\dfrac{490}{19}\approx 25.79$,在 $q^{\pm}=(\pm\sqrt{\beta(\rho-1)},\pm\sqrt{\beta(\rho-1)},\rho-1)$ 处发生亚临界霍普夫分岔。

从系统的整体结构看,还可以找到其他分岔值。根据 7.5 节中定义的庞加莱映射 $P=P_\rho:\Sigma\to\Sigma$ 知,该映射在 u 轴上的投影就是一维洛伦兹映射 $f=f_\rho$。本节主要依靠庞加莱映射 $P=P_\rho$ 和一维洛伦兹映射 $f=f_\rho$ 的变化来认识系统的吸引集 $A=A_\rho$ 的结构。

图 7-9 是 $\rho>1$ 的初期系统的 A_ρ 图。从图可以看出,在 $\rho>1$ 的初期,A_ρ 的拓扑结构不会有任何变化,依然是由连接 p 与 q^+、q^- 的两条异宿轨线组成,此时系统的不变集为 $\{q^+\}$

$U\{q^-\}$。

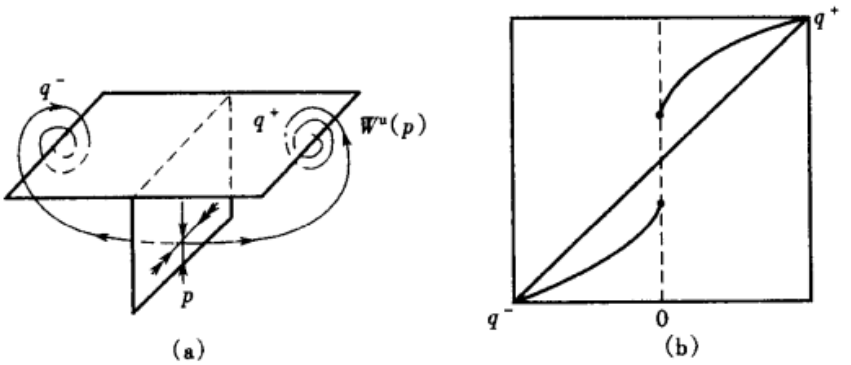


图 7-9 $\rho=10$ 时洛伦兹系统的流和映射

(a)$\rho=10$ 时洛伦兹系统的流;(b)$\rho=10$ 时的洛伦兹映射

图 7-10 是 $\rho=10$ 时的庞加莱映射 P_ρ。

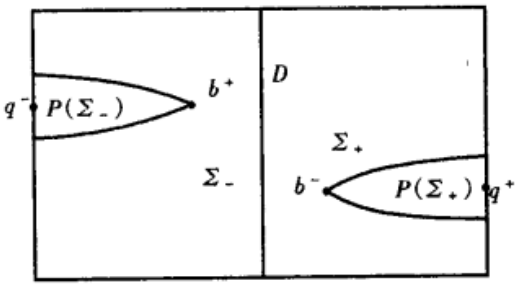


图 7-10 $\rho=10$ 时庞加莱映射 P_ρ

随着ρ 的增长,b^+ 和 b^- 不断向 D 靠近,因此必有某一时刻 $\rho=\rho_2$ 使 b^+ 和 b^- 同时到达 D,此时组成 A_ρ 的两条异宿轨线变为同宿轨线。数值计算表明 $\rho_2\approx13.926$,此时系统的 A_ρ、P_ρ 和 f_ρ 如图 7-11 和图 7-12 所示。

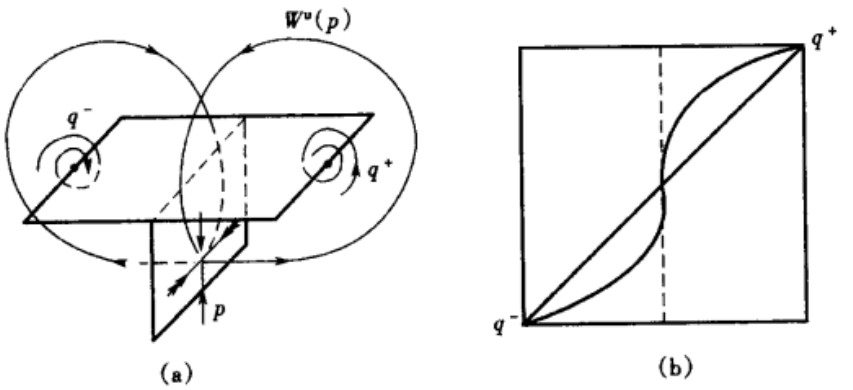


图 7-11 $\rho_2\approx13.926$ 时洛伦兹系统的流和映射

(a)$\rho_2\approx13.926$ 时洛伦兹系统的流;(b)$\rho_2\approx13.926$ 时的洛伦兹映射

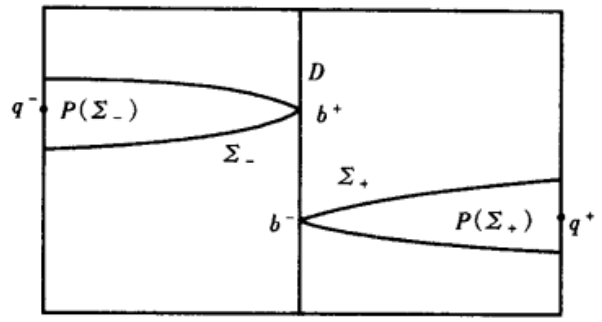


图 7-12 $\rho_2 \approx 13.926$ 时的庞加莱映射 P_ρ

由图7-11和7-12可知，当 $\rho = \rho_2$ 时，系统的不变集由两条连接 q^+ 与 b^-、q^- 与 b^+ 的直线段组成，此时 A_ρ 是两片分别以两条同宿轨线为边界的叶子，这两片叶子仅在 p 处相交，而 f_ρ 的图像已连成一条曲线，不过在零点没有定义，f_ρ 在零点的切线是一铅垂线。

$\rho > \rho_2$ 时系统的 A_ρ、P_ρ 和 f_ρ 见图7-13和7-14。

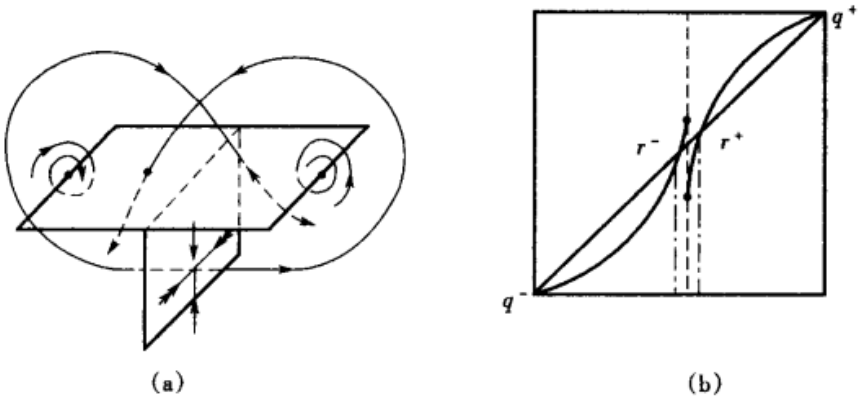


图 7-13 $\rho > \rho_2$ 时洛伦兹系统的流和映射

(a)$\rho > \rho_2$ 时洛伦兹系统的流；(b)$\rho > \rho_2$ 时的洛伦兹映射

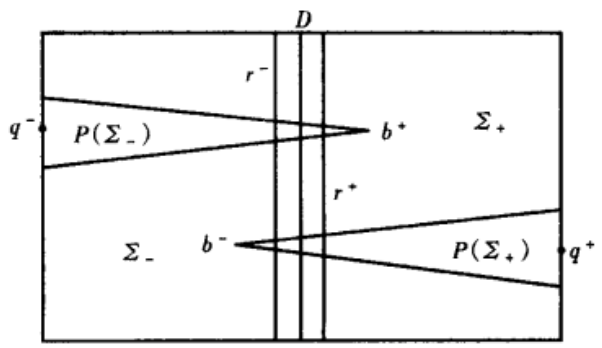


图 7-14 $\rho > \rho_2$ 时的庞加莱映射 P_ρ

由图 7-13 可知，图 7-11 中围绕着 q^+ 的同宿轨线已经变成连接 p 与 q^- 的异宿轨线，同样，围绕着 q^- 的同宿轨线也变成连接 p 与 q^+ 的异宿轨线，也就是说，原来的两条同宿轨线都已破裂，此时 A_ρ 不再是两片叶子，而是一个分形集，含有一个混沌子集。因此，当 ρ 通过 ρ_2 时，A_ρ 的拓扑结构发生显著变化，产生分岔。这种由同宿轨线的破裂而产生的分岔称为同宿分岔，也叫同宿爆发。

从图 7-14 可知，$\rho > \rho_2$ 时 f_ρ 出现两个新的不动点 $r^\pm$，实际上，$r^\pm$ 分别对应围绕着 q^+ 和 q^- 的周期轨线。由 7.4 节知，当 $1 < \rho < \bar{\rho}$ 时 q^+ 和 q^- 均为稳定的焦点，则任何位于 q^+（或 q^-）附近的轨线都必然被 q^+（或 q^-）所吸引；而在 A_ρ 的外围则有两条异宿轨线（由原来的两条同宿轨线破裂而产生），距离 q^+（或 q^-）较远的轨线都顺着两条异宿轨线的方向被 q^-（或 q^+）所吸引。为了同时满足这两种情况，在两条异宿轨线和平衡点 q^+、q^- 之间一定存在着不稳定的（即排斥的）周期轨线，这就是 $r^\pm$ 对应的周期轨线。

下面研究当 $\rho > \rho_2$ 时在 ρ_2 附近 A_ρ 的混沌现象。

图 7-15 和 7-16 是图 7-13 和 7-14 的放大。由图 7-15 可知，f_ρ 在不动点 $r^\pm$ 处的导数 $f'_\rho(r^\pm) > 1$，则 $r^\pm$ 为源，即不稳定的不动点，因此 A_ρ 中对应 $r^\pm$ 的周期轨线也是不稳定的（即排斥的）。由图 7-15 还可知，f_ρ 在 $[r^-, r^+]$ 中有混沌不变集，该集为康托集，f_ρ 限制在此康托集上拓扑等价于单边符号动力系统。此外，由图 7-16 可以看出，庞加莱映射 P_ρ 存在一混沌不变集，且该集为斯麦尔马蹄。这是因为，在图 7-16 上，V_0 和 V_1 分别代表介于直线 $u = r^+$ 和 D 以及 $u = r^-$ 和 D 之间的竖条，图中的阴影部分分别是它们的像，而 $P_\rho(\Sigma_+)$ 和 $P_\rho(\Sigma_-)$ 可以看成斯麦尔马蹄图中的横条 H_0 和 H_1。以 r^- 为例，分别以 r^- 和 q^- 为心的两条周期轨线都是不稳定的（即排斥的）。因此任何以这两条周期轨线的邻近点为初值的轨线必然与它们逐渐远离，故以在直线 $u = r^-$ 左边的点为初值的轨线只能被 q^- 吸引。r^+ 附近的周期轨线也有同样的性质。

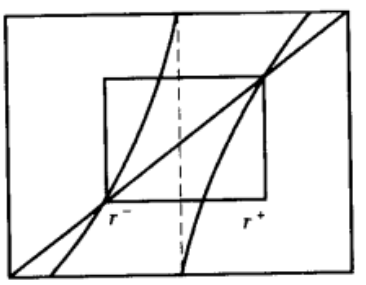


图 7-15 $\rho > \rho_2$ 时的洛伦兹映射

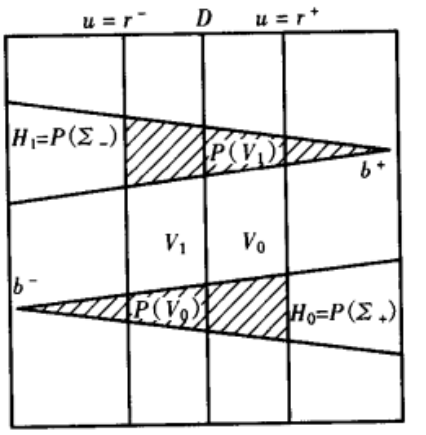


图 7-16 $\rho > \rho_2$ 时的庞加莱映射

f_ρ 在$[r^-, r^+]$中有混沌不变集，该集为康托集，f_ρ 限制在此康托集上拓扑等价于单边符号动力系统；庞加莱映射 P_ρ 存在一混沌不变集，且该集为斯麦尔马蹄，故可以用斯麦尔马蹄和符号动力系统来了解集合 $B = B_\rho$：

$$B = \bigcap_{k=0}^{\infty} P^k(V)$$

其中 $V = V_0 \cup D \cup V_1$。

P 在 D 上没有定义，因此 $B = B_\rho$ 仍然不是 P 的不变集，但已与 P 的不变集相当接近。此时 B_ρ 不再是 A_ρ 那样的康托线集，而是与斯麦尔马蹄相仿的康托点集。利用双边符号动力系统可知 B_ρ 为混沌集，但不是 P 的吸引集。事实上，以 B_ρ 中的点为初值的轨线将永远围绕着 q^+（或 q^-）运动或被 p 吸引，因为由图 7-16 可知，若 $x \in V \setminus B$，则必然存在某个 k，使得 $P^k(x) \in \Sigma \setminus (V_0 \cup V_1)$。由于 A_ρ 中对应 $r^\pm$ 的周期轨线都是不稳定的（即排斥的），若 $P^k(x)$落到 Σ 中的直线 $u = r^+$ 的左边，则当 $t \to \infty$ 时 $\varphi^t(P^k(x)) \to \{q^+, q^-\}$；同样，若 $P^k(x)$ 落到 Σ 中的直线 $u = r^-$ 的右边，则亦有当 $t \to \infty$ 时 $\varphi^t(P^k(x)) \to \{q^+, q^-\}$；而若 $P^k(x) \in D$，则有 $\varphi^t(P^k(x)) \to p$。可见，此时洛伦兹系统仅在一个零测度集 $\bar{B}_\rho = \bigcup_{t \geqslant 0} \varphi^t(B_\rho)$ 上是混沌的，从而 $\varphi^t = \varphi^t_\rho$。当 ρ 越过 $\rho_2 \approx 13.926$ 时，系统(7.1.2)不是混沌动力系统，只是有一个难以用实验方法找到的零测度的混沌不变集 $\bar{B}_\rho = \bigcup_{t \geqslant 0} \varphi^t(B_\rho)$。

下面研究当 ρ 越过 $\rho_2 \approx 13.926$ 后的情况。由图可知，r^+ 和 r^- 的距离随着 ρ 的增长而不断拉开，分别靠近 q^+ 和 q^-。这意味着对应 r^+ 和 r^- 的分别围绕着 q^+ 和 q^- 的周期轨线的直径在不断变小。与此同时，f_ρ 在 O 点右极限 $f_\rho(0_+)$ 与左极限 $f_\rho(0_-)$ 之间的距离也在不断拉大，但这一分离速度小于 r^+ 和 r^- 的分离速度，因此必然存在某一时刻 $\rho = \rho_3$，有 $f_\rho(0_\pm) = r^\mp$（图 7-17）。数值计算表明 $\rho_3 \approx 24.06$。

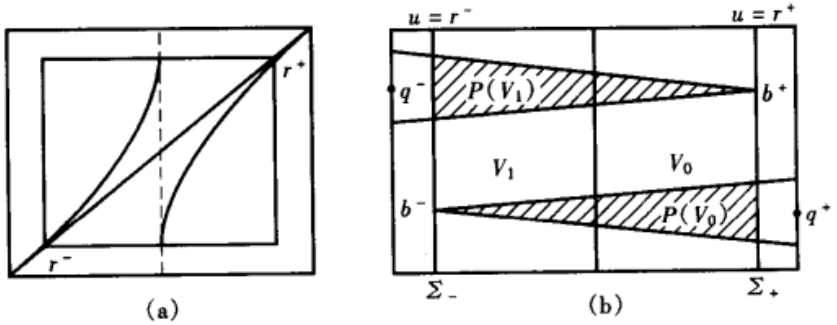


图 7-17 $\rho = \rho_3$ 时的洛伦兹映射和庞加莱映射

(a) $\rho = \rho_3$ 时的洛伦兹映射；(b) $\rho = \rho_3$ 时的庞加莱映射

由图 7-17 可知，当 $\rho = \rho_3$ 时

$$f_\rho : [r^-, r^+] \setminus \{0\} \to [r^-, r^+]$$

$$P_\rho : V_0 \cup V_1 \to V_0 \cup D \cup V_1 = V$$

f_ρ 和 P_ρ 都几乎可视为$[r^-, r^+]$和 V 上的自映射。$B = B_\rho$ 仍然几乎是 P 的不变集，而且仿照 $\rho = \rho_2$ 的情况依然可知 P 在 B 上是混沌的。但是现在 B 已不再是康托点集，而是两束以 $b^\pm$ 为顶点的康托线集，且 B 在 V 中是吸引的，即若 $x \in B$，则 $P^k(x) \to B \cup D$。因此有

$$\varphi^s(V) \to \bigcup_{t\geqslant 0}\varphi^t(B_\rho) \quad (\text{当 } s \to \infty \text{时})$$

因为 $\bar{B}_\rho = \bigcup_{t\geqslant 0}\varphi^t(B_\rho)$是 φ^t 的混沌不变集，从而$\bigcup_{t\geqslant 0}\varphi^t(V)$是 φ^t 的混沌集，$L^3(\bigcup_{t\geqslant 0}\varphi^t(V)) > 0$，所以 φ^t 是混沌动力系统。但此时 φ^t 没有混沌吸引集，因为由图 7-17(b)可知，组成 B 的两束康托线以 $b^\pm$ 为顶点，正好处于直线 $u = r^+$ 和 $u = r^-$ 上，因此对于任何位于直线 $u = r^+$ 右边且靠近 b^+ 的点 $x \in \Sigma$，必有 $P^k(x) \to |q^+| \cup |q^-|$；同理对于任何位于直线 $u = r^-$ 左边且靠近 b^- 的点 $x \in \Sigma$，也有相同的结论，因此 $\bar{B}_\rho = \bigcup_{t\geqslant 0}\varphi^t(B_\rho)$不是 φ^t 的吸引集。

当 $\rho_3 < \rho < \bar{\rho}$ 时，P_ρ 如图 7-18 所示。

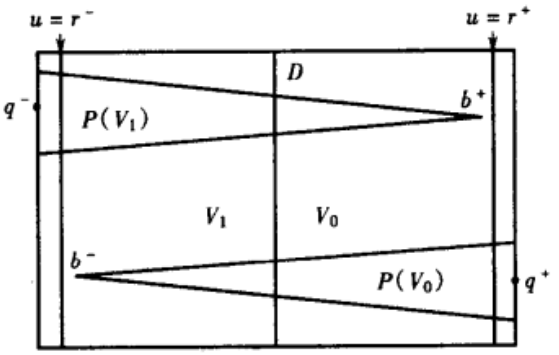


图 7-18 $\rho_3 < \rho < \bar{\rho}$ 时的庞加莱映射

此时组成 B 的两束康托线的顶点 $b^\pm$ 已经离开直线 $u = r^+$ 和 $u = r^-$，落在 $V = V_0 \cup D \cup V_1$ 内。显然，$\bar{B}_\rho = \bigcup_{t\geqslant 0}\varphi^t(B_\rho)$是其邻域$\bigcup_{t\geqslant 0}\varphi^t(V)$的吸引集，而且是拓扑可迁的混沌集，所以 $\bar{B}_\rho = \bigcup_{t\geqslant 0}\varphi^t(B_\rho)$不仅是 φ^t 的混沌不变集，而且是 φ^t 的奇异吸引子，因此 φ^t 是混沌动力系统。此时 φ^t 除了奇异吸引子$\bar{B}_\rho = \bigcup_{t\geqslant 0}\varphi^t(B_\rho)$外，还有两个平凡吸引子$|q^+|$和$|q^-|$。

随着 ρ 的增长，r^+ 和 r^- 的距离不断拉开，分别靠近 q^+ 和 q^-。这意味着对应 r^+ 和 r^- 的分别围绕着 q^+ 和 q^- 的周期轨线的直径在不断变小，并最终与 q^+ 和 q^- 重合，从而三个吸引子最终变成单个吸引子 A_ρ，这就是亚临界霍普夫分岔。当 ρ 越过$\bar{\rho} \approx 24.74$ 后，所有平衡点 p、q^+ 和 q^- 都成为鞍点。由于整个 A_ρ 都是混沌集且又是吸引子，因此全空间 R^3 都是 φ^t 的混沌集。

综如上述，随着 ρ 的增大，洛伦兹系统 $\varphi^t = \varphi_\rho^t$ 从平凡的动力系统(所有轨线都被 p 吸引)发展到混沌动力系统共需经历三次分岔，即

$$\rho_1 = 1(\text{叉形分岔})$$

$$\rho_2 \approx 13.926(\text{同宿分岔})$$

$$\rho_3 \approx 24.06$$

而洛伦兹系统的吸引集 A_ρ 从一开始的单点集 $\{p\}$ 发展到混沌吸引子，则需经历 4 次分岔，即在经历前 3 次分岔后还需经历一次分岔，即

$$\bar{\rho} \approx 24.74(\text{霍普夫分岔})$$

随着 ρ 的增大，φ^t 和 A_ρ 的具体变化可总结如下。

①当 $\rho < \rho_1 = 1$ 时，A_ρ 为单点集 $\{p\}$，是拓扑可迁的，即为吸引子。

②当 $1 = \rho_1 < \rho < \rho_2 = 13.926$ 时，A_ρ 为 p 的不稳定流形 W^u，由连接 p 与 q^+、q^- 的两条异宿轨线组成，两条异宿轨线相交于 p。由于异宿轨线不可能拓扑可迁，因此 A_ρ 既不是吸引子也不是混沌集。

③当 $\rho = \rho_2 \approx 13.926$ 时，A_ρ 成为二维的集合，由两片分别以 q^+、q^- 为中心且分别以两条同宿轨线为边界的叶子组成，这两片叶子仅在 p 处相交。因此，任何一片叶子中的轨线都不可能到达另一片叶子，所以 A_ρ 既不是吸引子也不是混沌集，且 φ^t 中没有混沌集。

④当 $13.926 = \rho_2 < \rho < \rho_3 = 24.06$ 时，A_ρ 成为分形集，φ^t 中有一零测度的混沌不变集，但 φ^t 本身并不是非零测度的混沌集，因此 φ^t 仍然不是混沌动力系统。这一区间被称为预湍流区域。

⑤当 $\rho = \rho_3 \approx 24.06$ 时，A_ρ 中含有一子集 B_ρ 为 φ^t 的混沌不变集，且 φ^t 在一个包含 B_ρ 的勒贝格测度 L^3 大于 0 的集合上是混沌的，此时 φ^t 已成为混沌动力系统。

⑥当 $24.06 = \rho_3 < \rho < \bar{\rho} = 24.74$ 时，A_ρ 中的子集 B_ρ 发展成 φ^t 的混沌吸引子(即奇异吸引子)，但 A_ρ 中还包含两个平凡吸引子 $\{q^+\}$ 和 $\{q^-\}$，因此 A_ρ 还不是混沌吸引子。φ^t 仍然是混沌动力系统，但在 q^+、q^- 附近是非混沌的。

⑦当 $\rho \geqslant \bar{\rho} = 24.74$ 时，q^+、q^- 附近的吸引盆消失，三个吸引子合而为一，整个 A_ρ 都是混沌吸引子(即奇异吸引子)，φ^t 在空间 R^3 上混沌。

以上给出了奇异吸引子产生的全过程。但是，随着 ρ 的进一步增大，奇异吸引子 A_ρ 将不能继续保持下去。数值计算表明，奇异吸引子 A_ρ 只能维持到 $\rho \approx 30.1$。当 $\rho > 30.1$ 时，A_ρ 不再是奇异吸引子，此时 A_ρ 中将出现各种周期轨线，特别是吸引的周期轨线，也会出现各种倍周期分岔，在这些倍周期分岔中还出现费根巴木普适常数。总之，此时 A_ρ 的拓扑结构是十分复杂的，

记 xy 为先在左侧(q^- 侧)绕一周，再在右侧(q^+ 侧)绕一周的周期轨线(图 7-19)。依此类推，x^2y^2 为在左侧绕两周再在右侧绕两周的周期轨线(见图 7-20)，x^2y^2xy 为先在左侧绕两周，然后在右侧绕两周，接着在左侧绕一周，最后再在右侧绕一周的周期轨线，等等。这些轨线都是稳定的。

当 $30.1 < \rho < 313$ 时，系统存在着多个倍周期分岔窗口，如图 7-21 所示。

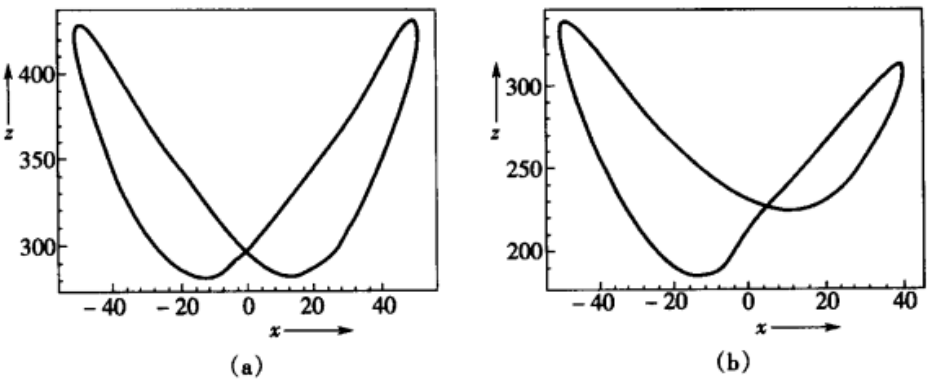


图 7-19 xy 轨线

(a)$\rho=350$ 时的对称稳定 xy 轨线;(b)$\rho=260$ 时的稳定不对称轨线

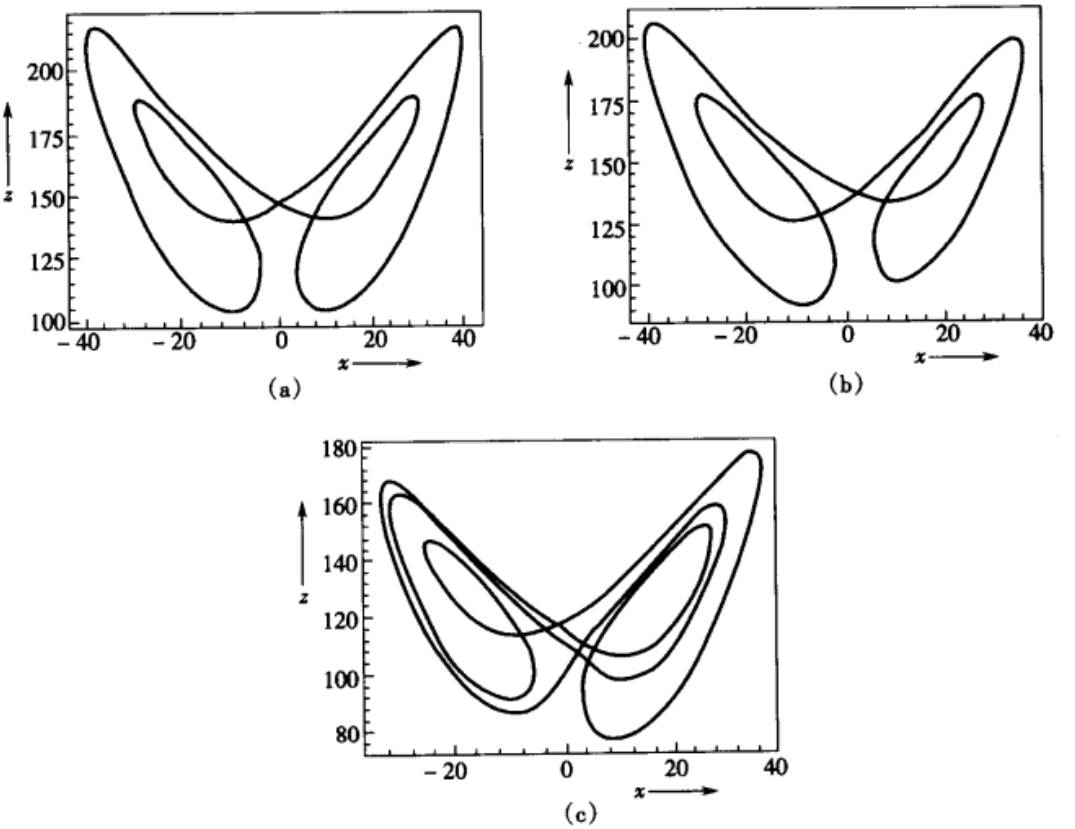


图 7-20 x^2y^2 轨线

(a)稳定对称的 x^2y^2 轨线,$\rho=160$;(b)稳定不对称的 x^2y^2 轨线,$\rho=148.5$;

(c)稳定不对称的 x^2y^2xy 轨线,$\rho=126.52$

仅以 $\rho\in[214,313]$ 为例,系统经历了由周期轨线 xy 为基本周期轨线的倍周期分岔,其分岔情况见图 7-22。

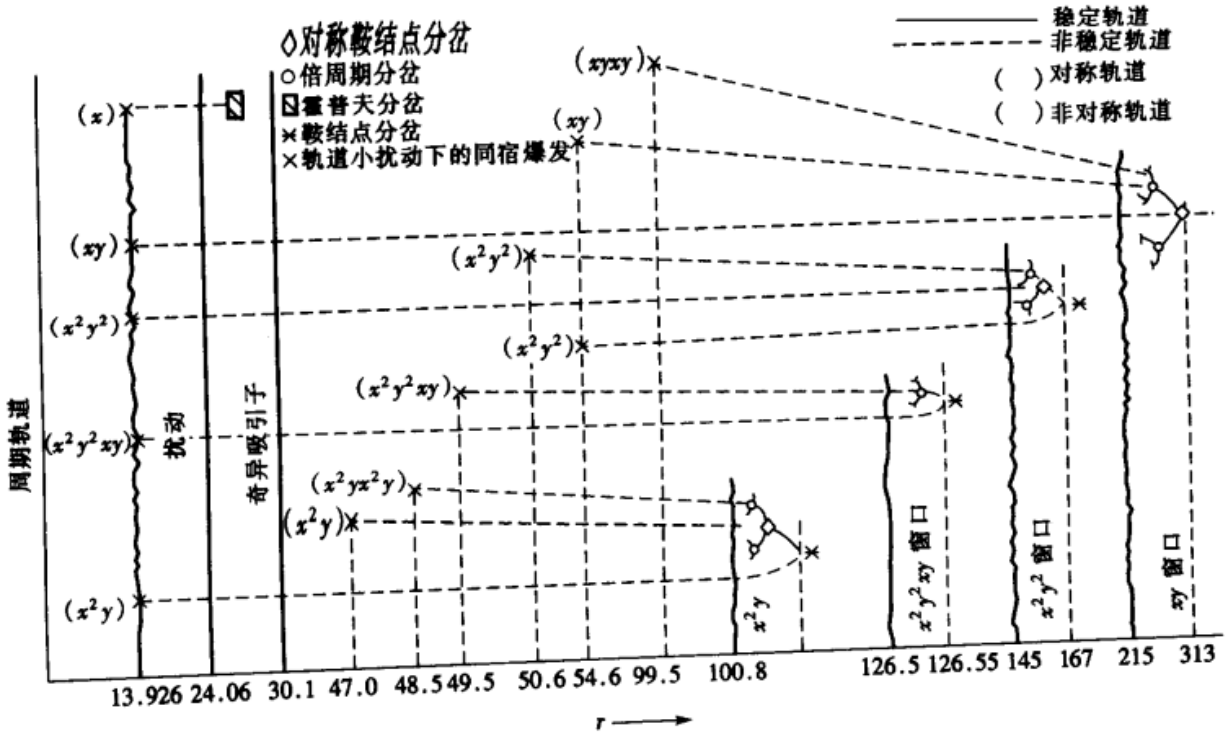


图 7-21 系统全参数区域分岔图

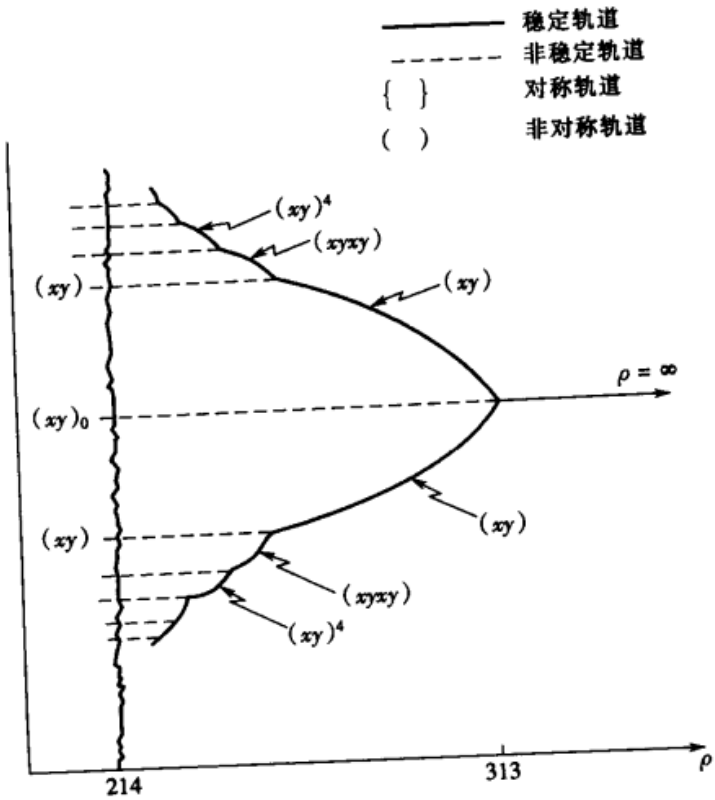


图 7-22 $\rho\in[214,313]$时的分岔图

因此[214,313]被称为一个倍周期分岔窗口。事实上,在 $30.1 < \rho < 313$ 如何判断 ρ 为何值时,系统成为混沌动力系统是一件很困难的事。

当 $\rho > 313$ 时,系统只有一个稳定的周期轨线 xy,此时 A_ρ 已成为一个结构简单的集合,既非拓扑可迁也非混沌。由于稳定的周期轨线在物理意义上表示有规则的流动,因此洛伦兹系统在 ρ 充分大(即温度充分高,因为 $\rho = R/R_c$,而 $R = \frac{ag\Delta Th^3}{\nu\kappa}$)时拥有稳定的对流。而一般认为热对流系统在温度越高时湍流强度越大。因此在 ρ 充分大时,洛伦兹系统能否真实地反映瑞利-伯纳德热对流依然存在着争议,由洛伦兹系统导出的混沌现象能否真实地反映瑞利-伯纳德热对流系统的湍流现象也依然是流体力学的重要研究课题之一。

第 8 章　混 沌 理 论

从牛顿(Newton)力学创立时起,人们就坚信:对一个确定性动力系统施加确定性的输入,则该系统的输出一定是确定的。这就是拉普拉斯(Laplace)的确定论思想。对于线性系统,这一结论是正确的,但对于非线性系统,则可能出现一种无法精确重复、貌似随机的运动,人们称之为混沌(chaos)。混沌理论架起了确定论和概率论两大理论体系之间的桥梁,与相对论和量子力学一起被称为 20 世纪物理学的三大革命。

8.1　混沌研究的起源

早在 1892 年,法国学者庞加莱(Poincare)在研究三体问题时就发现,系统在某类鞍型不动点附近具有不寻常的运动,无法求出精确解。他在 1903 年出版的《科学与方法》一书中明确指出,三体问题,在一定范围内,其解是随机的。这实际上是一种保守系统的混沌。庞加莱是世界上第一位预见到混沌现象的人。

1954 年,前苏联学者卡尔马高洛夫(Kolmogorov)提出"近似可积的保守系统具有非常复杂的相轨线结构"的猜想,该猜想于 1962 年被前苏联学者阿诺德(Arnold)和莫斯(Moser)证明,这就是著名的 KAM 定理。但是这些数学结果非常抽象,未能引起科学界的广泛注意。

1963 年,美国科学家洛伦兹(Lorenz)在其著名论文"决定论非周期流"中研究了由气象预报抽象出的伯纳德对流问题,采用数值积分方法计算如下三维自治系统(后人称之为洛伦兹系统,该方程的建立过程见本书第 7 章)

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\alpha & \alpha & 0\\ \gamma & -1 & 0\\ 0 & 0 & -\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -xz\\ xy\end{bmatrix}$$

的初值问题时发现,当系统参数取 $\alpha=10$、$\beta=\dfrac{8}{3}$、$\gamma=28$ 时,系统自任意初始状态出发的相轨线呈蝴蝶形态,既不重复也无规律。这是典型的非确定性运动,而该系统却是一个典型的确定性动力系统。洛伦兹第一次在确定性动力系统中发现了非确定性现象,成为混沌研究的里程碑。

1964 年法国天文学家赫农(Henon)提出如下映射,后人称之为赫农映射:

$$f:\begin{cases}u_1\to 1+bu_2-au_1^2\\ u_2\to u_1\end{cases}$$

该映射代表了一个 2 自由度的不可积哈密顿系统,然而当 $b=0.3$ 时,随着 a 的改变,系统运

动轨道在相空间中的分布显得越来越随机。这实际上是一种最简单的奇异吸引子。赫农以此解释了几个世纪遗留下来的太阳系的稳定性问题。随后,1971 年法国物理学家茹勒(Ruelle)和荷兰数学家塔肯斯(Takens)在《论湍流的本质》一文中正式提出"奇异吸引子"概念以解释湍流的发生机制,这一概念以后被广泛应用于耗散系统的混沌研究中。

1975 年,美籍华人学者李天岩和美国数学家约克(Yorke)在美国《数学月刊》上发表了题为《周期 3 意味着混沌》的著名文章,揭示了从有序到无序的演化过程。"混沌"一词正式成为科学词汇。

1976 年美国数学生态学家梅(May)在《自然》(Nature)杂志上发表了题为《具有极复杂的动力学的简单数学模型》的著名文章,提出生态学中的一些非常简单的数学模型具有极为复杂的动力学行为。他以著名的逻辑斯谛(Logistic)映射(也称为人口/虫口模型)为例,展示了这一一维映射的复杂的动力学行为。在此基础上费根巴木(Feigenbaum)于 1978 年发现了从倍周期分岔通往混沌道路上的两个普适常数,为混沌研究打下了坚实的理论基础。另外,斯麦尔(Smale)、梅尔尼科夫(Melnikov)、郝柏林等人也做了大量的工作。

进入 80 年代后,对混沌运动和混沌控制的研究掀起了新的高潮。由于混沌运动是自然界中的一种普遍运动形式,对混沌的研究推动了其他学科的发展,而其他学科的发展又反过来促进了对混沌的深入研究。现在,混沌与其他学科相互交错渗透,共同发展提高,在数学、物理学、生物学、化学、电子学、信息科学、气象学、天文学、地质学、经济学,甚至音乐、美术等领域都得到了广泛的应用。

8.2 混沌的定义

由于混沌系统的奇异性和复杂性至今尚未被人们彻底揭示,不同领域的学者从不同角度给出了定义,因此混沌至今还没有一个统一的定义。以下给出的是几种影响较广的定义。

8.2.1 Li-Yorke(李天岩-约克)的混沌定义

Li-Yorke 定义是影响较广的混沌的数学定义之一。它是从区间映射的角度出发进行定义的。以下首先叙述 Li-Yorke 定理。

定理 8.2.1 Li-Yorke 定理 设 $f(x)$是$[a,b]$上的连续自映射,若 $f(x)$有 3 周期点,则对任何正整数 n,$f(x)$有 n 周期点。

下面介绍 Li-Yorke 的混沌定义。

定义 8.2.1 $[a,b]$上的连续自映射 f 称为是混沌的,若其满足:

①f 的周期点的周期无上界。

②存在不可数子集 $S\subset[a,b]$,S 中无周期点,且满足

a.对任意 $x,y\in S$,有 $\liminf\limits_{n\to\infty}|f^n(x)-f^n(y)|=0$;

b.对任意 $x, y \in S, x \neq y$，有 $\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0$；

c.对任意 $x \in S$ 和 f 的任意周期点 y，有 $\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0$。

在 Li-Yorke 的混沌定义中，前两个极限表明子集中的点 x 和 y 相当分散又相当集中，第三个极限表明子集不会趋近于任意周期点。

根据 Li-Yorke 定理和 Li-Yorke 的混沌定义可知：对[a, b]上的连续自映射 f，如果存在一个周期为 3 的周期点，就一定存在周期为任何正整数的周期点，则一定会出现混沌现象。

Li-Yorke 的混沌定义刻画了混沌运动的以下三个重要特征：

①存在可数的无穷多个稳定的周期轨道；

②存在不可数的无穷多个稳定的非周期轨道；

③至少存在一个不稳定的非周期轨道。

8.2.2　Devaney 的混沌定义

Devaney 的混沌定义是另一种影响较广的混沌的数学定义，它是从拓扑的角度出发进行定义的。

定义 8.2.2　度量空间 V 上的映射 $\boldsymbol{f}: V \to V$ 称为是混沌的，若其满足：

①对初值的敏感依赖性，存在 $\delta > 0$，对任意的 $\varepsilon > 0$ 和任意的 $\boldsymbol{x} \in V$，在 $\boldsymbol{x}$ 的 ε 邻域 I 内存在 $\boldsymbol{y}$ 和自然数 n，使得 $d(\boldsymbol{f}^n(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}^n(\boldsymbol{y})) > \delta$；

②拓扑传递性，对 V 上的任意开集 X、Y，存在 $k > 0$，$\boldsymbol{f}^k(X) \cap Y \neq \Phi$（如一映射具有稠轨道，则它显然是拓扑传递的）；

③$\boldsymbol{f}$ 的周期点集在 V 中稠密。

Devaney 的混沌定义从另一个角度刻画了混沌运动的几个重要特征。对初值的敏感依赖性意味着无论 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 距离有多近，在 $\boldsymbol{f}$ 的多次作用下两者之间的距离 d 都会扩大到一定地步（$> \delta$），而这样的 $\boldsymbol{y}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 任意一个小的邻域内都存在着。对这样的 $\boldsymbol{f}$，如果用计算机计算其轨道，则任意微小的初始误差就将导致多次迭代后的计算结果与实际结果产生足够大的差异，从而导致计算失败。因此对初值的敏感依赖性也称为不可预测性。拓扑传递性意味着：任一点的邻域在 $\boldsymbol{f}$ 的多次作用下将遍及度量空间 V，这说明 $\boldsymbol{f}$ 不可能分解为两个在 $\boldsymbol{f}$ 下互不影响的子系统。周期点集在 V 中稠密意味着混沌系统存在着规律性的成分，决非混乱一片，形似混乱而实则有序。

8.3　混沌运动的基本特征

混沌运动是确定性非线性动力系统所特有的复杂运动状态，出现在某些耗散系统、不可积哈密顿系统和非线性离散映射系统中。通常，确定性动力系统有三种定常状态，即平衡态、周期运动和准周期运动。混沌运动不同于上述三种运动，它是一种不稳定的有限定常运

动,局限于有限区域但轨道永不重复,也被描述为具有无穷大周期的周期运动。混沌运动独有的特征表现在以下几方面。

8.3.1 有界性

混沌是有界的,它的轨线始终局限于一个确定的区域,这个区域称为混沌吸引域。无论混沌系统内部如何不稳定,它的轨线都不会走出混沌吸引域,因此从整体上说混沌系统是稳定的。

8.3.2 遍历性

混沌运动在其混沌吸引域内是各态历经的,即在有限时间内混沌轨道经过混沌区内每一个状态点。

8.3.3 内随机性

确定性动力系统一般只有施加随机性的输入,才能产生随机性的输出。混沌系统也是确定性动力系统,但它在施加确定性的输入后却产生类似随机的运动状态。这显然是系统内部自发产生的,故称为内随机性。这种内随机性与通常的随机性不同,它是由系统的对初值的敏感性(即不可预测性)造成的,体现了混沌系统的局部不稳定性。

8.3.4 分维性

混沌系统在相空间中的运动轨线,在某个有限区域内经过无限次折叠,形成一种特殊曲线。这种曲线的维数不是整数,而是分数,故称为分维。分维性表明混沌运动具有无限层次的自相似结构,即混沌运动是有一定规律的,这是混沌运动与随机运动的重要区别之一。

8.3.5 标度性

混沌运动是无序中的有序态。只要数值或实验设备精度足够高,总可以在小尺度的混沌域内观察到有序的运动形式。

8.3.6 普适性

不同系统在趋于混沌时会表现出某些共同特征,不依具体的系统方程或系统参数而改变,这种性质称为普适性。普适性主要体现在混沌的几个普适常数(如 Feigenbaum 常数)上,是混沌的内在规律性的体现。

8.3.7 统计特征

统计特征包括正的指数和连续功率谱等。这将在 8.5 节中详细介绍。

8.4 通向混沌的道路

混沌运动是确定性非线性动力系统所特有的复杂运动状态，但即使对于确定性非线性动力系统，也只有当系统参数处于某一范围时才表现为混沌运动，在其他情况下仍然表现为通常的确定性运动。系统从确定性运动过渡到混沌运动的方式，即通往混沌的道路有4种。

8.4.1 倍周期分岔道路

1976年美国数学生态学家梅在《自然》杂志上发表了题为《具有极复杂的动力学的简单数学模型》的著名文章，提出生态学中的一些非常简单的数学模型具有极为复杂的动力学行为。他以著名的逻辑斯谛映射(也称为人口/虫口模型)为例，展示了这一一维映射的复杂的动力学行为。在此基础上费根巴木于1978年发现了从倍周期分岔通往混沌道路上的两个普适常数。由于费根巴木的杰出贡献，倍周期分岔道路也称为费根巴木道路，即周期不断加倍而产生混沌，其基本途径为：不动点→2周期点→4周期点→……→无限倍周期凝聚(极限点)→奇异吸引子。

下面以逻辑斯谛映射为例，说明倍周期分岔道路。逻辑斯谛映射为

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$$

其中

$$x_i \in [0,1], \mu \in [0,4]$$

以下先来求周期－1解。所谓周期－1解就是经过1次迭代后的不动点，即 $x_{n+1} = x_n$。由于 $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$，则立即有 $x_n = \mu x_n(1 - x_n)$，解得

$$x_1^* = 0, x_2^* = 1 - \frac{1}{\mu}$$

但是由于限制了 $x_i \in [0,1]$(这是模型所代表的客观实际决定的，例如某一物种在自然界中所占的百分比)，而当 $0 \leqslant \mu < 1$ 时，$x_2^* = 1 - \frac{1}{\mu} < 0$ 不符合这一要求。另外稳定性要求 $\left|\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n}\right| < 1$，令 $A = \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} = \mu(1 - 2x_n)$，则有：

①当 $0 \leqslant \mu < 1$ 时，映射有1个周期－1不动点 $x_1^* = 0$，且 $A = \left|\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n}\right|_{x^*=0} = \mu(1 - 2x_n)|_{x^*=0} = \mu$，则 $|A| = |\mu| < 1$，故 $x_1^* = 0$ 是映射在[0,1]内的稳定的周期－1不动点。

②当 $1 < \mu < 3$ 时，映射有2个周期－1不动点

$$x_1^* = 0, x_2^* = 1 - \frac{1}{\mu}$$

但对不动点 $x_1^* = 0$，$A = \left|\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n}\right|_{x^*=0} = \mu > 1$，则 $x_1^* = 0$ 是映射在[0,1]内的不稳定不动

点;对不动点 $x_2^* = 1 - \frac{1}{\mu}$, $A = \left|\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n}\right|_{x^* = 1-\frac{1}{\mu}} = 2 - \mu$,则 $|A| = |2 - \mu| < 1$,故 $x_2^* = 1 - \frac{1}{\mu}$是映射在[0,1]内的稳定不动点。

③当 $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$时,对不动点 $x_1^* = 0$, $A = \left|\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n}\right|_{x^* = 0} = \mu > 1$;对不动点 $x_2^* = 1 - \frac{1}{\mu}$, $A = \left|\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n}\right|_{x^* = 1-\frac{1}{\mu}} = 2 - \mu < -1$,因此这两个不动点的 $|A|$ 都大于 1,故不动点 $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1 - \frac{1}{\mu}$均失稳,此时系统没有周期 - 1 解,只能考虑周期 - 2 解(即经过 2 次迭代后的不动点),2 次迭代后的映射为

$$x_{n+2} = \mu x_{n+1}(1 - x_{n+1}) = \mu^2 x_n(1 - x_n)[1 - \mu x_n(1 - x_n)]$$

该映射共有 4 个不动点,其中不动点 $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1 - \frac{1}{\mu}$不稳定(由上已知),而不动点 $x_3^* = \frac{1 + \mu + \sqrt{(\mu+1)(\mu+3)}}{2}$, $x_4^* = \frac{1 + \mu - \sqrt{(\mu+1)(\mu+3)}}{2}$稳定(其稳定性的证明仿上可得),故此时系统有两个周期 - 2 解。

④如此继续下去,当 $\mu = 3.569\,9\cdots$时,系统进入混沌态。图 8-1 给出了系统状态随参数 μ 的演化过程。

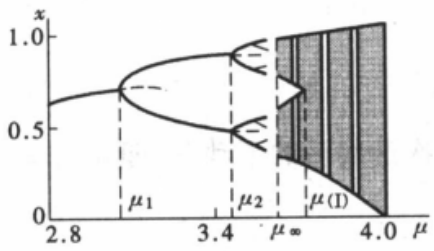


图 8-1 倍周期分岔示意图

8.4.2 阵发(间歇)道路

这是由法国科学家 Pomeau 和 Manneville 于 1980 年提出的一条通往混沌的道路,故也称为 PM 类阵发道路。

阵发混沌的产生机制与切分岔密切相关。阵发混沌发生于切分岔起点之前,表现为时间行为的忽而周期、忽而混沌,随机地在两者之间跳跃。当系统的某一参数 R 低于(或高于)某一值 R_0时,系统呈现规则的周期运动;而当参数 R 逐渐增加(或减少)时,系统在长时间内仍然表现出明显的近似周期运动形式,但这种近似的周期运动形式将被短暂的突发混乱运动所打乱,突发之后又是周期运动,这种情况不断重复,显示出一阵周期、一阵混沌的阵发运动;随着 R 的进一步增大(或减少),突发现象出现得越来越频繁,近似的周期运动几乎完全消失,最后系统完全进入混沌状态。

8.4.3 准周期道路

准周期道路又称为茹勒-塔肯斯道路,源自于 1971 年法国物理学家茹勒和荷兰数学家塔肯斯在《论湍流的本质》一文中对朗道和霍普夫提出的湍流发生机制进行的修正。20 世纪 40 年代,朗道和霍普夫先后提出一种湍流的发生机制,其基本思想是:当流体的雷诺数

Re 极小时，流体处于与时间无关的层流状态，对应相空间的稳定不动点；当 Re 超过某临界值时，出现霍普夫分岔，即出现频率为 ω_1 的振荡而使流体失稳；当 Re 进一步增大到另一临界值时，发生二次霍普夫分岔，出现新的频率为 ω_2 的振荡，运动用相空间的二维环面表示。通常 ω_1/ω_2 为无理数，这种准周期运动使流体运动进一步复杂化；当 Re 进一步增大，将出现更多频率的准周期运动，最后这种极复杂的准周期运动便是湍流，即湍流是无数次霍普夫分岔形成的无数频率的准周期振荡的结果。

然而，实验证明朗道和霍普夫提出的湍流发生机制并不符合实际。为此，1971 年法国物理学家茹勒和荷兰数学家塔肯斯在《论湍流的本质》一文中对朗道和霍普夫提出的湍流发生机制进行了修正，认为湍流可以看作具有无数多个频率耦合而成的振荡现象，但并不像朗道和霍普夫所说的那样要经过无数次分岔，而是只需要 4 次分岔即可，即著名的 T^4→混沌道路：4 维环面上具有 4 个不可公约的频率的准周期运动一般是不稳定的，经扰动后转变为奇异吸引子。茹勒和塔肯斯以此来代替朗道-霍普夫道路。

1978 年 Newhouse 将 T^4→混沌道路改进为 T^3→混沌道路，即 3 维环面上具有 3 个不可公约的频率的准周期运动一般是不稳定的，经扰动后转变为奇异吸引子，产生混沌。但是理论和实验均证明 3 维环面上存在着具有 3 个不可公约的频率的稳定的准周期运动，且这一稳定的准周期运动是典型的、通有的，因此 T^3→混沌道路被否定了，代之以 T^2→混沌道路。T^2→混沌道路是通有的，并为理论和实验所证实。因此准周期道路的典型途径是：不动点（平衡态）→极限环（周期运动）→二维环面（准周期运动）→奇异吸引子（混沌运动）。

8.4.4　KAM 环面破裂

KAM 定理指出：近哈密顿系统的轨线分布在一些环面（称为 KAM 环面），它们一个套在另一个外面，而两个环面之间充满了混沌区。它在法向平面上的截线称为 KAM 曲线。对于可积哈密顿系统（如单摆），其相图是椭圆平衡点和双曲平衡点交替出现，相平面被鞍点连续分割，相空间中的各部分的运动互不相混；而对于不可积哈密顿系统，在鞍点附近发生一些变化，鞍点连线破断，并在鞍点附近产生剧烈振荡，这种振荡等价于斯麦尔马蹄的结构，从而引起混沌运动，相应的区域称为混沌区。

8.5　常见的几种研究混沌的方法

混沌的研究方法可分为定性和定量两大类。

8.5.1　定性的方法

1. 直接观测法

这种方法是根据动力学系统的数值运算结果，画出相空间中相轨迹随时间的变化图，以及状态变量随时间的历程图。通过对比、分析和综合以确定解的分岔与混沌现象。在相空

间中，周期运动对应着封闭曲线，混沌运动对应着一定区域内随机分布的永不封闭的轨迹（奇异吸引子）。利用这种方法可以确定分岔点和普适常数。

2.分频采样法

对周期外力作用下的非线性振子，研究其倍周期分岔和混沌现象，可采用分频采样法。该方法是实验物理学中闪烁采样法的推广。为避免复杂运动在相空间中轨迹的混乱不清，可以只限于观察隔一定时间间隔（称为采样周期）在相空间的代表点（称为采样点），这样原来在相空间的连续轨迹就被一系列离散点所代表。分频采样法是目前辨认长周期混沌带的最有效的方法。

对于受迫振动，采样周期常取为外控力周期。当采样的结果为一点时，系统作周期运动（特殊情况下是稳定态）；当采样结果是 n 个离散点时，系统运动也是周期的，运动周期是外控力周期的 n 倍；当采样结果是无穷多个离散点时，运动是随机的；若采样点集中在一定区域内并且具有层次结构，则此伪随机运动就是混沌的。不断增大分辨能力，可以得到不断重复原分布形态的细微几何结构，这种无穷层次的自相似也就是标度不变性。

分频采样法适用于一切由周期外力驱动的非线性系统，具有远高于其他方法的分辨能力，而且其分辨能力将随计算机字长的扩大而进一步提高。但该方法也存在着一定的缺点，一是解释不唯一，二是不能分辨比采样频率更高的频率。

3.庞加莱截面法

对于含多个状态变量的自治微分方程系统，可采用庞加莱截面法进行分析。其基本思想是：在多维相空间$(x_1, \mathrm{d}x_1/\mathrm{d}t, x_2, \mathrm{d}x_2/\mathrm{d}t, \cdots, x_n, \mathrm{d}x_n/\mathrm{d}t)$中适当选取一截面，在此截面上对某一对共轭变量如$(x_1, \mathrm{d}x_1/\mathrm{d}t)$取固定值，称此截面为庞加莱截面。观察运动轨迹与此截面的节点（庞加莱点），设它们依次为 $P_0, P_1, \cdots, P_n, \cdots$，则原来相空间的连续轨迹在庞加莱截面上表现为一些离散点之间的映射 $P_{n+1} = TP_n$，由此可得到系统运动特性的信息。

单变量的周期运动在相平面的轨迹是封闭曲线，二变量的周期运动在 2×2 维相空间的轨迹是二维环面，……，N 变量的周期运动在 $N \times N$ 维相空间的轨迹是 N 维环面。若不考虑系统初始阶段的暂态过程，只考虑庞加莱截面上的稳态图像，则当庞加莱截面上只有一个不动点或少数离散点时，运动是周期的；当庞加莱截面上是一闭曲线时，运动是准周期的；当庞加莱截面上是成片的密集点且有层次结构时，运动是混沌的。

4.重构相空间法（赝相空间法）

当对数学模型未知的动力系统进行混沌行为分析时，上述的三种方法就不适用了，此时可采用重构相空间法。其做法如下：在实验过程中对某一个变量进行测量，得到时间序列 $\{x(k), k = 1,2,\cdots,N\}$，再适当选取一时间延迟量 τ，其中 τ 为采样周期的整数倍，取 $x(k)$，$x(k+\tau), x(k+2\tau), \cdots, x(k+(m-1)\tau)$为坐标轴，重新构建 m 维相空间，并利用先前测得的时间序列画出系统在这一 m 维相空间里的轨迹。这个 m 维相空间被称为重构相空间或赝相空间。

根据嵌入定理，只要重构相空间的维数（也称嵌入维数）m 与系统的真实相空间的维数

n 满足 $m \geqslant 2n+1$，就能够保证系统在重构相空间中的动力学行为与在真实相空间中的动力学行为拓扑等价。因此，重构相空间中的轨迹也可以反映系统运动状态的演化规律。对于定态，重构相空间中的轨迹是一个定点；对于周期运动，重构相空间中的轨迹是有限个点；而对于混沌运动，重构相空间中的轨迹是一些具有一定分布形式或结构的离散点。

8.5.2　定量的方法

1. 李雅普诺夫指数分析法

与上述 4 种定性分析方法不同，李雅普诺夫指数分析法是一种定量分析的方法。Liouville 定理指出，保守系统在相空间运动的过程中始终保持相体积不变。但对于一个耗散系统，其相体积一般要逐渐收缩，即 n 维相空间的轨线都要收缩到 k 维环面上。对于一个耗散系统的混沌运动，它存在着两个相反的过程，一方面耗散作用要使轨道收缩，另一方面轨道又要相互分离。由于收缩是由方程本身决定的(存在耗散项)，它是对相空间整体来说的，其作用是使远处的轨道趋向收缩至有限的范围内(吸引子)；发散是局部性质的，是对于相空间具体点附近的性质来说的，它使已靠近的轨道相互排斥。这样，所有的轨道最终集中在相空间的有限范围内，既相互靠拢又相互排斥，经过无数次的来回折叠，形成复杂的运动形态，即成为混沌态。为了定量地刻画混沌系统相邻的两点相互分离的快慢，人们引入李雅普诺夫指数。

对一维映射 $x_{n+1}=f(x_n)$，假定初始点为 x_0，相邻点为 $x_0+\delta x_0$，经过 n 次迭代后，它们之间的距离

$$\delta x_n = |f^{(n)}(x_0+\delta x_0) - f^{(n)}(x_0)| = \frac{\mathrm{d}f^{(n)}(x_0)}{\mathrm{d}x}\delta x_0$$

当 $\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right| > 1$ 时，经过 n 次迭代后初始点 x_0 与相邻点 $x_0+\delta x_0$ 相互分离；当 $\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right| < 1$ 时，经过 n 次迭代后，初始点 x_0 与相邻点 $x_0+\delta x_0$ 相互靠拢。如前所述，在混沌运动中，系统的轨道既相互靠拢又相互排斥，因此混沌运动中 $\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|$ 的值在不断地变化。为了从整体上观察相邻两轨道分离或靠近的趋势，需要对迭代过程进行平均化。为此，设平均每次迭代所引起的指数分离中的指数为 σ，则原先相距为 ε 的两点经过 n 次迭代后，两点间的距离为

$$|f^{(n)}(x_0+\varepsilon) - f^{(n)}(x_0)| = \varepsilon \mathrm{e}^{n\sigma(x_0)}$$

当 $\varepsilon \to 0$，$n \to \infty$ 时，

$$\sigma(x_0) = \lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{n}\ln\left|\frac{f^{(n)}(x_0+\varepsilon)-f^{(n)}(x_0)}{\varepsilon}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left|\frac{\mathrm{d}f^{(n)}(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

上式与初始点 x_0 无关，故可写成

$$\sigma(x_0) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left|\frac{\mathrm{d}f^{(n)}(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_i}$$

σ 称为李雅普诺夫指数，它表示在多次迭代过程中，平均每次迭代所引起的相邻离散点之间以指数速度分离或靠近的趋势。

在 n 维相空间中，δx 是 n 维的，从而 σ 有 n 个值。在 $t=t_0$ 时，以 x_0 为中心，$\delta x(x_0,t_0)$ 为半径作 n 维超球面，由于各方向上的收缩或扩展的程度不同，随着时间的演化，在 t 时刻，该 n 维超球面将变形为 n 维超椭球面。此 n 维超椭球面的第 i 个坐标轴方向的半轴长在 t 时刻为 $\delta x_i(x_0,t)$，则李雅普诺夫指数 σ 的第 i 个分量 σ_i 为

$$\sigma(x_0)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left|\frac{\delta x_i(x_0,t)}{\delta x_i(x_0,t_0)}\right|$$

由此可见，σ 的 n 个不同的表示轨道沿不同的方向收缩或扩展。

对一维情况，吸引子只能是不动点，此时 $\sigma<0$。

对二维情况，吸引子为不动点或极限环。

①若吸引子为不动点，则任意方向的 δx_i 都要收缩，则这是两个李雅普诺夫指数都应当是负的，因此不动点的李雅普诺夫指数 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)=(-,-)$。

②若吸引子为极限环，如果 δx_i 垂直于环线方向，则 δx_i 一定收缩，此时 $\sigma<0$；如果 δx_i 沿环线的切线方向，则 δx_i 不变，此时 $\sigma=0$。因此极限环的李雅普诺夫指数 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)=(-,0)$。

对三维情况，经过与二维情况相仿的讨论可知：

①若吸引子为不动点，则其李雅普诺夫指数 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(-,-,-)$；

②若吸引子为稳定极限环，则其李雅普诺夫指数 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(-,-,0)$；

③若吸引子为稳定二维环面，则其李雅普诺夫指数 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(-,0,0)$；

④若吸引子为不稳定极限环，则其李雅普诺夫指数 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(+,+,0)$；

⑤若吸引子为不稳定二维环面，则其李雅普诺夫指数 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(+,0,0)$；

⑥若吸引子为奇异吸引子，则其李雅普诺夫指数 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(+,-,0)$。

2. *自功率谱密度分析法*

根据傅里叶(Fourier)分析，任何周期为 T 的周期信号 $x(t)$ 都可以展开为 Fourier 级数。其物理意义是任何周期运动可以看作是基频 $\omega_0=2\pi/T$ 和一系列泛谐振 $n\omega_0$ 的叠加，故

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\omega_0 t}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-in\omega_0 t}$$

准周期运动也可以分解为一系列频率不可约的正弦振动的叠加，二者都具有离散谱。对于任意非周期运动的信号 $x(t)$，若满足绝对可积条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt<\infty$$

则可展开为 Fourier 积分

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt$$

即非周期运动信号的频率谱是连续谱。

为了表示混沌信号的频域特征，可求其自相关函数 $R_{xx}(\tau)$ 的 Fourier 变换，根据所求得的自功率谱密度函数 $S_{xx}(f)$ 来分析混沌的频域特征。故可得出

$$S_{xx}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{xx}(\tau)e^{-i2\pi fr}d\tau$$

$$R_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{xx}(f)e^{-i2\pi fr}df$$

对周期运动，功率谱只在基频及其倍频处出现尖峰，准周期对应的功率谱在几个不可约的基频以及它们叠加所在频率处出现尖峰。不同带宽的噪声的自功率谱的带宽可以展示噪声的频率宽窄的特点。发生倍周期分岔时，功率谱中将出现分频及其倍频，在这些频率点上功率谱图也都具有尖峰；混沌运动的特征在功率谱中表现为出现噪声背景宽峰的连续谱，其中含有与周期运动对应的尖峰，这表示混沌运动轨道访问各个混沌带的平均周期。根据这些特点，可以很容易地识别运动的特征是周期的，还是准周期的、随机的或混沌的。

为了获得可靠的功率谱，需要对若干个相继的采样序列的谱作平均。另外，在开始采样前必须等待过渡过程小时；如果原始数据来自包含大量噪声与外部干扰的测量，还应当考虑适当的滤波或光滑化。

除了上述6种基本方法以外，还有其他分析混沌的方法，如分形维数分析法、测度熵法等。在实际应用的时候，常常不是单纯地使用某一种方法，而是将定性的方法（如直接观测法、分频采样法、庞加莱截面法、重构相空间法）与定量的方法（Lyapunov 指数分析法、自功率谱密度分析法）结合起来，以获得更加精确的结果。

8.6 混沌域的结构

上一节叙述的6种定性和定量方法多用于判定系统在相空间中是否发生混沌。而物理参数空间内动力系统解的特性，诸如解的个数、类型、周期以及更重要的混沌域的结构等问题更受人们关注。对于大参数范围内的混沌运动，不少科学家付出了不懈的努力并取得了丰硕的成果。Ueda 研究了零线性刚度的杜芬方程在大参数范围内的混沌解。Holmes 和 Moon 回顾了以往显示出混沌运动的非线性系统和相关的数学模型的例子，阐明了混沌运动对初始条件的敏感性。Tongue 指出多态均衡的存在并非混沌出现的必要条件。Dowell 和 Pezeshki 研究了屈曲梁的动力学行为并比较了理论结果与物理实验结果，建立了混沌振动与受迫激励的联系。但是，这些结果毫无例外地都是运用时间积分法得到的。Tongue 曾指出，

由于混沌运动的存在,对积分的时间步长的不适当的选择将会导致错误的结果。

对于物理参数空间内混沌域的结构分析,本节提供了一种新的数值仿真方法——增量谐波平衡法,用于描述动力系统解的特性。变参数增量谐波平衡法非常适合于参数研究,用以获得解的全局图。在这种方法中,初始值是假定的。对每一步参数增量,非线性微分方程被转化为一系列的用 Fourier 系数表示的线性化增量代数方程并进行迭代求解。在得到了在某一特定参数下的解之后,就可以对参数进行增量,用刚得到的解代替初始值,通过迭代可以得到新的解。通过反复迭代,用这种方法可以很容易地得到一个动力系统的解的全局图。取初始分岔图中的临界点作为初始近似值,根据临界点的类型,运用参数开折的方法,使用附加约束来描述相邻的临界点,从而构建把物理参数空间内不同性质的解予以区分的边界(又称转迁边界),这些边界组成了特征图,最终使解的稳态特性可以直接从特征图中得出。

8.6.1 增量谐波平衡法

在非线性动力学分析中,增量谐波平衡法(Incremental Harmonic Balance Method,简称 IHB 法)是一种非常有效的工具。这种方法不必假设小参数,可处理强非线性问题,而且便于计算机执行。

增量谐波平衡法的思想可简述如下:最初时假设系统的定态周期解(包括稳定的和不稳定的)以消除时间变量及相关初始条件的影响,然后将响应 $u(t)$用其 Fourier 级数代替,从而将原系统(非线性微分方程)转化为一系列的用 Fourier 级数项表示的非线性代数方程。未知的 Fourier 系数可由牛顿算法求得,从而导出由未知的增量表示的一系列线性代数方程并进行迭代求解。

方程等式右边可消去的项称为剩余矢量,它是由于初始假设导致的不平衡误差。剩余矢量保证了解在截断时不会导致误差积累。在这种方法中,所有的非线性刚度和刚度的导数都被加以考虑,因此可以用于研究强非线性问题。

一开始,只允许一个参数变化,找出初始的边界点。消去剩余矢量后,得到一个平衡的定态。然后给它一个增量,可以得到一个具有周期变化的系数的线性增量微分标量方程。运用有关解的稳定性的 Floquet 理论可以对其求解。略去所有不稳定分支后,即可得到分岔图。若解有界,又不存在稳定的定态平衡解(对应分岔图中的缺口),则混沌解是唯一的可能。

在构建物理参数空间的转迁边界时,将边界点作为初始的近似,随着各参数的同时变化,转迁边界延伸并覆盖整个参数空间。这样,就可以从物理参数图和特性图上直接看到定态解的特性。

下面以一个 n 自由度自治系统为例,说明增量谐波平衡法的作法。n 自由度无量纲自治系统一般可写为

$$\omega^2 \ddot{x}_i + f_i(x_1, \cdots, x_n, \dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_n, \omega, \gamma) = 0 \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{8.6.1}$$

这里 $\dot{x}_i$ 是对无量纲时间 $\tau=\omega t$ 求导，$f_i(x_1,\cdots,x_n,\dot{x}_1,\cdots,\dot{x}_n,\omega,\gamma)$ 是关于无量纲振动频率 ω、时间 t、参数 γ、独立变量 x_i 及其导数 $\dot{x}_i$ 的非线性函数。

在进行了时间变换 $\tau=\omega t$ 后，周期函数 $f_1,\cdots,f_n$ 均以 2π 为周期。

运用增量谐波平衡法求周期解的过程可分为两步。

第一步是 Newton-Raphson 迭代过程。设方程(8.6.1)的当前解(或一开始假设一个解)为 ω_0、γ_0 和 $x_{i0}(i=1,2,\cdots,n)$，对其加上一个小增量，记为 Δ，则得其邻近解

$$\left.\begin{aligned}\omega&=\omega_0+\Delta\omega\\ \gamma&=\gamma_0+\Delta\gamma\\ x_i&=x_{i0}+\Delta x_i\quad(i=1,\cdots,n)\end{aligned}\right\}\tag{8.6.2}$$

将式(8.6.1)按初始态泰勒展开，并忽略所有的小增量的非线性项，则可得到线性化增量方程

$$\begin{aligned}&\omega^2\Delta\ddot{x}_i+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial\dot{x}_j}\right)_0\Delta\dot{x}_j+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_0\Delta x_j\\ &=-(\omega_0^2\ddot{x}_{i0}+f_{i0})-\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial\omega}\right)_0+2\omega_0\ddot{x}_{i0}\right)\Delta\omega-\left(\frac{\partial f_i}{\partial\gamma}\right)_0\Delta\gamma\quad(i=1,2,\cdots,n)\end{aligned}\tag{8.6.3}$$

这一变分方程可写为关于增量的线性矩阵方程

$$\omega^2\Delta\ddot{\boldsymbol{X}}+\boldsymbol{D}\Delta\dot{\boldsymbol{X}}+\boldsymbol{L}\Delta\boldsymbol{X}=\boldsymbol{R}-(2\omega\ddot{\boldsymbol{X}}_0+\boldsymbol{Q})\Delta\omega-\boldsymbol{G}\Delta\gamma\tag{8.6.4}$$

其中

$$\Delta\boldsymbol{X}=[\Delta x_1\quad\Delta x_2\quad\cdots\quad\Delta x_n]^{\mathrm{T}}\tag{8.6.5}$$

$$\boldsymbol{X}_0=[x_{10}\quad x_{20}\quad x_{n0}]^{\mathrm{T}}\tag{8.6.6}$$

矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 中的元素为

$$L_{ij}=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_0\tag{8.6.7}$$

$$D_{ij}=\left(\frac{\partial f_i}{\partial\dot{x}_j}\right)_0\tag{8.6.8}$$

向量 $\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 中的元素为

$$Q_i=\left(\frac{\partial f_i}{\partial\omega}\right)_0\tag{8.6.9}$$

$$G_i=\left(\frac{\partial f_i}{\partial\gamma}\right)_0\tag{8.6.10}$$

$$R_i=-[\omega_0^2\ddot{x}_{i0}+f_{i0}]\tag{8.6.11}$$

在方程(8.6.4)中，$\boldsymbol{R}$ 是用以防止增量过程偏离实际解的纠正项。

注意到 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 都是导数，随时间而变化，因此式(8.6.4)代表一个拥有时变系数的线性常微分方程。

第二步是 Galerkin 迭代过程。假设某个未知的 x_0 可以展开为有限 Fourier 级数，即

$$x_{i0} = \sum_{n=n_1,n_2,\cdots} a_{in}\cos\ n\tau + \sum_{m=m_1,m_2,\cdots} b_{im}\sin\ m\tau \quad (i=1,\cdots,n) \tag{8.6.12}$$

这里 $n_1, n_2, \cdots$ 和 $m_1, m_2, \cdots$ 为正整数，可以是 0,1,2,…或 1,3,5,…，等等，取决于实际情况。

类似地，x 也展开为

$$\Delta x_i = \sum_{n=n_1,n_2,\cdots} \Delta a_{in}\cos\ n\tau + \sum_{m=m_1,m_2,\cdots} \Delta b_{im}\sin\ m\tau \quad (i=1,\cdots,n) \tag{8.6.13}$$

为简明起见，函数 x_0 和 Δx 可写为

$$\boldsymbol{x}_{i0} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{a}_{i0} \tag{8.6.14}$$

$$\Delta\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{T}\Delta\boldsymbol{a}_i \quad (i=1,\cdots,n) \tag{8.6.15}$$

其中

$$\boldsymbol{T} = [\cos\ n_1\tau \quad \cos\ n_2\tau \quad \cdots \quad \sin\ m_1\tau \quad \sin\ m_2\tau \quad \cdots] \tag{8.6.16}$$

$$\boldsymbol{a}_{i0} = [a^0_{in1} \quad a^0_{in2} \quad \cdots \quad b^0_{im1} \quad b^0_{im2} \quad \cdots]^{\mathrm{T}} \quad (i=1,\cdots,n) \tag{8.6.17}$$

$$\Delta\boldsymbol{a}_i = [\Delta a_{in1} \quad \Delta a_{in2} \quad \cdots \quad \Delta b_{im1} \quad \Delta b_{im2} \quad \cdots]^{\mathrm{T}} \quad (i=1,\cdots,n) \tag{8.6.18}$$

则

$$\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}_0 \tag{8.6.19}$$

$$\Delta\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}\Delta\boldsymbol{A} \tag{8.6.20}$$

其中

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} T & & 0 \\ & T & \\ 0 & & \ddots \\ & & & T \end{bmatrix} \tag{8.6.21}$$

$$\boldsymbol{A}_0 = [a_{10} \quad a_{20} \quad \cdots \quad a_{n0}]^{\mathrm{T}} \tag{8.6.22}$$

$$\Delta\boldsymbol{A} = [\Delta a_1 \quad \Delta a_2 \quad \cdots \quad \Delta a_n]^{\mathrm{T}} \tag{8.6.23}$$

由上可得

$$\dot{\boldsymbol{X}}_0 = \dot{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{A}_0 \tag{8.6.24}$$

$$\ddot{\boldsymbol{X}}_0 = \ddot{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{A}_0 \tag{8.6.25}$$

将式(8.6.19)、式(8.6.20)、式(8.6.24)和式(8.6.25)代入式(8.6.4)，并在一个周期内应用 Galerkin 法，可得

$$\begin{aligned} &\delta\Delta\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left\{\int_0^{2\pi}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}[\omega_0^2\ddot{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{Y}]\mathrm{d}\tau\right\}\Delta\boldsymbol{A} \\ &= \delta\Delta\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left\{\int_0^{2\pi}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\mathrm{d}\tau - \int_0^{2\pi}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{Q} + 2\omega_0\dot{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{A}]\mathrm{d}\tau\Delta\omega - \int_0^{2\pi}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\mathrm{d}\tau\Delta\gamma\right\} \end{aligned} \tag{8.6.26}$$

或简写为

$$\boldsymbol{k}\Delta A = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{q}\Delta\omega + \boldsymbol{g}\Delta\gamma \tag{8.6.27}$$

其中矩阵

$$\boldsymbol{k} = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}[\omega_0^2 \ddot{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{Y}]\mathrm{d}\tau \tag{8.6.28}$$

向量

$$\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} [\omega_0^2 \dot{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{Y}} A_0 - \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}} F_0]\mathrm{d}\tau \tag{8.6.29}$$

$$\boldsymbol{q} = \int_0^{2\pi} [2\omega_0 \dot{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{Y}} A_0 - \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}} Q]\mathrm{d}\tau \tag{8.6.30}$$

$$\boldsymbol{g} = -\int_0^{2\pi} \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}} g\mathrm{d}\tau \tag{8.6.31}$$

由式(8.6.27)可知，未知数的个数比方程多 2，多出的未知数就是振动频率 ω 和参数 γ。根据条件，其中一个未知数的值是确定的。例如考虑极限环时，某个 Fourier 系数是固定的（$a_{i1}=0$ 或 $b_{i1}=0$）。在时间轴上对 x_i 进行移位不会对结果有任何影响。为了使未知数的个数等于方程的个数，当 $\Delta\omega$ 被当做未知数时 γ 将被看作为给定的控制参数。

用 $\boldsymbol{q}$ 替换 $\boldsymbol{k}$ 中对应系数 b_{i1} 的列，并用 $\Delta\omega$ 替换 Δc 中的对应系数 Δb_1，可得

$$k'\Delta A' = r \tag{8.6.32}$$

经过上述变换后，这里 k' 和 $\Delta A'$ 对应以前的矩阵 $\boldsymbol{k}$ 和向量 $\Delta\boldsymbol{A}$。方程(8.6.32)可以用多种方法求解，比较好的一种近似方法是迭代法，每一步都更新 k' 和 r，直到 δ 小于给定的界限 T，这里

$$\delta = \frac{\| \Delta A' \|}{\max A_i'} \tag{8.6.33}$$

其中 $\| \Delta A' \|$ 表示 $\Delta A'$ 幅值的范数。在获得对应某一特定的 γ 的解之后，就可以对参数 γ 进行增量 $\Delta\gamma$（作为控制增量）。用先前的解作为初始值，反复进行迭代过程直至得到邻近的 λ 的解。通过这种方法可以找到邻近的 λ 的解。运用论证和迭代可以绘出解的图。

此外，在上述过程中，频率 ω 或 Fourier 系数 a_{ij} 和 b_{ij} 都可以作为控制增量。控制增量的选择取决于增量的变化速度，通常变化速度最快的被选为控制增量。当解的图对参数 γ 或其他参数十分敏感时，这种选择方法十分有用，可以减少为求得解的图所需的迭代步数。

为了研究分岔问题和复杂运动过程，同时也因为混沌的存在与强非线性有关，谐波平衡法也常用于将常微分方程化为一系列的用周期响应的 Fourier 系数表示的非线性代数方程。这一系列非线性代数方程可用 Newtonian 算法求解。对原方程进行增量可求得梯度矩阵，再运用谐波平衡法来求解。这就是增量谐波平衡法。最后得到的由 Fourier 系数的增量表示的线性代数方程可以用任何方法求解，其系数在收敛于一周期轨道之前是不断更新的。

考虑如下形式的常微分方程：

$$\phi(\ddot{u}, \dot{u}, u, \lambda) - f\cos t = 0 \tag{8.6.34}$$

其中 ϕ 是解析的，$u(t)$ 是未知响应，$|\lambda|$ 是系统参数向量，f 是谐波激励的幅值，$\dot{u}$ 表示对无

量纲时间 t 求导。用 $[1\ \cos\ t\ \cos 2t\ \cdots]\{f\}$ 替换 $f\cos\ t$，很容易将式(8.6.34)改写为周期激励。由于人们感兴趣的是周期解，因此下列展开是允许的：

$$u(t)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i\cos\frac{it}{m}+\sum_{i=0}^{\infty}b_i\sin\frac{it}{m} \tag{8.6.35}$$

其中 a_i 和 b_i 是未知的 Fourier 系数，m 为表示亚谐共振阶数的整数，$u(t)$ 以 $2m\pi$ 为周期。对于首阶亚谐共振，$m=1$，其周期较高阶亚谐共振要长。当 m 足够大时，相应的周期解在数值上和物理上都不稳定，最终以无周期的混沌运动告终。后面将研究有加速度的 Duffing 方程在从 $m=4$ 到 $m=8$ 以及更高阶亚谐共振时的周期解分岔并导致混沌运动出现的情况。当 $m=3$ 时系统有解，恢复周期性运动。因此，对于混沌域和转迁集的结构来说，方程(8.6.35)中包含的 m 是最重要的。

在用式(8.6.35)取代式(8.6.34)，并合并类似的谐波项后，则有

$$\sum_{i=0}^{\infty}R_i^{c}\cos\frac{it}{m}+\sum_{i=0}^{\infty}R_i^{s}\sin\frac{it}{m}=R(t)=0 \tag{8.6.36}$$

其中 $R(t)$ 为留数，对实际解为 0，对近似解不为 0。R_i^{c} 和 R_i^{s} 是其 Fourier 成分，谐波平衡法要求用 $\cos\frac{jt}{m}$ 和 $\sin\frac{jt}{m}$ 分别同乘以式(8.6.36)两边，并对 t 从 0 到 $2m\pi$ 积分，得

$$\int_0^{2m\pi}R(t)\cos\frac{jt}{m}\mathrm{d}t=0 \tag{8.6.37a}$$

和

$$\int_0^{2m\pi}R(t)\sin\frac{jt}{m}\mathrm{d}t=0 \tag{8.6.37b}$$

在完成上述积分之后，则有

$$[\boldsymbol{K}(q,\lambda)]\boldsymbol{q}-f\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}=\boldsymbol{0} \tag{8.6.38}$$

其中

$$\boldsymbol{R}=[R_0^{c}\quad R_1^{c}\quad R_2^{c}\quad\cdots\quad R_1^{s}\quad R_2^{s}\quad\cdots]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{q}=[2a_0\quad a_1\quad a_2\quad\cdots\quad b_1\quad b_2\quad\cdots]^{\mathrm{T}}$$

$\boldsymbol{F}$ 为单位列向量，在第 m 个位置为 1；$\boldsymbol{K}(q,\lambda)$ 是全刚度矩阵，当 $\phi(\ddot{u},\dot{u},u,\lambda)$ 的形式给定时可明确解出。该方程在整体上是不对称的，但对于非回转保守系统是对称的。

式(8.6.35)和式(8.6.36)只利用了有限的谐波项。一般来说，式(8.6.35)和式(8.6.36)利用的谐波项是相同的。这种近似等价于用三角函数作为基函数的 Galerkin 法。Microns 指出谐波系数的绝对值的上界是按指数递减的。Van Dooren 研究了软特性的 Duffing 振子从有规律的周期运动到混沌运动的转变，得到了对应唯一解的存在、误差边界和稳定性质的常数。Leung 运用式(8.6.36)给出的永年剩余项来防止大不平衡量的剩余误差。当大不平衡量的剩余误差出现时，式(8.6.35)中的相应谐波项将不复存在。

8.6.2 牛顿算法

为了用牛顿算法求解方程(8.6.38)，需对方程(8.6.34)作多参数增量：

$$\ddot{u}\to\ddot{u}+\Delta\ddot{u},\dot{u}\to\dot{u}+\Delta\dot{u},u\to u+\Delta u,\lambda\to\lambda+\Delta\lambda,f\to f+\Delta f,\text{得}$$

$$\phi(\ddot{u}+\Delta\ddot{u},\dot{u}+\Delta\dot{u},u+\Delta u,\lambda+\Delta\lambda)-(f+\Delta f)\cos t=0$$

在忽略了高阶小量项后，则有

$$\frac{\partial\phi}{\partial\ddot{u}}\Delta\ddot{u}+\frac{\partial\phi}{\partial\dot{u}}\Delta\dot{u}+\frac{\partial\phi}{\partial u}\Delta u+\Delta\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\lambda}}-\Delta f\cos t+R(t)=0 \tag{8.6.39}$$

其中 $R(t)$由式(8.6.36)给出。若 $u(t)$为近似解，则式(8.6.36)必有留数。由于 $u(t)$的增量也是周期的，因此可以对 $\Delta u(t)$进行 Fourier 展开，即

$$\Delta u(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\Delta a_i\cos\frac{it}{m}+\sum_{i=1}^{\infty}\Delta b_i\sin\frac{it}{m} \tag{8.6.40}$$

将式(8.6.40)代入式(8.6.39)并应用谐波平衡法，积分后得

$$[\boldsymbol{k}(\boldsymbol{q},\Delta\boldsymbol{q},\boldsymbol{\lambda})]\Delta\boldsymbol{q}-[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q},\Delta\boldsymbol{q},\boldsymbol{\lambda})]\Delta\boldsymbol{\lambda}-\Delta\boldsymbol{f}\boldsymbol{F}+\boldsymbol{R}=\boldsymbol{0} \tag{8.6.41}$$

其中 $\Delta\boldsymbol{q}=[2\Delta a_0\quad\Delta a_1\quad\Delta a_2\quad\cdots\quad\Delta b_1\quad\Delta b_2\quad\cdots]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 的定义与式(8.6.38)中相同。$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{q},\Delta\boldsymbol{q},\boldsymbol{\lambda})$为导数矩阵，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q},\Delta\boldsymbol{q},\boldsymbol{\lambda})$为参数梯度矩阵，当 $\phi(\ddot{u},\dot{u},u,\lambda)$的形式给定时可明确解出。式(8.6.41)为应用增量谐波平衡法得到的结果。

设$|\Delta\boldsymbol{F}|$和$|\Delta\boldsymbol{\lambda}|$均为 $\boldsymbol{0}$，若$|\boldsymbol{q}|$为式(8.6.38)的精确解，则留数向量 $\boldsymbol{R}$ 消失且式(8.6.41)保证增量$|\Delta\boldsymbol{q}|$消失。若$|\boldsymbol{q}|$为式(8.6.38)的近似解，则由式(8.6.38)可求出 $\Delta\boldsymbol{R}$，由式(8.6.41)可求出$|\Delta\boldsymbol{q}|$。牛顿算法的特点决定了用$|\boldsymbol{q}+\Delta\boldsymbol{q}|$代替$|\boldsymbol{q}|$是一种比较好的近似。该过程可以重复进行，直到$|\boldsymbol{R}|$足够小，这样就得到系统的解。$|\boldsymbol{R}|$相当于牛顿算法的评价函数，$\boldsymbol{k}$ 相当于雅可比矩阵。上述过程称为牛顿迭代法，或简称迭代法。

设系统参数的变化幅度较小，$|\Delta\boldsymbol{F}|$和$|\Delta\boldsymbol{\lambda}|$均为 0，将上面得到的解作为近似值，经过一次迭代后得到增量解，这一过程称为一次论证。对系统参数和近似解进行相应的增量，通过迭代法可以获得新的系统参数下的解。交替运用论证和迭代可以研究系统参数。

实际上，增量并不限制于系统参数。任何一个 Fourier 系数都可以被指定进行增量，称为控制参数。系统参数间是相互依赖的，可由式(8.6.41)解出。

8.6.3　稳定性分析

得到系统的解后，就可以用 Floquet 理论分析解的稳定性。不稳定的解在物理上是观测不到的。当解受到 Δu 扰动后，方程为

$$\frac{\partial\phi}{\partial\ddot{u}}\Delta\ddot{u}+\frac{\partial\phi}{\partial\dot{u}}\Delta\dot{u}+\frac{\partial\phi}{\partial u}\Delta u=0 \tag{8.6.42}$$

该方程对 Δu 是线性的，但具有周期变化的系数。将式(8.6.42)改写为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=[B(t)]\boldsymbol{x} \tag{8.6.43}$$

其中 $\boldsymbol{x}=[\Delta\dot{u}\quad\Delta u]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-\dfrac{\partial\phi/\partial\dot{u}}{\partial\phi/\partial\ddot{u}} & -\dfrac{\partial\phi/\partial u}{\partial\phi/\partial\ddot{u}}\\ 1 & 0\end{bmatrix}$以 T 为周期。

方程(8.6.43)的稳定性由转换矩阵$[\boldsymbol{Q}]$的特征值决定。$\boldsymbol{Q}$ 将 $t=nT$ 时的状态向量 $\boldsymbol{x}_n$ 转

换为 $t=(n+1)T$ 时的 $\boldsymbol{x}_{n+1}$。如果两个特征值的绝对值都小于 1,则解是稳定的。任何由 Δu 引起的小扰动都将逐渐消失。$\boldsymbol{Q}$ 的显式见文献(Friedman,1977)。

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}=\prod_{i=1}^{n}\exp\left[\Delta t[B(\mathrm{i}\Delta t)]\right],\Delta t=T/N$$

其中 N 为分类的数目,特征值由 $\lambda_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\gamma}}{2}$ 给出,其中 $\beta=-(Q_{11}+Q_{22})$,$\gamma=Q_{11}Q_{22}-Q_{12}Q_{21}$。

复数特征值的模为 $\exp\left(-\int_0^T\left\{\dfrac{\partial\dot{p}/\partial u}{\partial\dot{p}/\partial\dot{u}}\right\}\mathrm{d}t\right)$。

对耗散系统,其复数特征值的模小于 1,特征值对应的解是稳定的。若系统具有大于 1 的正实特征根,则解将是不稳定的,此时式(8.6.43)出现一个额外的小解,其周期为 T,幅值单调无限增长,非线性的存在只是改变了平衡位置而已。若系统具有小于 -1 的负实特征根,则解也是不稳定的,此时式(8.6.43)出现一个额外的小解,其周期为 $2T$,幅值无限增长。非线性的存在不仅改变了平衡位置,而且是周期变为原来的 2 倍。因此,对于耗散系统,在过渡边界点上其特征值为 ±1。

对于可以消除瞬态现象的时间积分法来说,此时特征值与时间有关。若特征值的量级远远小于 1,则它将吸引附近的轨道;若特征值的量级远远大于 1,则它将排斥附近的轨道;若特征值的量级接近 1,则它的吸引力和排斥力都不足,此时过渡周期将会很长。在分岔点附近,特征值的模接近 1,时间积分法的速度会非常慢。

8.6.4 物理参数空间中的转迁集

物理参数空间内解的特性,诸如解的个数、类型、周期以及更重要的混沌解的存在性等问题一直备受人们关注。不同于逐点研究这个参数空间,本节构建系统的转迁集,并最终导出参数图。从参数图中可以直接研究并得到系统的分岔情况。对双参数系统,参数图是一个被转迁曲线按不同的本质特性划分为许多区域的平面。

这些将系统的解按本质不同进行区分的边界(转迁集)实际上是系统参数的额外约束。若对带有剩余项的增量形式施以上述约束,用以定义约束关系,并合并式(8.6.41),可以看到任一系统参数都是与其他系统参数相关联的。随着其他系统参数的变化,参数空间的边界就建立起来了。

当系统有特征值 -1 时,解由稳定变为不稳定,分支出一个新的稳定解,其周期为原来解的 2 倍。在分支点附近,新分支产生的亚谐成分较其他成分来说比重很小。在分岔点,计入分岔产生的额外亚谐成分,则导数矩阵 $\boldsymbol{k}$ 是奇异的。对小参数增量,将出现至少两个增量集。其中一个导致原来稳定现在不稳定的那个分支,另一个导致新产生的稳定分支。

在构建稳定亚谐解时,应展开原始解,此时额外的亚谐系数为 0。原始解被用作初始的近似值,某一个亚谐系数被作为主动参数。在构建分岔边界时,其中一个亚谐系数保持不为

0 的小量以避免迭代过程中出现奇异梯度矩阵。

当解越过转迁集时，解会变得不稳定。此时有些参数达到极值。这种情况下，参数的任何有限的变化都将导致系统幅值的大幅变化。此时导数矩阵 $\boldsymbol{k}$ 是奇异的，其行列式为 0。这一性质可用于式(8.6.41)解出未知的 Fourier 增量，并求出一个系统参数增量。附加方程为

$$\det[\boldsymbol{k}(q,\lambda)] = \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{0} \tag{8.6.44}$$

其增量形式可写为

$$\{\Delta q\}^{\mathrm{T}}\{\partial\delta/\partial q\} + \{\Delta\lambda\}^{\mathrm{T}}\{\partial\delta/\partial\lambda\} + \delta = \boldsymbol{0} \tag{8.6.45}$$

增量系数$\{\partial\delta/\partial q\}$，$\{\partial\delta/\partial\lambda\}$可如下求得。不失一般性，设矩阵 $\boldsymbol{D}(\lambda)$只依赖于参数 λ，且可分解为低阶的三角阵 $\boldsymbol{L}$(其对角线上元素均为 1)和高阶三角阵 $\boldsymbol{U}$，则

$$\boldsymbol{D}(\lambda) = \boldsymbol{L}(\lambda)\boldsymbol{U}(\lambda) \tag{8.6.46}$$

其中元素 U_{ij}和L_{ij}如下：

$$U_{ij} = D_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}U_{kj}(j \geqslant i),\ L_{ij} = \left(D_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik}U_{kj}\right)\Big/U_{jj}(j < i)$$

其行列式为

$$\delta = \prod U_{ii} \tag{8.6.47}$$

将式(8.6.46)对 λ 求导，得

$$\boldsymbol{D}'(\lambda) = \boldsymbol{L}'(\lambda)\boldsymbol{U}(\lambda) + \boldsymbol{L}(\lambda)\boldsymbol{U}'(\lambda) \tag{8.6.48}$$

其中元素U'_{ij}和L'_{ij}如下：

$$U'_{ij} = \left(D'_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L'_{ik}U_{kj} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}U'_{kj}\right) \quad (j \geqslant i)$$

$$L'_{ij} = \left(D'_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L'_{ik}U_{kj} - \sum_{k=1}^{j} L_{ik}U'_{kj}\right)\Big/U_{jj} \quad (i < j)$$

行列式的导数

$$\delta' = \partial\delta/\partial\lambda = \sum_{i} U'_{ii}\prod_{j\neq i} U_{jj}$$

对多参数系统，$\{\partial\delta/\partial q\}$和$\{\partial\delta/\partial\lambda\}$可类似求出，因为矩阵 $\boldsymbol{k}$ 的相应导数可以相应求出。

第9章 混沌控制

由于混沌运动的不确定性，多数情况下人们希望避免混沌运动的发生，因此混沌控制主要集中于消除和抑制混沌现象。从理论上说，通过对动力系统的参数和结构的改变和控制，可以影响混沌发生的条件，从而消除或抑制混沌现象。例如：采用动力吸振器可以消除简谐激励下的杜芬振子的混沌运动；应用经典的随机最优控制技术，可以抑制洛伦兹系统中的混沌现象；当系统中同时存在着周期运动和混沌运动时，可以采用迁移和输送控制实现周期运动和混沌运动之间的切换，等等。然而，这些控制方法都未能利用混沌系统的内在动力学特性，因此在实现中往往要对原系统进行较大的修改或输入较大的控制能量。为解决这一问题，1990 年美国物理学家 Ott，Grebogi 和 Yorke 提出了著名的 OGY 方法，成为混沌控制的里程碑。此后，许多学者对该策略进行了改进和推广，并用多种实验证实其有效性，掀起了混沌控制乃至利用混沌的研究热潮。至今，已经诞生了十余种混沌控制方法，本章将介绍其中主要的几种。

9.1 OGY 方法

对于 Smale 马蹄意义下的混沌吸引子，其中稠密地嵌有无限多不稳定周期运动，而混沌运动可以各态历经地接近这些不稳定运动。利用这一性质，1990 年美国马里兰大学物理学家 Ott，Grebogi 和 Yorke 提出一种利用混沌系统的内在动力学特性的控制策略，后人称之为 OGY 方法。该方法仅需对系统的某一控制参数作时变小摄动，就可以将系统的混沌运动稳定到指定的周期运动上。

OGY 方法的基本思想是：先用相空间重构方法确定混沌吸引子中嵌入的各种不稳定周期运动，选择其中之一作为控制目标，等待混沌运动游荡到该周期运动附近时，对系统某一控制参数进行时变小摄动，将混沌运动稳定到指定的周期运动上。

对于连续自治系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{p}) \tag{9.1.1}$$

其中 $\boldsymbol{p}$ 为控制参数，满足 $\bar{\boldsymbol{p}}-\Delta\boldsymbol{p}<\boldsymbol{p}<\bar{\boldsymbol{p}}+\Delta\boldsymbol{p}$，$\Delta\boldsymbol{p}$ 为允许扰动的最大值，$\boldsymbol{p}=\bar{\boldsymbol{p}}$ 时系统呈混沌性态。借助庞加莱截面，将系统(9.1.1)转化为含控制参数 p_k 的离散动力系统

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{u}_{k+1}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{p}_k)\\&\boldsymbol{u}_k\in\mathbf{R}^n,\\&\boldsymbol{p}_k\in\mathbf{R}^l\quad(k=0,1,2,\cdots)\end{aligned}\right\} \tag{9.1.2}$$

系统(9.1.2)实际上是一个庞加莱映射。控制参数 $p_k=\bar{p}$ 时该映射呈混沌性态,其混沌吸引子中稠密地嵌有任意周期的鞍型不动点,即原系统的不稳定周期运动。

OGY 方法可分为以下两个步骤。

①确定控制目标。根据需要选择其中某一不动点 $u_F(\bar{p})$为控制目标,且不妨设其仅有一维不稳定流形 $W^u(u_F(\bar{p}))$。此外,还需在不动点 $u_F(\bar{p})$处指定一邻域,以便对进入该邻域的映射点进行控制。

②确定控制策略。一旦映射点 u_k 游荡到指定的邻域内,就可以通过控制参数 p_k 的摄动,将 u_k 稳定到 $u_F(\bar{p})$上。最常见的实现方案是通过改变控制参数 p_k,使映射点 u_k 落到不动点 $u_F(\bar{p})$的稳定流形 $W^s(u_F(\bar{p}))$上,从而使后继映射点沿着 $W^s(u_F(\bar{p}))$趋于 $u_F(\bar{p})$。如图 9-1 所示,不动点 $u_F(\bar{p})$具有一维不稳定流形 $W^u(u_F(\bar{p}))$和二维稳定流形 $W^s(u_F(\bar{p}))$,实施控制后,映射点 u_k 落到与 $W^s(u_F(\bar{p}))$相切的平面上,然后随着后继映射,逐渐沿着 $W^s u_F(\bar{p})$趋于 $u_F(\bar{p})$。

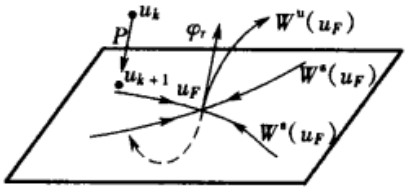


图 9-1 OGY 控制策略示意图

为确定参数摄动量 $p_k-\bar{p}$,将映射在不动点 $u_F(\bar{p})$和参数 $\bar{p}$ 附近线性展开,即

$$u_{k+1}=P(u_k,p_k)=u_F(\bar{p})+A(u_k-u_F(\bar{p}))+b(p_k-\bar{p}) \tag{9.1.3}$$

其中 $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$和$b\in\mathbf{R}^n$ 分别为映射在$(u_F(\bar{p}),\bar{p})$处关于 u_k 的雅可比矩阵和关于p_k 的偏导数向量。求解 A 的特征值,设其特征值 λ_r 满足$|\lambda_r|>1$,相应的左特征向量为 φ_r,则 φ_r 与其他特征值的右特征向量正交,而这些右特征向量是稳定流形 $W^s(u_F(\bar{p}))$的切向量,故只需令

$$\varphi_r^{\mathrm{T}}[u_{k+1}-u_F(\bar{p})]=0$$

即可使映射点 u_{k+1}落到稳定流形 $W^s(u_F(\bar{p}))$附近。由此解出

$$p_k=\bar{p}+\frac{\lambda_r\varphi_r^{\mathrm{T}}[u_k-u_F(\bar{p})]}{\varphi_r^{\mathrm{T}}b} \tag{9.1.4}$$

经过几次重复映射,映射点便趋于 $u_F(\bar{p})$,而此时 $p_k=\bar{p}$。

通过上述过程,可以看到 OGY 方法有以下几个主要优点:

①可选择混沌吸引子中嵌入的任意周期运动作为控制目标,改善系统特性;

②无须预先知道所研究系统的动力学模型,庞加莱映射可由实验测量得到的时间序列通过延迟坐标获得;

③每次映射迭代所需的计算量很小;

④控制目标嵌入在当前的混沌运动中,所需的控制参数摄动量 $p_k-\bar{p}$ 很小;

⑤无须精确估算所需的不动点的性质,只需粗估即可,适用于特征值和特征矢量测量不精确的情况;

⑥在延迟坐标下达到控制后，嵌套在混沌吸引子中的不稳定轨道只有微小的变化；

⑦适用于离散动力系统和可用庞加莱映射表征的连续动力系统。

OGY 方法提出不久，该校学者 Ditto，Rouseo，Spano 等人成功地利用正弦交变磁场实现了控制磁弹性重力屈曲梁的混沌响应实验，从而从试验上验证了 OGY 方法的有效性。他们基于实验数据重构短周期运动，然后拟合出控制所需的局部线性化映射，以磁场强度的直流分量作为控制参数，在 0.796 A/m 的最大可调范围内，将混沌运动稳定在周期运动上长达 20 万个周期。此后，又有不少实验支持了 OGY 方法。

9.2 OGY 方法的改进和推广

OGY 方法的精髓是选择混沌吸引子中嵌入的各种不稳定周期运动为控制目标，等待混沌运动游荡到该周期运动附近时，通过线性控制将混沌运动稳定到指定的周期运动上。后来的学者们基于这一思想，对 OGY 方法进行了改进和推广。OGY 方法有多种改进方法，本节介绍最常用的极点配置法。

1992 年，美国学者 Romeiras 等人根据控制论中的极点配置方法对 OGY 策略中控制参数摄动量的确定作了推广。针对控制参数 $\boldsymbol{p}_k$，引入控制强度为待定向量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的线性反馈，即

$$\boldsymbol{p}_k - \bar{\boldsymbol{p}} = -\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}_F(\bar{\boldsymbol{p}})), \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{R}^n$$

改写线性化映射为

$$\boldsymbol{u}_{k+1} - \boldsymbol{u}_F(\bar{\boldsymbol{p}}) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}})[\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}_F(\bar{\boldsymbol{p}})] \tag{9.2.1}$$

在满足可控性前提下，可借助线性控制论中的极点配置公式确定向量 $\boldsymbol{\sigma}$，使得矩阵 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}$ 的全部特征值位于单位圆内，从而使后续映射点 $\boldsymbol{u}_{k+1}$ 趋于不动点 $\boldsymbol{u}_F(\bar{\boldsymbol{p}})$。

可以证明，OGY 方法要求后续映射点沿稳定流形趋于不动点，是一种控制时间最优的特殊极点配置。放弃这一要求后可允许 A 有复特征值，控制的实现也更加灵活。

下面以 Henon 映射为例，说明 OGY 方法的控制效果。

Henon 映射是法国学者 Henon 于 1964 年提出的映射，其形式为

$$f(u) = f(x,y): \begin{cases} x \to 1 + by - ax^2 \\ y \to x \end{cases} \tag{9.2.2}$$

当 $a = 1.4$，$b = 0.3$ 时，该映射有两个不动点：$P_1 = (0.883\ 9, 0.883\ 9)$，$P_2 = (-1.583\ 9, -1.583\ 9)$。将映射 f 作用于 P_1 附近的任意点 P 形成映射序列 $f^k(P)(k = 1,2,3,\cdots)$，得到游荡点集 A。该点集具有 Smale 马蹄映射不变集的基本性质和吸引性，是一混沌吸引子。该混沌吸引子内包含一个不稳定鞍型不动点，为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = K(a)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K(a) \\ K(a) \end{bmatrix}$$

其中 $K(a) = -c + \sqrt{a + c^2}$，$c = \frac{1}{2}(1 - b)$，并要求 $a + c^2 \geqslant 0$。系统(9.2.2)的雅可比矩阵为

$$Df(u)=\begin{bmatrix}-2x & b\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

不动点的稳定性由下式决定：

$$|\lambda I - Df(u)| = 0$$

易证，对于 $-c^2 \leqslant a \leqslant 3c^2$，不动点是稳定的；对于 $a \geqslant 3c^2$，不动点是不稳定的。因此，当 $a = a_0 = 1.4, b = 0.3$ 时，$c = 0.35$，$a \geqslant 3c^2$，故不动点是不稳定的。我们的任务就是将它控制为稳定的。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2K(a) & b\\ 1 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=[B\ \vdots\ AB]=\begin{bmatrix}1 & -2K(a)\\0 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}2K(a) & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}=[\alpha_1-\beta_1 \quad \alpha_2-\beta_2]$$

其中 $\beta_1 = -(\lambda_u + \lambda_s) = 2K(a)$，$\beta_2 = \lambda_u\lambda_s = -b$，$\lambda_u$、$\lambda_s$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$A_u > 0, \lambda_s < 0$；$\alpha_1 = -(\mu_1 + \mu_2)$，$\alpha_2 = \mu_1\mu_2$，$\mu_1$、$\mu_2$ 为矩阵 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B\sigma}^{\mathrm{T}}$ 的特征值，即调节器极点。

为了对调节器极点 μ_1、μ_2 进行配置，以 (α_1, α_2) 为轴绘出极点配置图，如图 9-2 所示。图中临界稳定线 $\mu_1 = \pm 1$（即 $1 \pm \alpha_1 + \alpha_2 = 0$）和 $\mu_1\mu_2 = 1$（即 $\alpha_2 = 1$）这三条线围成了可稳定控制的三角形区域。此外，图中还给出了轴 $(k_1, k_2) = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}$（如虚线所示），其原点 O' 在 (α_1, α_2) 平面上的坐标为 (β_1, β_2)。可见坐标系 (α_1, α_2) 与 (k_1, k_2) 的关系为：$k_1 = \alpha_1 - \beta_1$，$k_2 = \alpha_2 - \beta_2$。因此，对于选定的调节器极点 μ_1、μ_2，对应图中点 $Q(-(\mu_1 + \mu_2), \mu_1\mu_2)$，而所求的控制向量 $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} = [\alpha_1 - \beta_1 \quad \alpha_2 - \beta_2]$ 即为连接点 Q 与点 O' 的线段。只要极点在单位圆内，就能满足控制要求。

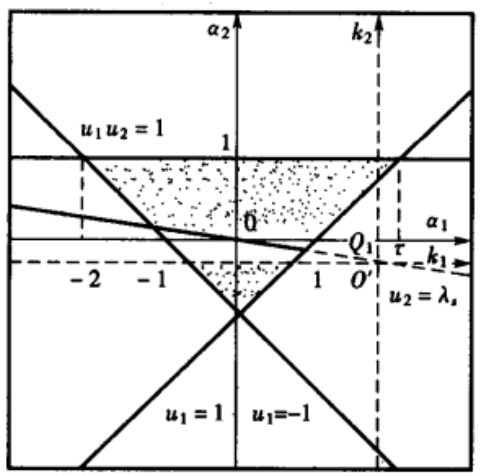


图 9-2 Henon 映射中调节器极点的选择范围

在对 Henon 映射运用极点配置方法进行混沌控制时，选取参数 a 为随映射次数 k 变化的控制参数 p_k。对 $1 < k < 500$，保持 $p_k = 1.4$，映射序列呈混沌状态。当 $501 < k < 1\,000$ 时，启动控制，使混沌状态稳定到周期 1 不动点 $P_1 = (0.883\,9, 0.883\,9)$ 上，随后关闭控制，映射序列再次呈混沌状态，当 $1\,501 < k < 2\,000$ 时，再启动控制，使混沌状态稳定到周期 2 不动点 $P_2 = (-1.583\,9, -1.583\,9)$ 上。整个控制过程中映射点坐标 u_{1k} 和控制参数 p_k 的变化如图 9-3 所示。

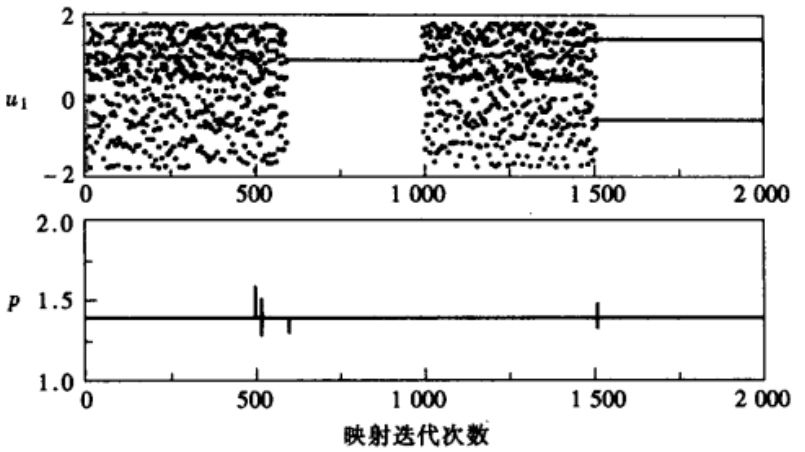


图 9－3 Henon 映射的混沌控制

9.3 参数自调节控制方法

参数自调节控制属于自适应控制。仍考虑映射所确定的动力系统，通常将参数自调节控制问题表述为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_{k+1} &= \boldsymbol{P}(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{p}_k) \\ \boldsymbol{p}_{k+1} &= \boldsymbol{p}_k + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}_F(\bar{\boldsymbol{p}})) \end{aligned} \tag{9.3.1}$$

其中向量函数 $\boldsymbol{g}(\cdot)$描述控制参数 $\boldsymbol{p}_{k+1}$随系统状态 $\boldsymbol{u}_k$ 偏离目标状态 $\boldsymbol{u}_F(\bar{\boldsymbol{p}})$的误差而自调节的规律，最常用的是线性自调节规律

$$\boldsymbol{p}_{k+1} = \boldsymbol{p}_k - \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}_F(\bar{\boldsymbol{p}})) \tag{9.3.2}$$

显然，正确设计控制强度向量 $\boldsymbol{\sigma}$ 是控制成败的关键。对于一维映射的渐近稳定不动点 $\boldsymbol{u}_F(\bar{\boldsymbol{p}})$，在充分小的 $\boldsymbol{\sigma}$ 下受控映射可渐近稳定地趋于 $\boldsymbol{u}_F(\bar{\boldsymbol{p}})$。但该结论并不适用于高维映射。此外，作为目标的不动点 $\boldsymbol{u}_F(\bar{\boldsymbol{p}})$可能稳定也可能不稳定。参数自调节控制将混沌运动控制到不稳定不动点的能力非常有限。以一维映射为例，它只有在线性化映射的特征值 $\lambda \in (-3,1)$时有效，且控制强度向量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的取值范围很窄。

若将参数自调节控制律改为

$$\boldsymbol{p}_{k+1} = \boldsymbol{p}_k - \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}_F(\bar{\boldsymbol{p}})) - \varepsilon(\boldsymbol{p}_k - \bar{\boldsymbol{p}}) \tag{9.3.3}$$

将映射(9.3.1)第一式在$(\boldsymbol{u}_F(\bar{\boldsymbol{p}}), \bar{\boldsymbol{p}})$附近线性化，连同上述控制律合写为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_{k+1} - \boldsymbol{u}_F(\bar{\boldsymbol{p}}) \\ \boldsymbol{p}_{k+1} - \bar{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} & -\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}_F(\bar{\boldsymbol{p}}) \\ \boldsymbol{p}_k - \bar{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{L} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}_F(\bar{\boldsymbol{p}}) \\ \boldsymbol{p}_k - \bar{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} & -\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \quad \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \bar{\boldsymbol{A}} - \bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{T}}$$

与式(9.2.1)对照可知，$\bar{\sigma}$ 的选取是一个扩张维数的线性映射极点配置问题。因此，可以选择 $\bar{\sigma}$ 使矩阵 $\boldsymbol{L}$ 的特征值均位于单位圆内，从而使后续映射点 $\boldsymbol{u}_{k+1}$ 趋于不动点 $\boldsymbol{u}_F(\bar{p})$。

这提供了一种设计高维映射控制强度的方法，且不必考虑原映射不动点的稳定性。这种参数自调节规律相当于放松了式(8.1.8)对 $\varepsilon = 1$ 的约束，给极点配置带来了灵活性。仍以具有特征值 λ 的一维映射为例，为使受控映射渐近稳定，取 $\varepsilon = -\lambda$ 可保证对任意的 λ 均存在等宽度的 σ 取值范围。

下面以受迫杜芬系统为例来说明该方法的控制。考虑激励幅值 p 可控的受迫杜芬系统

$$\ddot{u}(t) + 0.1\dot{u}(t) + u^3(t) = p\cos t$$

通过对系统状态在整倍激励周期时刻的采样，系统动力学可由一含有控制参数 p 的二维 Poincare 映射来描述。

先对初始静止的系统施加定常幅值 $p = 4.5$ 的简谐激励，100 个激励周期后系统运动被吸引到稳定的 $P-1$ 轨道上。在此后的 100 个激励周期中，将激励幅值阶跃扰动为 $p = 7.5$，使系统进入混沌运动。然后将受控系统极点配置在 -0.1、0.0 和 0.0，启动控制策略将系统状态引导回原来的稳定 $P-1$ 轨道。图 9-4 给出了控制策略式(9.3.2)和式(9.3.3)的控制效果。由图 9-4 可知，后者的镇定混沌的速度明显比前者要快得多。

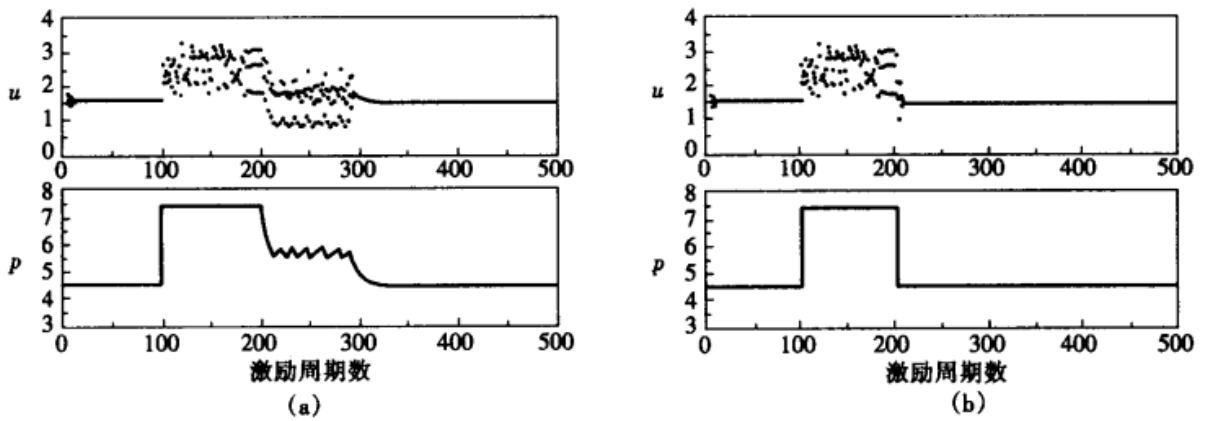


图 9-4　杜芬系统的参数自调节控制

(a)控制策略(式(9.3.2))；(b)控制策略(式(9.3.3))

9.4　实现控制的关键问题

9.4.1　基于延迟坐标的控制策略

上述控制策略能否实现的关键之一是其对测控硬件的要求。在实验中构造 Poincare 截面并非易事，对高维系统，需要大量的传感器和采样通道。一种简化方案是根据嵌入定理用

系统状态 $\boldsymbol{u}(t)$的标量观测函数 $f(\boldsymbol{u}(t))$构造 m 维延迟坐标向量

$$\boldsymbol{w}=[f(\boldsymbol{u}(t)) \quad f(\boldsymbol{u}(t+\tau)) \quad f(\boldsymbol{u}(t+2\tau)) \quad \cdots \quad f(\boldsymbol{u}(t+(m-1)\tau))]^{\mathrm{T}} \tag{9.4.1}$$

如果混沌吸引子落入一 n 维流形,则当 $m=2n+1$ 时,$w(t)$就可以完整描述混沌吸引子。因此,实验中仅需一个传感器和单个采样通道。对于混沌控制所关心的吸引子局部嵌入特性,只需取 $m=n$,而取延时 τ 使采样序列的自相关首次取极小值。

德国学者 Dressler 等人首先认识到:若控制参数时变,则延迟坐标向量 $\boldsymbol{w}(t)$依赖于控制参数在时间段$(t,t+(n-1)\tau)$内的变化。以受周期为 T 的激励的系统为例,取 Poincare 截面为固定激励相位下的状态子空间,并记 l 为满足$(n-1)\tau \leqslant lT$ 的最小整数,则映射式(9.1.2)在延迟坐标向量 $\boldsymbol{w}(t)$下形如

$$\boldsymbol{w}_{k+1}=Q[w_k \quad p_k \quad p_{k-1} \quad \cdots \quad p_{k-l}] \tag{9.4.2}$$

为了基于延迟坐标进行混沌控制,需根据映射式(9.4.1)对控制策略作少许修改。方法之一是采用扩阶状态向量代替原状态向量,即

$$\bar{\boldsymbol{w}}_k=[w_k \quad p_k \quad p_{k-1} \quad \cdots \quad p_{k-l}]^{\mathrm{T}}$$

这可使上述控制策略保持形式不变。Dressler 等研究了当 $l=1$ 时基于延迟坐标的 OGY 方法,根据映射式(9.4.2)建立了两种控制策略。经数值仿真发现,用基于延迟坐标的映射来控制混沌时,计入控制参数的变化历史尤为重要。

9.4.2 过渡过程

控制混沌成功的一个重要指标是过渡过程的长短,即从等待控制时机到将混沌运动完全稳定到目标运动上所需要的时间。以 OGY 方法所需的过渡时间 $\hat{t}$ 为例,它由两部分组成。一是等待映射点游荡到不动点邻域中所需时间 $\hat{t}_1$,二是控制启动后到周期运动稳定所需时间 $\hat{t}_2$。通常,所需时间 $\hat{t}_2 \ll \hat{t}_1$。等待时间 $\hat{t}_1$ 与不动点邻域的半径 δ 及映射的信息维数 D 呈指数关系,即

$$\hat{t}_1 \propto \delta^{-D}$$

因此,实验中应取足够大的 δ 来缩短等待时间。当然,过大的 δ 会降低局部线性化映射的有效性,导致控制失败。

美国学者 Shinbrot 等人根据混沌运动以指数速率发散的特点,提出了一种对控制参数不摄动来实现映射点快速转迁的方法。其思路是:将映射式(9.1.2)关于系统状态和控制参数线性展开,获得 Poincare 截面上的微线段 S,将 S 映射 n_1 次使其像 S'大约有单位长度;目标映射点所在邻域 V 逆映射 n_2 次使其像 V'首次与 S'相交;根据 S'上距 V'中心最近的点可确定微线段 S 上对应的原像,从而得知所需的控制参数摄动量。这样,等待时间减至

$$\hat{t}_1 \propto -\ln(\delta)$$

数值仿真表明,原需 6 062 次迭代方可获得的 Henon 映射点转迁,用这种方法只需 12 次迭代即可实现,而 4 维映射的迭代次数可由 10^{11} 次降为 35 次。这种快速转迁已成为利用混

沌的技术,对于实现力学系统的运动快速控制很有意义。

9.5 神经网络控制方法

现代人类对于外部世界的认识已经达到了令人惊叹的程度:宏观,远及宇宙;微观,深入生命科学本身。所有这些科学成就,无一不是人类动用智慧和思维对客观世界中的信息进行加工的结果。人工神经网络(ANN)作为人脑生物神经系统的模拟,20 世纪自 80 年代以来,引起了国内外科技工作者的普遍关注并掀起了一股研究热潮。我国神经网络的研究正从理论研讨走向应用开发。神经网络具有并行处理、非线性、容错性和自适应、自学习的特点,将在各行各业显示其强大的生命力和广阔的应用前景。

9.5.1 神经网络的发展历史

从人脑的生理结构出发来研究人的智能行为,模拟人脑信息处理过程,即人工神经网络的研究,经历了一条曲折的道路,大致分为兴起、萧条和兴盛三个时期。

早在 1943 年,心理学家 Mcculloch 和数学家 Pitts 在数学生物物理学会刊 Bulletin of Mathematical Biophysics 上发表文章,总结了生物神经元的一些基本生理特征,提出了形式神经元的数学描述与结构方法,即 M-P 模型。该模型的提出兴起了对神经网络的研究。

1949 年心理学家 D.O.Hebb 提出了神经元之间突触联系强度可变的假设,认为学习过程是在突触上发生的,突触的联系强度随其前后神经元的活动而变化。根据这一假设提出的学习率为神经网络的学习算法奠定了基础。

20 世纪 50 年代末,Rossenblatt 提出了感知机,第一次把神经网络的研究付诸工程实践。这是一种学习和自组织的心理学模型,基本上符合神经生物学的知识,模型的学习环境是有噪声的,网络构造中存在随机连接,这符合动物学习的自然环境,但是这种模型过于简单,以后碰到了理论上和实现技术上的困难,加上其他因素的影响,使得对神经网络的研究进入了低潮。

60 年代,美国著名人工智能学者 Minsky 和 Papert 对 Rosenblatt 的工作进行了深入的研究,写了很有影响的《感知机》一书,指出感知机处理能力有限,甚至连 XOR 这样的问题也不能解决,并指出如果引入隐含神经元,增加神经网络的层次,可提高神经网络的处理能力。

到了 80 年代中期,神经网络的研究进入了"柳暗花明又一村"的新境界,一个竞相研究神经网络和设计构造神经计算机的热潮在世界范围内掀起。产生这种转折变化的一个重要原因,是美国加州理工学院生物物理学家霍普菲尔德采用全互连型神经网络模型,利用所定义的计算能量函数,成功地求解了计算复杂度为 NP 完全型的旅行商问题。这项突破性的进展引起了广大学者对神经网络潜在能力的高度重视,从而掀起了研究神经网络信息处理方法和研制神经计算机的热潮。

经过半个世纪的研究探索,人们开始懂得,人工智能的发展,与对人脑机理的研究和认

识学科的发展密不可分，因而出现包括人工智能(artificial intelligence)、脑模型(brian model)和认知科学(cognitive science)的所谓 ABC 理论。

9.5.2 神经网络简介

一个神经细胞的构造如图 9-5 所示，主要包括细胞体、树突、轴突和细胞之间相互关联的突触。

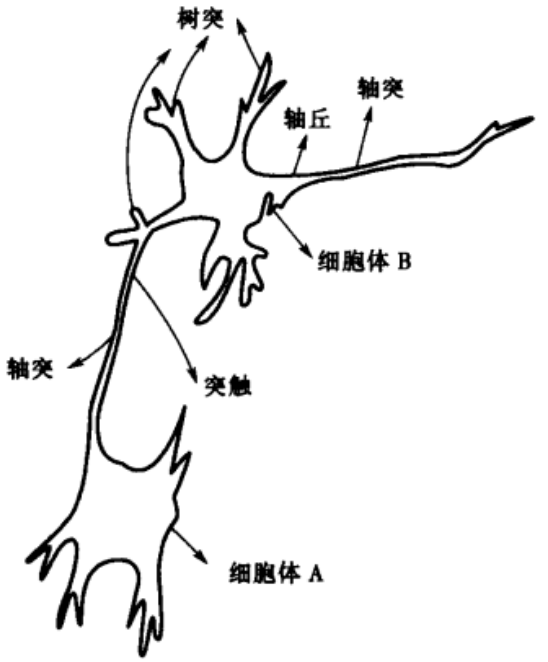


图 9-5 神经细胞构造图

细胞体是由细胞核、细胞浆、细胞膜等组成。在高等动物的神经细胞中，除了特殊的无“轴突”神经元外，一般每个神经元都由胞体的轴丘处发出一根粗细均匀、表面光滑的突起，长度从几微米到 1 m 左右，称为轴突。它的功能是传出从细胞体来的信息。树突为细胞体向外伸出的很多其他突起，它们像树枝一样向四处分散开来，在细胞体附近比轴突粗得多，但离开细胞体不远马上就很快分支变细，形成无数粗细不等的树突。它们的作用是向四方收集由其他神经细胞来的信息。信息流是从树突出发，经过细胞体，然后由轴突输出。突触是两个细胞之间连接的基本单元，主要有：一个神经细胞的轴突与另一个神经细胞的树突发生接触；一个神经细胞的轴突与另一个神经细胞的胞体接触。人工神经网络是采用物理可实现的器件或采用现有的计算机来模拟生物体中神经网络的某些结构与功能，并反过来用于工程或其他领域。

图 9-6 是一个人工神经网络的示意图。图中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表示其他神经元的轴突输出，$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ 为其他 n 个神经元与第 i 个神经元的突触连接。其符号的正负分别表示为兴奋性突触和抑制性突触；其数值的大小表示突触的不同的化学变化情况。

每个人工神经元满足：

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_j x_j - \theta_i \tag{9.5.1}$$

$$u_i = g(s_i) \tag{9.5.2}$$

$$y_i = f(u_i) \tag{9.5.3}$$

其中式(9.5.1)表示神经元 i 突触后电位的累加值，θ_i 为阈值。式(9.5.2)中，u_i 为细胞 i 的状态。式(9.5.3)中，y_i 为神经元 i 的输出。

人工神经网络是对生物神经系统的模拟，其信息处理功能是由网络的单元(神经元)的

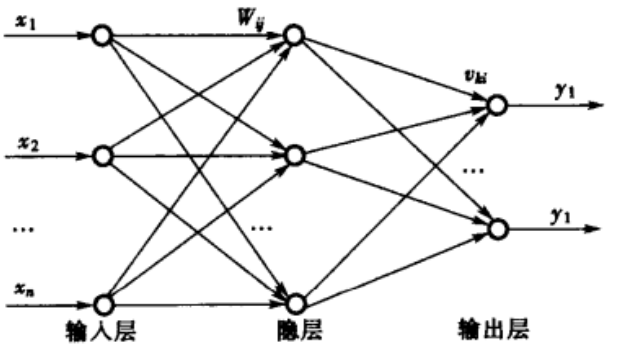


图 9-6 人工神经网络示意图

输入输出特性(激活特性)、网络的拓扑结构(神经元的连接方式)、连接权的大小(突触联系强度)和神经元的阈值(可视作特殊的连接权)所决定的。按突触修正假说,神经网络在拓扑结构固定时,其学习归结为连接权的变化。

下面比较一下传统的计算机和人工神经网络对问题求解的方式。传统计算机需要人将解题的步骤进行编程并输入,最后由计算机一步一步地得到问题的解;相反地,人工神经网络可以经过训练来解答问题。换句话说,神经网络给自身编程去求解问题。神经网络是一个由大量简单神经元连接而成的复杂的网络,这样一个网络可以由硬件或者软件实现。神经网络的训练(学习)由图 9-7 示意。训练一个神经网络包括用一系列的输入例子和理想输出作为训练样本,根据一定的训练算法对网络进行足够的训练,使得神经网络能够学会包含在解中(样本的理想输出)的基本原理。当训练完成以后,该解(由训练所确定的网络)可以用来求解相同的问题。

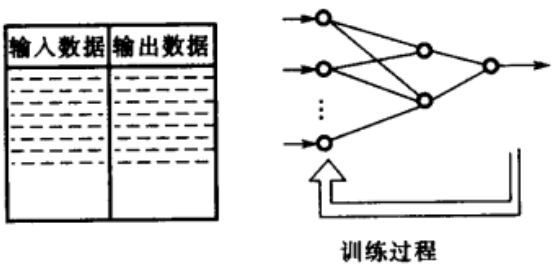


图 9-7 神经网络的训练过程

9.5.3 多层感知器网络

多层感知器如图 9-8 所示。输入层与输出层之间存在一些隐层。输入节点为 n 个,即 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,第一隐层有 n_1 个神经元,其对应的输出为 $h_1, h_2, \cdots, h_{n_1}$,第二隐层 n_2 个神经元,其对应的神经元输出为 $c_1, c_2, \cdots, c_{n_2}$;输出为 n_3 个节点,其对应的神经元 $y_1, y_2, \cdots, y_{n_3}$。它们以前馈方式连接,其输入输出关系式为

$$\left.\begin{aligned} h_j &= f\Big(\sum_{i=1}^{n_1}\omega_{ij}x_i-\theta_j\Big) \quad (j=1,2,\cdots,n_1)\\ c_k &= g\Big(\sum_{j=1}^{n_2}v_{jk}h_j-\theta_k\Big) \quad (k=1,2,\cdots,n_2)\\ y_l &= o\Big(\sum_{l=1}^{n_3}\omega_{kl}c_l-\theta_l\Big) \quad (l=1,2,\cdots,n_3) \end{aligned}\right\} \tag{9.5.4}$$

在式(9.5.4)中，h_j 为第一隐层第 j 个单元的输出，ω_{ij} 为输入层第 i 个节点与第一隐层第 j 个单元之间的连接权，θ_j 为第一隐层第 j 个单元的阈值。同理，c_k 为第二隐层第 k 个单元的输出，θ_k 为其对应的阈值，v_{jk} 是第一隐层第 j 个单元与第二隐层第 k 个单元的连接权；y_l 为输出层第 l 个单元的输出，ω_{kl} 是第二隐层第 j 个单元与输出层第 l 个节点之间的连接权，θ_l 为相对应的阈值。f、g、o 分别为各层变换函数。

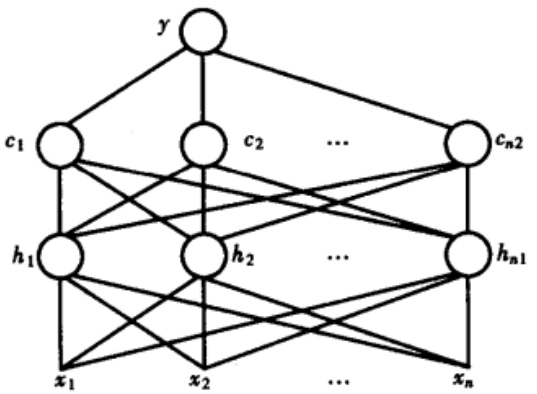


图 9-8 多层感知器网络

如何设计多层感知器隐层单元的个数，这里给出隐层单元数的上下限，以供设计时参考。在式(9.5.4)中，令隐单元输出 $h_j=\operatorname{sgn}\Big(\sum_{i=1}^{n}\omega_{ij}x_i-\theta_j\Big)$ 是一个线性阈值分割函数，每个隐单元把 n 维输入空间 s 划为 s_A 和 s_B 两个部分。设 g 是定义在 s 空间的一个函数，对于感知器网络对应的 k 个样本输入，希望其满足：

$$y_l=\operatorname{sgn}\Big(\sum h_j\omega_j^*-\theta^*\Big)=g(x_l) \quad (l=1,2,\cdots,k) \tag{9.5.5}$$

问题是能否找到隐单元数 n_1，通过调整输出单元的系数 ω_j^*、θ^*，使上式满足条件，即可实现任何一个 g 函数的映射。

在一个输入空间 s 上，存在有 k 个样本，如果需要用 n_1 个超平面划分为 d 个区域，使 $d>k$，并保证每个区域对应于一个样本，则最大的隐单元数 n_1 应满足 $n_1=k-1$，其中 k 为输入样本数。

隐单元数为 $k-1$ 时，设计网络的上限，因为 $k-1$ 超平面是不相交的，因此只可分为 k 个区域，但考虑到超平面可交且只有一个隐层的情况下，输入为 n 个单元，n_1 个隐单元可把输入空间划分成一定数目的区域，如果这个区域是封闭的，则称之为闭区域。在数学上可得到独立区域数为

$$p(n_1,n)=\sum_{i=0}^{n}\begin{bmatrix}n_1\\ i\end{bmatrix}\quad (n_1\geqslant i) \tag{9.5.6}$$

其中

$$\begin{bmatrix}n_1\\ i\end{bmatrix}=0\quad (n_1<i)$$

那么，对 k 个样本进行线性分割则要求：

$$n_1=\min\left[p(n_1,n)\right]\geqslant k \tag{9.5.7}$$

式(9.5.7)给出了隐单元数的下限，即使得 $p(n_1,n)$ 为最小($p(n_1,n)$ 应大于样本数)时的 n_1 值。

9.5.4 神经网络学习机理

人工神经网络是对生物神经系统的模拟。其信息处理功能是由网络的单元(神经元)的输入输出特性(激活特性)和网络的拓扑结构(神经元的连接方式)所决定的。按突触修正假说，神经网络在拓扑结构固定时，其学习归结为连接权的变化。

到目前为止，已经出现许多神经网络模型及相应的学习算法。对学习算法的分类也有多种，如联想式与非联想式学习，以区别来自环境刺激模式的多少；监督与非监督学习，以区别学习时有无教师示教；以网络连接形式(阶层还是相互连接)的学习分类。在人工神经网络中，权是一个反应信息存贮的关键量，在结构和转换函数确定之后，如何设计权使网络达到一定的要求，这是人工神经网络必不可少的部分。大多数神经网络权的设计是通过学习得到的，目前可分为以下几种。

①死记式学习。网络的权是事先设计好的，只是固定的。如 Hopfield 网络在做优化时，权可根据优化的目标函数和约束条件来设计，一旦设计好了就不能变动。

②δ 学习率。这种方法是用已知例子作为教师对网络进行学习，称为 δ 学习率。其规则是通过神经网络理想输出和实际输出之间的误差来修正网络的权，在很多神经网络中，都采用了这种 δ 学习率。

③自组织的学习和 Heddian 学习率。两个神经元之间的连接权，正比于两个神经元的活动值，如 v_i、v_j 表示两个神经元的输出值，则它们之间的权的变化为 $\Delta\omega_{ij}=\eta v_i v_j$，这里 η 为步长或常数。

④相近学习。设 ω_{ij} 为从神经元 i 到神经元 j 的权，v_i 为神经元的输出，则 $\Delta\omega_{ij}=a(v_i-\omega_{ij})$，在这个学习中，使 ω_{ij} 十分逼近 v_i 的值。

目前，BP(Back Propagation)神经网络应用十分广泛，本章中的神经网络也采用 BP 神经网络，因此在这里重点介绍一下 BP 神经网络的学习机理。

最基本的 BP 神经网络是三层前馈网络，即输入层 L_A、隐含层 L_B 和输出层 L_C 单元之间前向连接。通常，BP 网络可以有多个隐含层，可以跨层连接，可以有单元的自身反馈连接，也可以有层内单元的横向连接。这里仅对于最基本的 BP 网络加以说明。这个 BP 神经网络用作异联想函数估值器，它能存储任意连续值模式对$(A_k, C_k)(k=1,2,\cdots,m)$。第 k 个模式对中，模拟值模式 $A_k=(a_1^k,\cdots,a_n^k)$，$C_k=(c_1^k,\cdots,c_n^k)$。网络通过多层误差修正梯度下降法离线学习，按离散时间方式运行。网络的拓扑结构见图 9-9，其中 L_A 层的 n 个单元对应于 A_k 的 n 个分量，而 L_C 层的 q 个单元对应于 C_k 的 q 个分量。

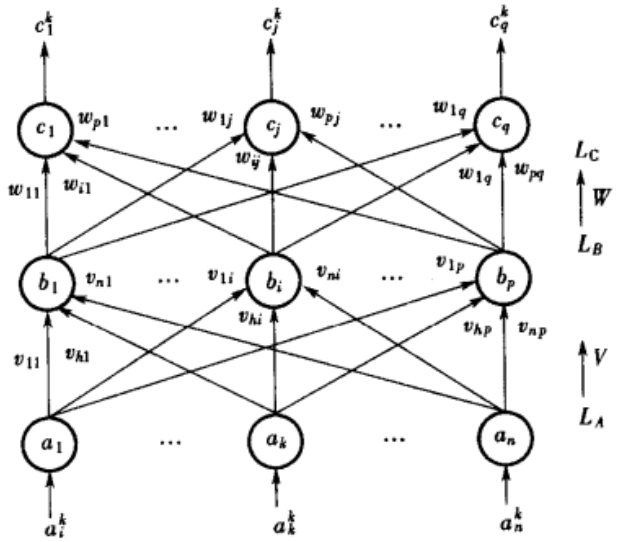


图 9-9 网络的拓扑结构

误差逆传播学习通过一个使代价函数最小化过程完成输入到输出的映射(或函数估值)。通常，代价函数定义为所有输入模式上输出层单元希望输出于实际输出的误差平方和。当然，代价函数也可以有其他形式，如熵代价函数、线性误差函数或误差绝对值的 r 幂。下面以代价函数取误差平方和的形式为例，介绍图 9-9 所示网络的误差逆传播学习。

①给 L_A 层单元到 L_B 层单元的连接权 v_{hi}、L_B 层单元到 L_C 单元的连接权 ω_{ij} 以及 L_B 层单元的阈值 θ_i、L_C 层单元的阈值 γ_i 赋[-1,1]区间的随机值。

②对于每个模式对$(A_k, C_k)(k=1,2,\cdots,m)$，进行下列操作。

a.将 A_k 的值送到 L_A 层单元，再将 L_A 层单元的激活值 a_h 通过连接权矩阵 $\boldsymbol{V}$ 送到 L_B 层单元，产生 L_B 层单元新的激活值

$$b_i=f\left(\sum_{h=1}^{n} v_{hi}a_h+\theta_i\right) \tag{9.5.8}$$

式中 $i=1,2,\cdots,p$；f 为 s 型函数

$$f(x) = (1 + e^{-x})^{-1} \tag{9.5.9}$$

b.计算 L_C 层单元的激活值

$$c_i = f\left(\sum_{i=1}^{p} \omega_{ij} b_i + \gamma_j\right) \tag{9.5.10}$$

式中 $j = 1,2,\cdots,q$。

c.计算 L_C 层(输出层)单元的一般化误差

$$d_j = c_j(1 - c_j)(c_j^k - c_j) \tag{9.5.11}$$

式中 c_j^k 为 L_C 层单元 j 的希望输出,$j = 1,2,\cdots,q$。

d.计算 L_B 层单元相对于每一个 d_j 的误差

$$e_i = b_i(1 - b_i)\sum_{j=1}^{q} \omega_{ij} d_j \tag{9.5.12}$$

式中 $i = 1,2,\cdots,p$。上式相当于将 L_C 层单元的误差逆传播到 L_B 层。

e.调整 L_B 层单元到 L_C 层单元的连接权

$$\Delta\omega_{ij} = \alpha b_i d_j \tag{9.5.13}$$

式中 $i = 1,2,\cdots,p$;$j = 1,2,\cdots,q$;α 为学习率$(0 < \alpha < 1)$。

f.调整 L_C 层单元的阈值

$$\Delta\gamma_j = \alpha d_j \tag{9.5.14}$$

式中 $j = 1,2,\cdots,q$。

g.调整 L_A 层单元到 L_B 层单元的连接权

$$\Delta v_{hi} = \beta a_h e_i \tag{9.5.15}$$

式中 $h = 1,2,\cdots,n$;$i = 1,2,\cdots,p$;$0 < \beta < 1$。

h.调整 L_B 层单元的阈值

$$\Delta\theta_i = \beta e_i \tag{9.5.16}$$

式中 $i = 1,2,\cdots,p$。

③重复步骤②,直到对于 $j = 1,2,\cdots,q$ 和 $k = 1,2,\cdots,m$,误差 d_j 变得足够小或者变为零为止。

从上面的学习过程可以看出,误差逆传播学习可分成两个阶段。在第一阶段中,对于给定的网络输入,通过现有连接权将其正向传播,获得各个单元的实际输出(激活值);在第二阶段中,首先计算出输出层各单元的一般化误差,这些误差逐层向输入层方向逆向传播,以获得调整各连接权所需的各单元参考误差。

由于神经网络具有自组织、自学习和并行分布式信息处理等特点,在模式识别、机械制造和自动控制领域都有着广泛的应用。神经网络在信息处理中最典型、最有希望的领域就是模式识别,作为神经网络的最初模型——感知机模型,就是为了模式识别提出的;在高级制造系统中,人们用人工神经网络来解决越来越多、越来越复杂的决策问题,神经网络的鲁

棒性、自适应性以及联想能力在机械制造业显示了很多优势，具有潜在的应用前景；传统的控制理论缺乏对非线性系统、未知动力学和环境参数系统的有效控制手段，而神经网络正好能弥补这一缺陷，在混沌控制领域运用神经网络控制方法，国内外都取得了许多结果。可以预计，神经网络方法和混沌控制理论的相互交叉，必将促进两者的共同发展。

第 10 章　分岔与混沌理论在机电系统中的应用

本章介绍分岔与混沌理论在形状记忆合金主动控制转子系统振动中的应用。形状记忆合金(Shape Memory Alloy，简称 SMA)是一种新型的功能材料，它具有形状记忆特性、变刚度特性和超弹性特性。利用这些特性可以设计出用于转子系统的可变刚度支承，通过结合主动控制技术，在临界转速附近改变系统刚度，从而降低系统在临界转速时的最大振幅。

10.1　形状记忆合金的非线性力学性能分析

形状记忆合金材料在加热情况下会产生热弹性和热应力问题，而且两者相互影响。在考虑了耦合项的非线性后，材料的热应力和热弹性方程可写为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial T}{\partial t}=-\alpha\nabla^2 T=\frac{W}{\rho c_v}-\frac{\beta T}{\rho c_v}\varepsilon kk\\&(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial x}+G\nabla^2 u-\beta\frac{\partial T}{\partial x}+X=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\end{aligned}\right\}\tag{10.1.1}$$

其中 T 为温度，W 为热源强度，u 为应力，ε 为应变，e 为体积应变，α、β 为热常数，λ、G 为材料的弹性常数。由于转子系统中记忆合金控制器是由记忆合金丝组成，长径比较大，所以 $e=\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon_x$。注意到式(10.1.1)中第一式的最后一项显含温度 T，为非线性项，故式(10.1.1)为非线性耦合热力学方程。

取无量纲量：

$$\xi=\frac{x}{x_0},\ U=\frac{u}{u_0},\ \psi=\frac{T}{T_0},\ \tau=\frac{t}{t_0},\ W_0=\rho c_V T_0 Vl^2,\ \overline{W}=\frac{W}{W_0}$$

$$x_0=\frac{\alpha}{V},\ u_0=\frac{\beta T_0\alpha}{(\lambda+2G)V},\ t_0=\frac{\alpha}{V^2},\ V=\sqrt{\frac{\lambda+2G}{\rho}},\ \alpha=\frac{k}{\rho c_V}$$

则有

$$(\lambda+G)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\beta T_0\sqrt{\lambda+2G}}{\alpha\sqrt{\rho}}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\beta T_0\sqrt{\lambda+2G}}{\alpha\sqrt{\rho}}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2}$$

$$\beta\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\beta T_0\sqrt{\lambda+2G}}{\alpha\sqrt{\rho}}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\xi}$$

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_0(\lambda+2G)c_V}{\alpha}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial \tau}$$

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_0(\lambda+2G)c_V}{\alpha}\cdot\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}$$

$$T\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\psi T_0^2\beta^2}{\alpha\rho}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \tau}$$

原方程化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \psi\delta\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \tau} - p\bar{W}\end{aligned}\right\} \tag{10.1.2}$$

其中

$$\delta = \frac{T_0\beta^2}{(\lambda+2G)\rho c_V},\quad p = \frac{\alpha\rho V l^2}{(\lambda+2G)}$$

边界条件和初始条件为

$$U_0(0,\tau)=0,\quad \frac{\partial U_0}{\partial \xi}(L,\tau)=0$$

$$U_0(\xi,0)=\frac{\Delta L}{L}\xi,\quad \psi_0(\xi,0)=\theta$$

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial \xi}(0,\tau)=0,\quad \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi}(L,\tau)=0$$

用摄动法求解，将 U、ψ 表示为 $U=\sum_{i=0}^{\infty}U_i\delta^i$，$\psi=\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i\delta^i$，代入式(10.1.2)，对比两端的 δ 同次幂的系数得到：

零阶

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 U_0}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial^2 U_0}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi}\\ \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial \psi_0}{\partial \tau} - p\bar{W}\end{aligned}\right\} \tag{10.1.3}$$

一阶

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi}\\ \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau} + \psi_0\frac{\partial^2 U_0}{\partial \xi \partial \tau}\end{aligned}\right\} \tag{10.1.4}$$

一般情况下 δ 为小参数，故在要求精度不太高的情况下，可忽略其高次项。先求解式(10.1.3)的第二式：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\psi_0}{\partial\xi^2}=\frac{\partial\psi_0}{\partial\tau}-p\bar{W}\\&\frac{\partial\psi_0}{\partial\xi}(0,\tau)=0\\&\frac{\partial\psi_0}{\partial\xi}(L,\tau)=0\\&\psi_0(\xi,0)=\frac{T_1}{T_0}=\theta\end{aligned}\right\}\tag{10.1.5}$$

其中 T_1 是记忆合金从马氏体转变到奥氏体的临界温度。用分离变量法求解，由边界条件得固有函数系 $\left\{\cos\frac{n\pi}{L}\right\}(n=0,1\cdots)$。故设 $\psi_0(\xi,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\tau)\cos\frac{n\pi\xi}{L}$，将其代入方程(10.1.5)，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n'(\tau)+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2A_n(\tau)\right]\cos\frac{n\pi}{L}=p\bar{W}$$

在实际系统中，$\bar{W}$ 是变化的，由系统控制律决定。但在研究记忆合金材料的力学性能时，对系统(10.1.3)，$\bar{W}$ 与 ξ 无关，故可将 $\bar{W}$ 视为可变常数。故 $p\bar{W}$ 关于 $\left\{\cos\frac{n\pi\xi}{L}\right\}$ 的 Fourier 系数为 $a_0=p\bar{W}$，$a_n=0(n=1,2,\cdots)$，则有

$$A'_0(\tau)=p\bar{W},\quad A_n'(\tau)+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2A_n'(\tau)=0\quad(n=1,2,\cdots)$$

解得

$$A_0(\tau)=p\bar{W}\tau+B,\quad A_n(\tau)=c_n\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\tau}$$

由初始条件

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n(0)\cos\frac{n\pi\xi}{L}=\theta$$

知 θ 关于 $\left\{\cos\frac{n\pi\xi}{L}\right\}$ 的 Fourier 系数为 $\varphi_0=2\theta$，$\varphi_n=0(n=1,2,\cdots)$。

再由

$$A_0(0)=\theta,\quad A_n(0)=0$$

可得

$$c_n=0,\quad B=\theta$$

于是

$$A_0(\tau)=p\bar{W}\tau+\theta,\quad A_n(\tau)=0$$

所以

$$\psi_0(\xi,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\tau)\cos\frac{n\pi\xi}{L}=p\bar{W}\tau+\theta$$

则式(10.1.3)的第一式变为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U_0}{\partial \tau^2} = \dfrac{\partial^2 U_0}{\partial \xi^2} \\ U_0(0,\tau) = 0, \dfrac{\partial U_0}{\partial \xi}(L,\tau) = 0 \\ U_0(\xi,0) = \dfrac{\Delta L \xi}{L}, U_\tau(\xi,0) = 0 \end{cases}$$

其中 $\Delta L = \dfrac{a(T_1 - T)l}{x_0}$，$a$ 为线胀系数。固有函数系为 $\left\{\sin\dfrac{(2n-1)\pi\xi}{2L}\right\}$，设

$$U_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{(2n-1)\pi\tau}{2L} + b_n \sin\frac{(2n-1)\pi\tau}{2L}\right)\sin\frac{(2n-1)\pi\xi}{2L}$$

由初始条件

$$U_0(\xi,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{(2n-1)\pi}{2L}\xi = \frac{\Delta L \xi}{L}$$

$$\frac{\partial U_0(\xi,0)}{\partial \tau} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{(2n-1)\pi}{2L}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2L}\xi = 0$$

得

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}8\Delta L}{(2n-1)^2\pi^2}, b_n = 0$$

故

$$U_0(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}8\Delta L}{(2n-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2n-1)\pi\tau}{2L}\sin\frac{(2n-1)\pi\xi}{2L}$$

将其代入式(10.1.4)，得

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \\ &\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau} + (pW\tau + \theta)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2\Delta L}{L^2}\sin\frac{(2n-1)\pi\tau}{2L}\cos\frac{(2n-10)\pi\xi}{2L} \end{aligned}\right\} \quad (10.1.6)$$

先求解第 2 式：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \psi_1}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} + (pW\tau + \theta)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2\Delta L}{L^2}\sin\frac{(2n-1)\pi\tau}{2L}\cos\frac{(2n-1)\pi\xi}{2L} \\ &\frac{\partial \psi_1}{\partial x}(0,\tau) = 0 \\ &\frac{\partial \psi_1}{\partial x}(L,\tau) = 0 \\ &\psi_1(\xi,0) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (10.1.7)$$

由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \psi_1}{\partial \tau}=\dfrac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2}\\ \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x}(0,\tau)=0\\ \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x}(L,\tau)=0\end{cases}$$

得固有函数系$\left\{\cos\dfrac{m\pi\xi}{L}\right\}$　$(n=1,2,\cdots)$。设解为

$$\psi_1(\xi,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}A_m(\tau)\cos\frac{m\pi\xi}{L}$$

将其代入方程(10.1.7),得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_m'(\tau)+\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 A_m(\tau)\right]\cos\frac{m\pi\xi}{L}$$

$$=(pW\tau+\theta)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\Delta L}{L^2}\sin\frac{(2n-1)\pi\tau}{2L}\cos\frac{(2n-1)\pi\xi}{2L}$$

$$A_n'(\tau)+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 A_n(\tau)=(pW\tau+\theta)\sum_{n=1}^{\infty}c_{mn}\sinh_n\tau$$

$$A_n(0)=0,\ h_n=\frac{(2n-1)\pi}{2L},\ a_m=\frac{m\pi}{L}$$

$$c_{mn}=(-1)^n\frac{2\Delta L}{L^2}\int_0^L\cosh_n\xi\cos\ a_m\xi\mathrm{d}\xi=(-1)^n\frac{2\Delta L}{L^2}\frac{(-1)^{m+n+1}2L(2n-1)}{4m^2\pi-(2n-1)^2\pi}$$

设解为

$$A_m(\tau)=D_m(\tau)\mathrm{e}^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\tau}$$

代入方程得

$$D_m(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}pWc_{mn}\int_0^{\tau}\tau\sinh_n\tau\mathrm{e}^{a_m^2}\mathrm{d}\tau+\sum_{n=1}^{\infty}c_{mn}\theta\int_0^{\tau}\sinh_n\mathrm{e}^{a_m^2\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}pWc_{mn}(d_{mn}\tau\sinh_n\tau\mathrm{e}^{a_m^2}-\mathrm{e}_{mn}\tau\cosh_n\tau\mathrm{e}^{a_{m\tau}^2}+(e_{mn}^2-d_{mn}^2)\sinh_n\tau\mathrm{e}^{a_m^2}$$

$$+2\mathrm{e}_{mn}d_{mn}\cosh_n\tau\mathrm{e}^{a_m^2\tau}-2\mathrm{e}_{mn}d_{mn})+\sum_{n=1}^{\infty}c_{mn}\theta(d_{mn}\sinh_n\tau\mathrm{e}^{a_m^2\tau}-\mathrm{e}_{mn}\cosh_n\tau\mathrm{e}^{a_m^2\tau}+$$

$$e_{mn})$$

其中

$$d_{mn}=\frac{4L^2m^2}{(2n-1)^2L^2+4m^4\pi^2},\quad \mathrm{e}_{mn}=\frac{2L^3(2n-1)}{(2n-1)^2L^2\pi+4m^4\pi^3}$$

则

$$\psi_1(\xi,\tau)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_n(\tau)\cos\frac{m\pi\xi}{L}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} pWc_{mn}d_{mn}\tau\sinh_n\tau\cos a_m\xi - \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} pWc_{mn}e_{mn}\tau\cosh_n\tau\cos\ a_m\xi$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(pWe_{mn}^2 - pWd_{mn}^2 - \theta d_{mn})c_{mn}\sinh_n\tau\cos\ a_m\xi$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(2pWe_{mn}d_{mn} - e_{mn}\theta)c_{mn}\cosh_n\tau\cos\ a_m\xi$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-2pWe_{mn}\mathrm{d}_{mn} + e_{mn}\theta)c_{mn}e^{-\left(\frac{1}{q_n}\right)^2\tau}\cos\ a_m\xi \tag{10.1.8}$$

再来求式(10.1.6)第一式:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 U}{\partial\tau^2} = \dfrac{\partial^2 U_1}{\partial\xi^2} - \dfrac{\partial\psi_1}{\partial\xi}\\ U_1(0,\tau) = 0\\ \dfrac{\partial U_1}{\partial\xi}(L,\tau) = 0\\ U_1(\xi,0) = 0\\ \dfrac{\partial U_1}{\partial\tau}(\xi,0) = 0\end{cases}$$

设

$$U_1 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\tau)\sin\ z_k\xi$$

代入方程得

$$\sum_{k=1}^{\infty}[A_k''(\tau) + z_k^2A_k(\tau)]\sin z_k\xi = -\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi}$$

$\sin\ a_m\xi$ 关于 $\sin\ z_m\xi$ 的系数为

$$\int_0^L \sin\frac{(2k-1)\pi\xi}{2L}\sin\frac{m\pi\xi}{L}\mathrm{d}\xi = \frac{(-1)^{m+k}4mL}{(4m^2-4k^2+4k-1)\pi} = g_{km}$$

故得

$$A_k''(\tau) + z_k^2A_k(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} pWa_mc_{mn}d_{mn}g_{km}\tau\sin z_n\tau - \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} pWa_mc_{mn}e_{mn}\tau\cos\ z_n\tau$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(pWe_{mn}^2 - pWd_{mn}^2 - \theta d_{mn})a_mc_{mn}g_{km}\sin z_n\tau$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(2pWe_{mn}d_{mn} - e_{mn}\theta)a_mc_{mn}g_{km}\cos\ z_n\tau$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-2pWe_{mn}d_{mn} + e_{mn}\theta)a_mc_{mn}g_{km}e^{-a_m^2\tau} \tag{10.1.9}$$

方程(10.1.9)的齐次解为 $B_k\cos z_k\tau + C_n\sin\ z_k\tau$。

特解 1：
$$\tilde{A}_{k1}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2pWe_{mn}d_{mn}+e_{mn}\theta)a_mc_{mn}g_{km}\mathrm{e}^{-a_m^2\tau}}{a_m^4+z_k^2}$$

特解 2：
$$\begin{aligned}\tilde{A}_{k2}=&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\n\neq k}}^{\infty}\frac{(pWe_{mn}^2-pWd_{mn}^2-\theta d_{mn})a_mc_{mn}g_{km}\sin z_n\tau}{z_k^2-z_n^2}\\&+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\n\neq k}}^{\infty}\frac{(-2pWe_{mn}d_{mn}-e_{mn}\theta)a_mc_{mn}g_{km}\cos z_n\tau}{z_k^2-z_n^2}\\&+\sum_{\substack{n=1\\n=k}}^{\infty}\frac{(2pWe_{mn}d_{mn}-e_{mn}\theta)a_mc_{mn}g_{km}\tau\sin z_n\tau}{2z_k}\\&+\sum_{\substack{n=1\\n=k}}^{\infty}\frac{(pWe_{mn}^2-pWd_{mn}^2-\theta d_{mn})a_mc_{mn}g_{km}\tau\cos z_n\tau}{-2z_k}\end{aligned}$$

特解 3：
$$\begin{aligned}\tilde{A}_{k3}=&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\n\neq k}}^{\infty}\left(\frac{pWa_mc_{mn}d_{mn}g_{km}\tau}{z_k^2-z_n^2}+\frac{2pWa_mc_{mn}e_{mn}g_{km}z_n}{(z_k^2-z_n^2)^2}\right)\sin z_n\tau\\&+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\n\neq k}}^{\infty}\left(\frac{pWa_mc_{mn}e_{mn}g_{km}\tau}{z_k^2-z_n^2}-\frac{2pWa_mc_{mn}d_{mn}g_{km}z_n}{(z_k^2-z_n^2)^2}\right)\cos z_n\tau\\&+\sum_{\substack{m=1\\n=k}}^{\infty}\left(\frac{-pWa_mc_{mn}e_{mn}g_{km}\tau}{4z^n}+\frac{pWa_mc_{mn}d_{mn}g_{km}}{4z_n^2}\right)\tau\sin z_n\tau\\&+\sum_{\substack{m=1\\n=k}}^{\infty}\left(\frac{pWa_mc_{mn}d_{mn}g_{km}\tau}{-4z_n}+\frac{pWa_mc_{mn}e_{mn}g_{km}}{-4z_n^2}\right)\tau\cos z_n\tau\end{aligned}$$

由初始条件得
$$\begin{aligned}B_k=&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2pWe_{mn}d_{mn}-e_{mn}\theta)a_mc_{mn}g_{km}}{a_m^4+z_n^2}-\frac{(2pWe_{mn}d_{mn}-e_{mn}\theta)a_mc_{mn}g_{km}}{z_k^2-z_n^2}\right.\\&\left.+\frac{2pWa_mc_{mn}d_{mn}g_{km}z_n}{(z_k^2-z_n^2)^2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_k=&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2pWe_{mn}d_{mn}+e_{mn}\theta)a_m^3c_{mn}g_{km}}{(a_m^4+z_n^2)z_k}-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(pWe_{mn}^2-pWd_{mn}^2-\theta d_{mn})a_mc_{mn}g_{km}z_n}{(z_k^2-z_n^2)z_k}\\&+\sum_{\substack{m=1\\n=k}}^{\infty}\frac{(pWe_{mn}^2-pWd_{mn}^2-\theta d_{mn})a_mc_{mn}g_{km}}{2z_nz_k}+\sum_{\substack{m=1\\n=k}}^{\infty}\frac{pWa_mc_{mn}e_{mn}g_{km}}{4z_n^2z_k}\\&-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2pWa_mc_{mn}e_{mn}g_{km}z_n^2}{(z_k^2-z_n^2)^2z_k}-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{pWa_mc_{mn}e_{mn}g_{km}}{(z_k^2-z_n^2)^2z_k}\end{aligned}$$

则有
$$U_1(\xi,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}(B_k\cos z_k\tau+C_k\sin z_k\tau+\tilde{A}_{k1}+\tilde{A}_{k2}+\tilde{A}_{k3})\sin z_k\xi$$

因此系统的解为

$$\left.\begin{aligned} U &= U_0 + \delta U_1 \\ \psi &= \psi_0 + \delta\psi_1 \end{aligned}\right\} \tag{10.1.10}$$

其中 U_0、U_1、ψ_0、ψ_1 见上文。

取泊松比 $\mu = 0.25$，$\rho = 2\ 700\ \text{kg/m}^3$，$c_V = 879\ \text{J/(kg·K)}$，分别计算杨氏弹性模量变化时方程的解。记忆合金丝长 $l = 13.28\ \text{cm}$，$W = I^2 R$。假定 W 为一常数，计算 $t = 10\ \text{s}$ 时，SMA 的 $l = 0.182\ 4\ \text{m}$ 处的 U 和 ψ 的数值。

计算结果如表 10-1 所示：U_{11}、ψ_{11} 为由式(10.1.10)得出，U_{12}、ψ_{12} 为采用 Matlab 的 Pdetool 和偏微分方程的差分法直接进行数值计算的结果。

表 10-1 非线性理论解(式(10.1.10))与直接数值解的结果比较

$E(le+9pa)$	U_{11}	U_{12}	ψ_{11}	ψ_{12}
68	4 579.5	4 568.6	3.429	3.418
75	4 807.8	4 786.9	3.536	3.526
80	4 963.9	4 956.4	3.639	3.39
85	5 115.3	5 099.9	3.707	3.714
90	5 262.1	5 272.7	3.822	3.816
95	5 404.8	5 415.3	3.862	3.859

图 10-1 和图 10-2 反映了两者的误差。

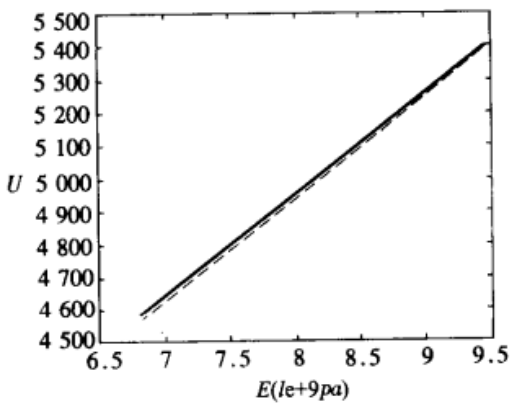


图 10-1 记忆合金弹性模量—位移曲线

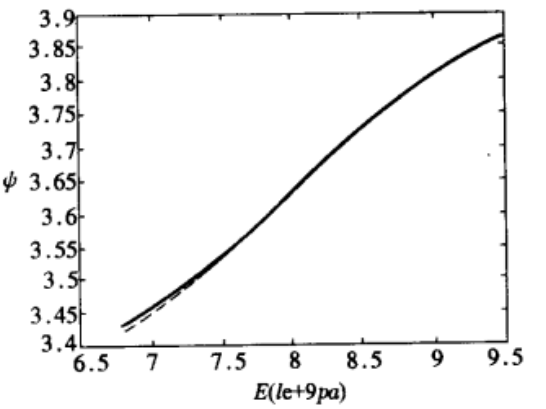


图 10-2 记忆合金弹性模量—温度曲线

图 10-1 和图 10-2 中实线为理论解，虚线为数值解。最大误差在 1% 以内。可见，由式(10.1.10)得到的一阶非线性近似解与直接数值解符合得很好。

10.2　转子系统的非线性动力学分析

形状记忆合金在超弹性状态下具有软非线性特性。利用这一特性，可以设计出具有软非线性刚性的变刚度支承(控制器)；结合挤压油膜阻尼器(降速时)后，在升速时关闭挤压油膜阻尼器，转子系统的刚度呈软非线性；降速时打开挤压油膜阻尼器，转子系统的刚度呈硬非线性，从而实现系统刚性的非线性可控，使系统无论是升速还是降速，在通过临界转速时都沿双稳态中的小解运动，降低振幅；若同时对形状记忆合金控制器进行主动控制(利用其记忆特性，通过控制电流使合金丝升温变形，从而改变刚度)，则可实现刚度的精确调整，提高减振效果。

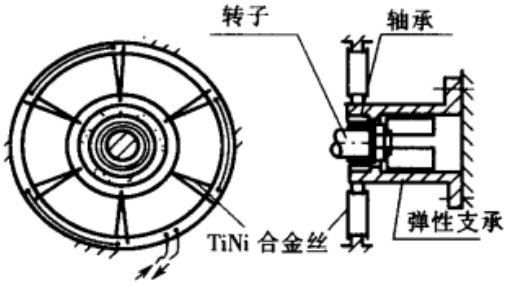


图 10-3　带有形状记忆合金控制器的转子系统

带有形状记忆合金控制器的刚性转子系统的结构如图 10-3 所示。

用于转子系统的形状记忆合金控制器结构如图 10-4 所示，形状记忆合金在超弹性变形时的应力—应变曲线如图 10-5 所示。

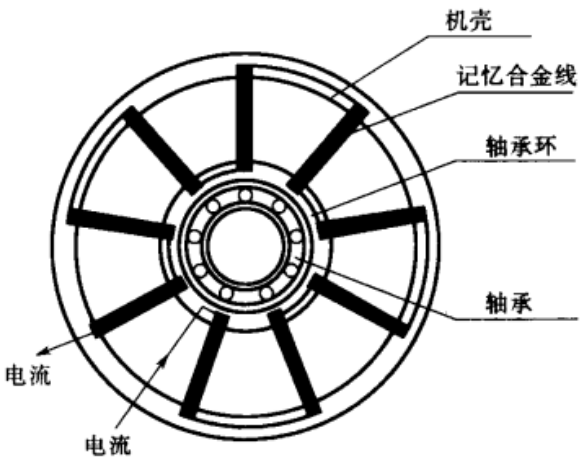


图 10-4　形状记忆合金控制器结构图

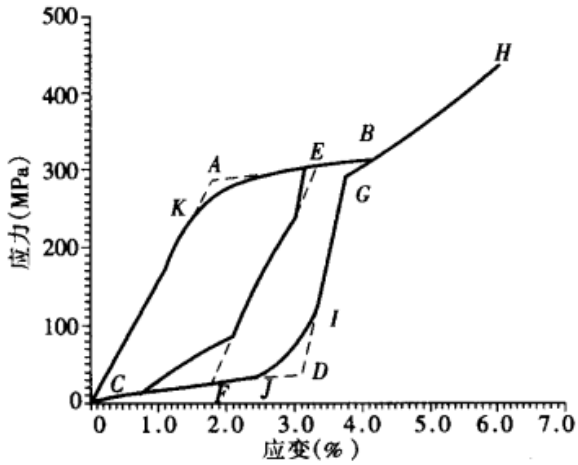


图 10-5　超弹性变形时形状记忆合金的应力—应变曲线图

带形状记忆合金支承的转子系统振动方程为

$$\ddot{x} + \xi\dot{x} + \omega^2 x = -\alpha x^3 + e\Omega\cos\Omega t + e\varepsilon\sin\Omega t \tag{10.2.1}$$

其中 $\xi = \dfrac{C}{M}$，$\omega = \sqrt{\dfrac{k_0 + c_1'}{M}} = \sqrt{\dfrac{k_0 + n\dfrac{S}{L}(3\alpha z_0^2 + 2\beta z_0 + \lambda)}{M}}$，$a = \dfrac{a_1'}{M} = \dfrac{n\alpha S}{ML^3}$，$M$、$C$、$k_0$ 分别为系

统的质量、阻尼及刚度，x 为位移，e 为偏心距，ε 为角加速度，n 为系数(与形状记忆合金控制器的结构有关)，z_0 为形状记忆合金丝的初始应变值，$a_1' = \dfrac{n\alpha S}{L^3}$，$c_1' = \dfrac{n(3\alpha z_0^2 + 2\beta z_0 + \gamma)S}{L}$，$S = \pi R^2$ 为形状记忆合金丝的横截面积，L 为形状记忆合金丝的长度，α、β、γ 为用来拟合应力—应变曲线的三次曲线 $y = \alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z$ 的系数，y 为应力，z 为应变。此外，由图 10-5 可以看出，记忆合金的应力—应变曲线呈软非线性，而且其非线性的程度与记忆合金的相对变形量有关。当转子系统的不平衡力较大时，记忆合金的相对变形量较大，拟合后的三次曲线 $y = \alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z$ 的系数 α 减小，由于 $\alpha < 0$，故 $a = \dfrac{a'_1}{M} = \dfrac{n\alpha S}{ML^3} < 0$，系统呈软非线性。

10.2.1 系统的经典非线性动力学分析

用多尺度法解得

$$x = d\cos(\Omega t - \theta) + \varepsilon \frac{ad^3}{32\omega^2}\cos(3\omega t + \rho\varepsilon t - \theta) \tag{10.2.2}$$

其中 d、θ 由以下二式确定：

$$\frac{1}{2}\xi d = \frac{A}{2\omega}\sin\theta \tag{10.2.3}$$

$$d\sigma - \frac{3ad^3}{8\omega} = -\frac{A}{2\omega}\cos\theta \tag{10.2.4}$$

式中 $A = e\sqrt{\Omega^4 + \varepsilon^2}$。系统的稳定性取决于以下方程的根 λ：

$$\lambda^2 + \xi\lambda + \frac{1}{4}\xi^2 + \left(\sigma - \frac{9}{8\omega}ad_0^2\right)\left(\sigma - \frac{3}{8\omega}ab_0^2\right) = 0 \tag{10.2.5}$$

令常数项 $\dfrac{1}{4}\xi^2 + \left(\sigma - \dfrac{9}{8\omega}ad_0^2\right)\left(\sigma - \dfrac{3}{8\omega}ad_0^2\right) = \Delta$，则

①若 $\xi = 0$ 且 $\Delta = 0$，则会出现一对纯虚根，发生霍普夫分叉。

②当 $\Delta = 0$ 时，会出现一个 0 根和一个负实根，原点为分界点。

③当 $\Delta < 0$ 时，会出现两个异号的实根，原点为鞍点，不稳定。

④当 $\Delta > 0$ 时，有以下三种情况：

a. $\xi^2 - 4\Delta > 0$ 时，会出现两个相异负实根，原点为稳定结点；

b. $\xi^2 - 4\Delta = 0$ 时，会出现两个相等负实根，原点为稳定临界结点或退化结点；

c. $\xi^2 - 4\Delta < 0$ 时，会出现一对共轭复根，且实部为负，原点为稳定焦点。

可见，当 $\Delta > 0$ 时，原点总是稳定的。

工程上要求系统保持稳定，此时只需 $\Delta > 0$ 即可。由 Δ 定义知，增大阻尼 ξ 或减小非线性度 a(注意 a 是负数)都可以增大 Δ。再由 $\xi = \dfrac{C}{M}$ 和 $a = \dfrac{a'_1}{M} = \dfrac{n\alpha A}{ML^3}$ 知，为提高系统稳定性，可采用以下办法。

①增大系统阻尼 C。此时由于有更多的振动能量转化为热能，应注意散热。

②增大控制器结构系数 n。可通过改进控制器结构、增加记忆合金丝数目来达到。

③选用软非线性较弱（a 较小）的记忆合金丝。但这样会降低减振效果，使用时应权衡利弊。

④增大记忆合金丝的横截面积 A。

⑤缩短记忆合金丝的长度 L。

⑥提高系统的质量 M。一般不采用这种方法。

$\Delta=0$ 处稳定性发生改变，产生分岔，分岔时系统诸参数满足

$$\frac{1}{4}\xi^2+\left(\sigma-\frac{9}{8\omega}ad_0^2\right)\left(\sigma-\frac{3}{8\omega}ad_0^2\right)=0 \tag{10.2.6}$$

由式(10.2.6)解出的 σ 可确定系统振幅的跳跃区间$[\sigma_1,\sigma_2]$，由于 $\Omega=\omega+\varepsilon\sigma$，则$[\omega+\varepsilon\sigma_1,\omega+\varepsilon\sigma_2]$即为系统的跳跃区间，其中

$$\sigma_1=\frac{6ad_0^2-\sqrt{9a^2d_0^4-16\xi^2\omega^2}}{8\omega},\sigma_2=\frac{6ad_0^2+\sqrt{9a^2d_0^4-16\xi^2\omega^2}}{8\omega}$$

区间长度

$$l=\frac{\sqrt{9a^2d_0^4-16\xi^2\omega^2}}{4\omega}$$

由于 ω 是定值，故$[\sigma_1,\sigma_2]$的变化就反映了$[\omega+\varepsilon\sigma_1,\omega+\varepsilon\sigma_2]$的变化，分析结果如下。

①跳跃区间$[\sigma_1,\sigma_2]$产生的充要条件为：$9a^2d_0^4-16\xi^2\omega^2>0$。

②系统刚性的非线性度 a 减小时（即系统的软非线性增强时），d 将减小。

③系统刚性的非线性度 a 减小时，有以下两种情况。

a.无阻尼时，σ_1、σ_2 均变小，l 变大，跳跃区间左移，且左端点左移幅度大于右端点左移幅度，使得区间变宽。

b.有阻尼时，令$\frac{3ad^2}{8\omega}-\sigma=Y,\frac{3ad_0^2}{4\omega}=W$，则

当 $\xi\leqslant 2Y$ 时，有 $W\geqslant 0$，即 $-\frac{3ad_0^2}{4\omega}$增大，则区间变宽，且 σ_1、σ_2 均变小，此结论与无阻尼时类似；

当 $\xi\geqslant 2Y$ 时，有 $W\leqslant 0$，即$\frac{3ad_0^2}{4\omega}$减小，则区间变窄，且 σ_1、σ_2 均增大，区间右移。

④阻尼 ξ 增大时 d 将减小，故 l 减小，σ_1、σ_2 均增大（右移），且 σ_1 右移幅值更大。

⑤角加速度 ε 增大时 d 减小。

⑥初始转速增大，最大幅值 d 减小，跳跃区间右移，区间长度 l 变小。

下面列出振动仿真结果（表 10-2 ~ 表 10-5）。该系统质量 $M=1$ kg，初始阻尼系数为 1 N·s/m，线性刚度为 50 kN/m，角加速度 $\varepsilon=2$ rad/s。仿真计算采用自适应步长的四阶/五阶

Runge-Kutta 法，且只计算升速时的情况。

表 10-2 系统特性随非线性度 a 变化的情况($\xi = 1$ N·s/m, $\varepsilon = 2$ rad/s)

	$a = -3$	$a = -5$	$a = -7$
右端点(跃升点)(Hz)	214.2	213.4	212.3
加速时最大振幅(mm)	2.13	1.89	1.72

表 10-3 提高角加速度 h 后系统的特性($a = 3$, $\xi = 1$ N·s/m)

	$h = 2$ rad/s	$h = 4$ rad/s	$h = 8$ rad/s	$h = 16$ rad/s	$h = 32$ rad/s
最大振幅(mm)	2.13	2.11	2.07	1.98	1.77
跃升点(Hz)	214.2	217.1	219.3	220.6	221.1

表 10-4 系统特性随初始角速度 ω_0 变化的情况($a = 3$, $\xi = 1$ N·s/m, $\varepsilon = 2$ rad/s)

	$\omega_0 = 0$	$\omega_0 = 50$	$\omega_0 = 100$	$\omega_0 = 150$	$\omega_0 = 200$
最大振幅(mm)	2.13	2.10	2.08	2.07	2.06
跃升点(Hz)	214.2	214.8	215.2	215.5	215.7

表 10-5 系统特性随阻尼 ξ 变化的情况($a = 3$, $\varepsilon = 2$ rad/s)

	$\xi = 1$	$\xi = 5$	$\xi = 10$
最大振幅(mm)	2.13	1.67	1.06
跃升点(Hz)	214.2	215.7	216.3

通过以上各表可以看出，仿真结果与理论结论是吻合的，但系统对角加速度和初始角速度不太敏感。相对而言，对角加速度比较敏感：随着角加速度增大，幅值减小的幅度变大，而区间右移的趋势减缓，这是因为系统是软非线性的，区间右端点(跃升点)无论如何增大也不可能超过系统的线性固有频率(此处系统线性固有频率为 223.6 Hz)；系统对初始角速度不敏感：随初始角速度的增大，幅值的变化和跳跃区间的右移十分微弱，在通常情况下几乎可以忽略。

以上讨论的是软非线性系统在升速时的情况。为减少振动，需要系统在升速时呈软非线性，降速时呈硬非线性。故给系统加上挤压油膜阻尼器，在降速时打开油门，系统相当于增加了刚度 K_D 和阻尼 C_D：

$$\left.\begin{aligned} K_D &= BE\,\frac{2\varepsilon_D}{(1-\varepsilon_D^2)^2} \\ C_D &= BE\,\frac{\pi}{2(1-\varepsilon_D^2)^{\frac{3}{2}}\omega} \end{aligned}\right\} \tag{10.2.7}$$

式中 BE 为轴承参数，$BE=\mu RL^3\omega/C^3$，其中 μ 为滑油的动力黏度系数，R、L、C 为油膜环的半径、长度和油膜公称间隙；$\varepsilon_D=r/C$ 为轴径偏心率。此时系统刚度由弹性支承、形状记忆合金控制器和挤压油膜阻尼器三部分组成。在振动位移较小时，油膜力也较小，前两部分起主要作用；当轴径偏心率 ε_D 超过 0.4 后，油膜力迅速增强，成为系统刚度的主要成分。总地来说，此时系统具有硬非线性刚度。而在升速时切断油门，挤压油膜阻尼器不起作用，系统具有软非线性刚度。

先仿照以上的讨论，可得形状记忆合金控制器参数对硬非线性系统的影响：

①a 减小时，系统硬非线性度减小，振幅增加，系统跳跃区间左移，且左端点左移幅度小于右端点，故系统跳跃区间长度缩小；

②阻尼 ξ 增大时 d 将减小，故区间长度 l 减小，σ_1、σ_2 均减小(左移)，且 σ_2 左移幅值更大。

由于系统在升速时呈软非线性，降速时呈硬非线性。升速时的跃升点 A 与降速时的跌落点 B 合起来就构成跳跃区间。注意到点 A 是软非线性时的右端点，而点 B 是硬非线性时的左端点，综合起来，可得系统特性如下：

①a 减小时，系统跳跃区间的左右端点均左移，但区间长度的变化不固定(受挤压油膜阻尼器的硬非线性的影响)；

②阻尼 ξ 增大时振幅 d 将减小，跳跃区间两端点向中间靠拢，区间长度缩短。

由非线性度 a 的表达式可知，通过增大记忆合金丝的横截面积 S、缩短合金丝长度 L、改变控制器结构以提高 n 以及适度减轻转子质量 M 都可以减小 a，从而降低加速时的最大振幅。通过调节挤压油膜阻尼器的供油量，可以增加系统在减速时的硬非线性度，从而降低减速时的最大振幅。

为使系统振幅 d_0 最小，可将式(10.2.6)对上述参数求偏导，可得使 d_0 最小的诸参数值。一般 M、C、k_0 都固定，应调整 A、L、ε_0 等。

下面列出一模拟系统的振动仿真结果。该系统质量 $M=1$ kg，阻尼系数为 1 N·s/m，原刚度为 50 kN/m，形状记忆合金控制器超弹性变形后刚度为 10 kN/m，形状记忆合金丝应力—应变曲线拟合为 $\sigma=10^7\times(2.738\,3\varepsilon^3-0.130\,2\varepsilon^2+0.001\,7\varepsilon)$。合金丝直径为 0.8 mm，长度 $L=10$ mm。经优化后选 $\varepsilon_0=3.4\%$，系统角加速度为 2 rad/s^2，仿真计算采用自适应步长的四阶/五阶 Runge-Kutta 法。图中横坐标均为时间，单位为 s；纵坐标均为振幅，单位为 mm。

图 10-6、图 10-8 是原系统在 $e=0.05$ mm 和 $e=0.1$ mm 时的幅频曲线，图 10-7、图 10-9 是系统加装了形状记忆合金控制器后在 $e=0.05$ mm 和 $e=0.1$ mm 时的幅频曲线。由图可

知，$e=0.05$ mm 时系统振幅高达 7 mm，而加上形状记忆合金控制器后最大振幅仅为 1.8 mm；$e=0.1$ mm 时系统振幅为 14 mm，加上形状记忆合金控制器后最大振幅为 2.3 mm。减振效果达 70% ~ 80%。可见，形状记忆合金控制器能大幅度降低系统的振动，而且在工作范围内不平衡量越大减振效果越好。

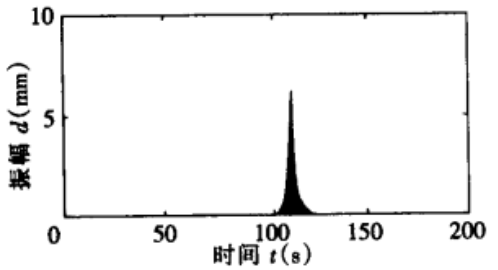


图 10-6 $e=0.05$ mm 时原系统的幅频曲线

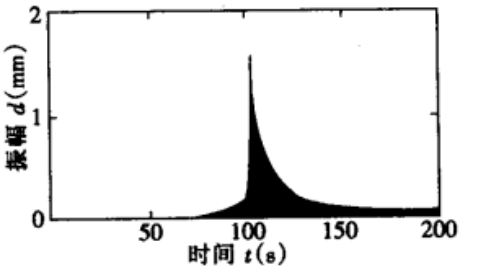


图 10-7 $e=0.05$ mm 时现系统的幅频曲线

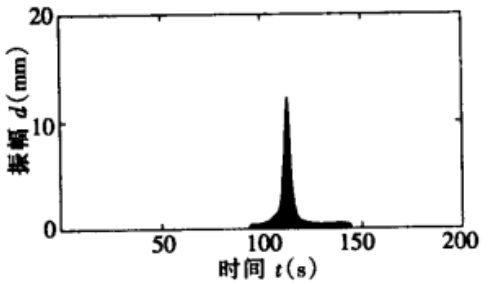


图 10-8 $e=0.1$ mm 时原系统的幅频曲线

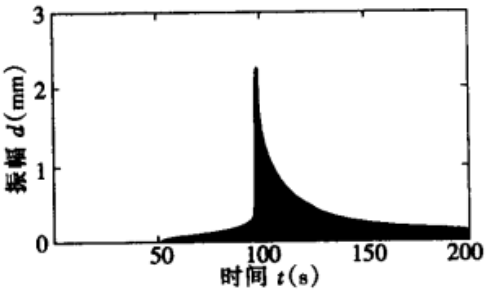


图 10-9 $e=0.1$ mm 时现系统的幅频曲线

若同时装备形状记忆合金控制器和挤压油膜阻尼器，减振结果见图 10-10，图 10-11。

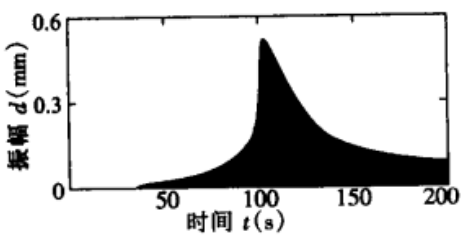


图 10-10 加装 SFD 后 $e=0.05$ mm 时现系统的幅频曲线

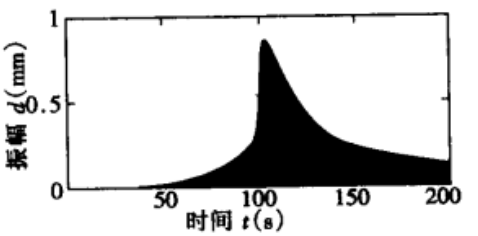


图 10-11 加装 SFD 后 $e=0.1$ mm 时现系统的幅频曲线

图 10-10、图 10-11 分别是系统同时装备形状记忆合金控制器和挤压油膜阻尼器后在 $e=0.05$ mm 和 $e=0.1$ mm 时的幅频曲线。由图知，$e=0.05$ mm 时振幅为 0.48 mm，$e=0.1$ mm 时振幅为 0.8 mm。与图 10-7、图 10-9 相比，系统振幅又减小了 65% ~ 73%。

10.2.2　系统的强非线性动力学分析

对于轻型高速转子—轴承系统，由于系统固有频率高、转速高、外加激振力相对较大，此时记忆合金支承的刚度往往呈强非线性。此时系统为一强非线性大扰动系统，系统的阻尼、非线性度、外加激振力都可能不是小量，故应用强非线性理论来研究。对系统

$$\ddot{x} + \xi\dot{x} + \omega^2 x = -ax^3 + e\Omega^2\cos(\Omega t) + e\varepsilon\sin(\Omega t)$$

用能量法解得

$$x = k\cos\theta \tag{10.2.8}$$

k 为系统振幅。令 $y = ak^2$，则 k 由下式决定：

$$\begin{aligned}&1\,089y^7 + 5\,346\omega^2 y^6 + (9\,729\omega^4 + 225\xi^2\omega^2)y^5 + (7\,776\omega^6 + 660\omega^4\xi^2)y^4\\&+ (2\,304\omega^8 + 2\,896\omega^6\xi^2)y^3 + 2\,816\omega^8\xi^2 y^2 + 1\,024\omega^{10}\xi^2 y = 1\,024a\omega^8 A^2\end{aligned} \tag{10.2.9}$$

式(10.2.9)左边各项系数均为正数。该式对硬非线性系统和软非线性系统均适用。

对硬非线性系统，$a > 0$，$y = ak^2 > 0$，则等式(10.2.9)两边各项均为正数，立即可知：当系统非线性度增强时，a 增大，则 y 增大，且 y 增大的幅度小于 a(因为 y 有高次项)。由于 $y = ak^2$，故 k 减小。

但对于记忆合金支承，其刚度呈软非线性，$a < 0$，则 $y = ak^2 < 0$，此时式(10.2.9)等式左边各项交替为正数和负数，不能简单断言 a 变化时 y 的变化规律。为此将式(10.2.9)两边对 a 求导，得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a}[7\,623y^6 + 32\,076\omega^2 y^5 + (48\,645\omega^4 + 1\,125\xi^2\omega^2)y^4\\&+ (31\,104\omega^6 + 2\,640\omega^4\xi^2)y^3 + (6\,912\omega^8 + 8\,688\omega^6\xi^2)y^2\\&+ 5\,632\omega^8\xi^2 y + 1\,024\omega^{10}\xi^2] = 1\,024\omega^8 A^2\end{aligned} \tag{10.2.10}$$

式(10.2.10)中[·]内的各项仍交替为正数和负数，不能判定[·]的正负性，但证明了如下命题：对强软非线性系统，随着非线性度的无限增加(a 减小)，系统振幅 k 最终将减小。

值得指出的是，上述命题只给出了系统的最终变化趋势。因此在非线性度的变化过程中，当 $a \geqslant a_0$ 时，存在这种可能：对强软非线性系统，随着非线性度的增加(即 a 减小)，在某些区域内系统振幅 k 可能不变甚至增大，但最终仍将减小。与硬非线性系统的简洁结果相比，软非线性系统的动态特性的分析要复杂得多。

表 10-6 分别列出一模拟系统在非线性度变化时，直接进行数值仿真，由强非线性解式(10.2.9)得到的数值结果和由弱非线性近似解式(10.2.4)得到的数值结果。该系统质量 $M = 1$ kg，初始阻尼系数为 1 N·s/m，线性刚度为 10 kN/m，偏心距为 0.05 mm，角加速度 $\varepsilon = 1$ rad/s^2。直接进行仿真时采用自适应步长的四阶/五阶 Runge-Kutta 法。图 10-12 为四种计算方式计算的结果。

注：表中第 1 行是给予系统以系统固有频率(100 rad/s)的定常激励后，得到的系统在主共振时的稳态响应；而第 2 行是给予系统以变频激励(使系统从静止均匀加速到 200 rad/s)

后,得到的系统在穿越固有频率时的瞬态响应。

表 10-6 非线性度变化时 4 种计算方式结果的比较

	$a=0$(线性)	$a=-2$	$a=-5$	$a=-10$
方程(10.2.1)稳态响应结果(直接积分)	4.525(理论值为 5)	4.407 5	4.110 5	3.761 0
方程(10.2.1)瞬态响应结果(直接积分)	3.432	3.404	3.380	3.324
按强非线性解(10.2.10)得到的结果	5	4.677	4.204	3.652
由弱非线性解(10.2.6)得到的结果	5	5.784 6	4.777 3	4.753 0

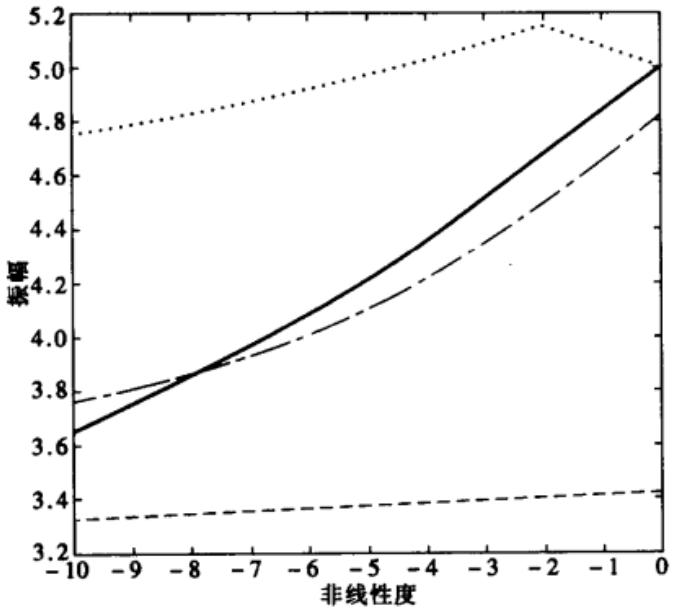


图 10-12 四种计算方式结果的比较

……为由弱非线性解(10.2.6)得到的结果;——为按强非线性解(10.2.6)得到的结果;—·—·—为方程(10.2.1)稳态响应结果(直接积分);┈┈ 为方程(10.2.1)瞬态响应结果(直接积分)

通过表 10-6 和图 10-12 可以看出以下几点:

①系统在升速过程中的瞬态响应远远小于系统在主共振时的稳态响应;

②$a=0$ 时,强非线性解和弱非线性解都能给出正确的线性结果 $k=\dfrac{A}{\xi\omega}=5$,这从两种解的表达式中也可以看出(将 $a=0$ 和 $\sigma=0$ 代入即得);

③即使在弱非线性情况下,式(10.2.9)的解也要比式(10.2.4)的解精确,且由弱非线性解式(10.2.4)得到的结果较数值积分解普遍偏大;

④当系统非线性度越大时，强非线性解较弱非线性解越精确，显出其优越性。

下面研究系统的$\frac{1}{3}$亚谐共振，仍有 $x = k\cos\theta$，其中 k 由下式决定：

$$36a^5k^{10} + 360a^4\omega^2k^8 + (396a^4\omega^4 + 75a^3\xi^2\omega^2)k^6 + 340a^2\xi^2\omega^4k^4 + (512a\xi^2\omega^6 - a^2\omega^2A)k^2 + 256\xi^2\omega^8 = 0 \tag{10.2.11}$$

分析可得：

①角加速度 ε 增大时，系统振幅 k 减小；

②非线性度 a 减小时，系统振幅 k 呈$\frac{1}{\sqrt{|a|}}$的趋势减小。

10.2.3　系统的分岔行为分析

下面研究系统

$$\ddot{x} + \xi\dot{x} + \omega^2x = -ax^3 + e\Omega^2\cos\Omega t + e\varepsilon\sin\Omega t$$

的分岔行为。首先将系统化为标准形式：令 $\dot{x} = y$，得

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= -\xi y - \omega^2x - ax^3 + e\Omega^2\cos\Omega t + e\varepsilon\sin\Omega t\end{aligned}\right\} \tag{10.2.12}$$

系统(10.2.12)是一个非线性非自治系统。多数动力系统理论都是对于自治系统的平衡点来加以讨论的。对非自治系统，一般常用的方法是对其在 $\cos\Omega t$ 的一个 2π 周期内进行平均化，得到不显含时间 t 的(即自治的)平均方程，再进行讨论。但是，在平均化的过程中，一些系统特性有可能被略去。为此，针对软非线性系统提出一种新方法：将 t 看作可变参数，从而将系统(10.2.12)的周期轨道视为对应可变参数 t 的平衡点集。由于 $t \in \mathbf{R}$，而实数集是可数集，因此该平衡点集是可数集的子集。具体作法如下。

将系统(10.2.12)写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & -\xi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ -ax^3 + e\Omega^2\cos\Omega t + e\varepsilon\sin\Omega t\end{pmatrix} \tag{10.2.13}$$

系统“平衡点集”(推广意义上的)为$\{(b,0)\}$，b 为满足

$$-\omega^2b - ab^3 + e\Omega^2\cos\Omega t + e\varepsilon\sin\Omega t = 0 \tag{10.2.14}$$

的实数集，因此是可数的。由于 b 由 t 决定，故 b 也可视为可变参数。

作坐标变换

$$\left.\begin{aligned}u &= x - b\\ v &= y\end{aligned}\right\} \tag{10.2.15}$$

系统化为

$$\left.\begin{aligned}\dot{u} &= v\\ \dot{v} &= -\xi v - \omega^2u - \omega^2b - a(u+b)^3 + e\Omega^2\cos\Omega t + e\varepsilon\sin\Omega t\end{aligned}\right\} \tag{10.2.16}$$

此时系统平衡点已移至(0,0)。将系统方程写成矩阵形式，得

$$\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2-3ab^2 & -\xi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -\omega^2+b-3abu^2-au^3-ab^3+e\Omega^2\cos\Omega t+e\varepsilon\sin\Omega t\end{pmatrix} \tag{10.2.17}$$

注意到式(10.2.14),则有

$$\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2-3ab^2 & -\xi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -3abu^2-au^3\end{bmatrix} \tag{10.2.18}$$

式(10.2.18)已成为自治系统,$b=b(t)$为周期性可变参数。记

$$f(u,v,t)=-3abu^2-au^3 \tag{10.2.19}$$

系统的线性化系统为

$$\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2-3ab^2 & -\xi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix} \tag{10.2.20}$$

其特征值由下式确定:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ \omega^2+3ab^2 & \lambda+\xi\end{vmatrix}=\lambda^2+\xi\lambda+\omega^2+3ab^2=0 \tag{10.2.21}$$

则 $\lambda=\dfrac{-\xi\pm\sqrt{\xi^2-4(\omega^2+3ab^2)}}{2}$。显然系统不可能有双 0 特征值,因为一次项系数 $\xi\neq0$。注意到 $a<0$,若满足 $\omega^2+3ab^2=0$,则此时系统有一个零根,即 $\lambda_1=0$。此时 $\lambda_2=-\xi$。可以看到,由于 ω^2 和 b^2 均大于 0,故只有像形状记忆合金支承这样具有软非线性($a<0$)的系统才能满足 $\omega^2+3ab^2=0$。

由式(10.2.21)可知,对应 $\lambda_1=0$ 的特征向量为(1,0),对应 λ_2 的特征向量为(1,$-\xi$)。作线性变换

$$\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -\xi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w\\ z\end{bmatrix} \tag{10.2.22}$$

则有

$$\left.\begin{aligned}T&=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -\xi\end{bmatrix}\\ T^{-1}&=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{1}{\xi}\\ 0 & -\dfrac{1}{\xi}\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{10.2.23}$$

则式(10.2.18)可化为

$$\begin{bmatrix}\dot{w}\\ \dot{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w\\ z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{f(w,z,t)}{\xi}\\ -\dfrac{f(w,z,t)}{\xi}\end{bmatrix} \tag{10.2.24}$$

其中 $f(w,z,t)$是 $f(w,v,t)$通过线性变换式(10.2.22)得到的。

$$f(w,z,t) = -3ab(w+z)^2 - a(w+z)^3 \tag{10.2.25}$$

用中心流形方法可以求出系统在中心流形上流的方程为

$$\dot{w} = \lambda_1 w - \frac{3ab}{\xi}w^2 - \frac{18a^2b^2 + a\xi^2}{\xi^3}w^3 - \frac{243a^3b^3 + 15a^2b\xi^2}{\xi^5}w^4 + \cdots \tag{10.2.26}$$

在忽略 3 次以上的项后，式(10.2.26)可写为

$$\dot{w} = \lambda_1 w - \frac{3ab}{\xi}w^2 - \frac{18a^2b^2 + a\xi^2}{\xi^3}w^3 \tag{10.2.27}$$

由于分岔发生的条件是 $\omega^2 + 3ab^2 = 0$，因此分岔发生时必有 $b \neq 0$，否则无论 a 为何值都无法使 $\omega^2 + 3ab^2 = 0$。因此式(10.2.27)的第 2 项不为 0。下面分情况讨论系统的具体分岔行为。

①当 $18a^2b^2 + a\xi^2 = 0$ 时，式(10.2.27)变为

$$\dot{w} = \lambda_1 w - \frac{3ab}{\xi}w^2 \tag{10.2.28}$$

系统发生跨临界分岔，分岔图如图 10-13 所示。

②当 $18a^2b^2 + a\xi^2 \neq 0$ 时，式(10.2.27)为

$$\dot{w} = \lambda_1 w - \frac{3ab}{\xi}w^2 - \frac{18a^2b^2 + a\xi^2}{\xi^3}w^3 \tag{10.2.29}$$

系统发生叉形分岔，分岔图如图 10-14 所示。

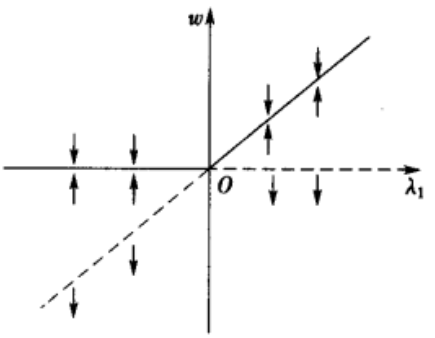


图 10-13　跨临界分岔

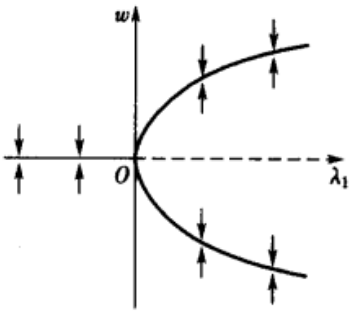


图 10-14　叉形分岔

若再取高次项(4 次以上)，还可以得到更高余维的分岔形式。

除此之外，还可以用平均法得到分岔方程，再用奇异性理论来进行分析。事实上，在文献(王洪礼等，2001)中已推得系统(10.2.1)的分岔方程为

$$9a^2d^6 - 48a\sigma\omega d^4 + 16\omega^2(\xi^2 + 4\sigma^2)d^2 - 16G^2 = 0 \tag{10.2.30}$$

其中 d 为系统振幅，σ 为调谐参数，$\Omega = \omega + \delta\sigma$($\delta$ 为小量标志)，$G = e\Omega^2$。

将式(10.2.30)改写为

$$d^6 + \beta d^4 + \alpha d^2 - \lambda = 0 \tag{10.2.31}$$

其中 $\beta = -\frac{48a\sigma\omega}{9a^2}$，$\alpha = \frac{16\omega^2(\xi^2 + 4\sigma^2)}{9a^2}$，$\lambda = \frac{16G^2}{9a^2}$。由于式(10.2.31)不具备 Z_2 对称性，将其

两边同乘以 d,得

$$G(d,\lambda,\alpha,\beta)=d^7+\beta d^5+\alpha d^3-\lambda d=0 \tag{10.2.32}$$

式(10.2.32)满足 $G(-d,\lambda)=-G(d,\lambda)$,故具有 Z_2 对称性。令 $u=d^2$,得

$$G(d,\lambda,\alpha,\beta)=R(u,\lambda,\alpha,\beta)d$$

$$g(d,\lambda)=d^7-\lambda d=r(u,\lambda)d$$

其中 $R(u,\lambda,\alpha,\beta)=u^3+\beta u^2+au-\lambda$, $r(u,\lambda)=u^3-\lambda$, $g(d,\lambda)\in\varepsilon_{d,\lambda}=(Z_2)$。由奇异性理论可知,$G(d,\lambda,\alpha,\beta)$是规范形 $g(d,\lambda)=d^7-\lambda d$ 的普适开折,且 $G(d,\lambda,\alpha,\beta)$是 Z_2 余维 2 的,即其有两个开折参数 α、β。系统的转迁集和分岔图如图 10-15 所示。其中:

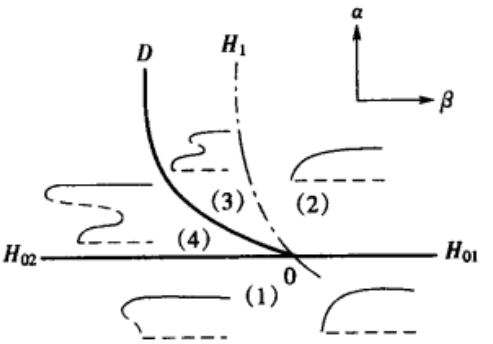


图 10-15 系统的转迁集和分岔图

①分岔集

$$B_0(Z_2)=B_1(Z_2)=\phi$$

②滞后集

$$H_{01}(Z_2)=\{\alpha=0,\beta>0\}$$

$$H_{02}(Z_2)=\{\alpha=0,\beta<0\}$$

$$H_1(Z_2)=\{\alpha=\beta^2/3,\beta\leqslant 0\}$$

③双极限集

$$D(Z_2)=\{\alpha=\beta^2/4,\beta\leqslant 0\}$$

比较两种方法所得的结果可知,两种方法得到的分岔形式是拓扑等价的。但是平均法得到的分岔方程实际上是级数解的第一项(即一阶近似解)的幅频方程。该方程没有体现出级数解的高阶项的影响,而且受平均法本身的限制,该分岔方程最高次项只有 6 次(若将 d^2 看作未知量则只有 3 次),因此最高只能研究余维 2 的分岔问题。此外,在处理强非线性问题时,还需要对平均法进行改进以适应强非线性。而拓展后的中心流形方法没有这些限制,可以对中心流形上流的方程取任意多阶进行研究。

10.2.4 系统的混沌行为分析

下面讨论带有记忆合金控制器的非线性刚性转子系统的混沌行为。对系统

$$\ddot{x} + \xi\dot{x} + \omega^2 x = -ax^3 + e\Omega^2\cos\Omega t + e\varepsilon\sin\Omega t$$

考虑到系统为强非线性，故作无量纲化：$y = kx$，$\tau = \omega t$，其中 $k = \sqrt{\frac{a}{\omega^2}}$，并定义 $\dot{y} = \frac{dy}{d\tau}$，$\ddot{y} = \frac{d^2y}{d\tau^2}$，得

$$\ddot{y} + r\dot{y} + y - y^3 = f\cos\lambda\tau \tag{10.2.33}$$

其中 $r = \frac{\xi}{\omega}$，$f = \frac{e\Omega^2\sqrt{a}}{\omega^3}$，$\lambda = \frac{\Omega}{\omega}$。对于轻型高速转子系统，有 $r = \frac{\xi}{\omega} \ll 1$，$f = \frac{e\Omega^2\sqrt{a}}{\omega^3} \ll 1$，故可将 r、f 视为小量。加上小量标志 ε，即有

$$\ddot{y} + y - y^3 = \varepsilon(-r\dot{y} + f\cos\lambda\tau) \tag{10.2.34}$$

定义函数

$$l(y) = y - y^3$$

$$m(y, \dot{y}, \lambda\tau) = -r\dot{y} + f\cos\lambda\tau$$

将式(10.2.34)化为标准形式，有

$$\left.\begin{aligned}\dot{y} &= z\\ \dot{z} &= -y + y^3 + \varepsilon(-r\dot{y} + f\cos\lambda\tau)\end{aligned}\right\} \tag{10.2.35}$$

该系统可视为系统

$$\left.\begin{aligned}\dot{y} &= z\\ \dot{z} &= -y + y^3\end{aligned}\right\} \tag{10.2.36}$$

受扰动 $\varepsilon(-r\dot{y} + f\cos\lambda\tau)$ 后的动力学方程。而对未扰系统(10.2.36)来说，其平衡点为(0,0)、(1,0)和(-1,0)。易知(0,0)为中心，(1,0)和(-1,0)为鞍点。故系统有过平衡点(1,0)和(-1,0)的异宿轨线 I。由于系统(10.2.36)为哈密尔顿系统，故可定义哈密尔顿函数

$$H: \frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}y^4 = h \tag{10.2.37}$$

该函数实际上表达了系统(10.2.36)的周期解族(随 h 不同取不同的解)。异宿轨线 I 也是周期解，故也满足式(10.2.37)。由于此时异宿轨线 I 过平衡点(1,0)和(-1,0)，故此时 $h = \frac{1}{4}$，即异宿轨线 I 可表达为

$$\frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}y^4 = \frac{1}{4} \tag{10.2.38}$$

由式(10.2.38)得

$$\dot{y} = \pm\frac{|y^2 - 1|}{\sqrt{2}}$$

下面仅对 $\dot{y} = \pm\frac{y^2 - 1}{\sqrt{2}}$ 进行研究。此时有

$$F = \frac{\quad}{\quad} - \frac{\quad}{\quad} \tag{10.3.2}$$

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{1+e^{\sqrt{2}\tau}}{1-e^{\sqrt{2}\tau}} \\ \dot{y} &= \frac{2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}\tau}}{(1-e^{\sqrt{2}\tau})^2} \end{aligned}\right\} \tag{10.2.39}$$

式(10.2.39)即为异宿轨线 I 的解析表达式。由此可得 Melnikov 函数

$$\begin{aligned} M(\tau_0, r, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} m[y(\tau), \dot{y}(\tau), \lambda(\tau+\tau_0)]\dot{y}(\tau)\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [-r\dot{y} + f\cos\lambda(\tau+\tau_0)]\dot{y}\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{10.2.40}$$

将式(10.2.39)代入式(10.2.40),积分得

$$M(\tau_0, r, f) = -\frac{2\sqrt{2}r}{3} + \sqrt{2}\pi\lambda f \operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\lambda\right)\cos\lambda\tau_0 \tag{10.2.41}$$

其中 csch 是雅可比椭圆函数。$M(\tau_0, r, f) = 0$ 为发生混沌的临界点,此时

$$\cos\lambda\tau_0 = \frac{2r}{3\pi\lambda f \operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\lambda\right)}$$

又因为$|\cos\lambda\tau_0| \leqslant 1$,故有

$$\left|\frac{2r}{3\pi\lambda \operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\lambda\right) f}\right| \leqslant 1 \tag{10.2.42}$$

式(10.2.42)刻画了系统发生混沌现象的参数临界值。将 r 和 f 的表达式代入,得

$$\left|\frac{2\xi}{3\pi\lambda^3 e\sqrt{a}\operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\lambda\right)}\right| \leqslant 1 \tag{10.2.43}$$

由式(10.2.43)可绘出系统发生混沌的参数边界线。

基于 Melnikov 方法得到的系统参数的混沌边界条件是必要条件。因此这一边界并非十分精确。混沌边界的充要条件的寻找一直是非线性研究的热点问题之一。

10.3 转子系统的主动控制

形状记忆合金的杨氏模量受温度的影响而变化,高温下的是低温下的 3 到 4 倍,剪切模量也有相同的关系。SMA 弹簧的弹性常数在较小温度范围内变化将近 3 倍,借用如下函数

$$y = 0.53\arctan[0.78\times(T-41.8)] + 1.75 \tag{10.3.1}$$

对形状记忆合金的刚度比—温度曲线进行拟合,其中 y 代表弹簧的刚度比,T 代表温度。采用记忆合金弹簧元件主动控制转子振动,通过电流加热改变弹簧元件的刚度,从而达到改变转子支承刚度的目的。首先建立 SMA 弹簧的力学模型

$$F=\frac{\pi a_1(T-T_M)xd^4}{8\pi D^3N}-\frac{a_2\pi x^3d^6}{12(\pi D^2N)^3D} \tag{10.3.2}$$

以及形状记忆合金弹簧的热力学模型

$$\tau\dot{T}+(T-T_\infty)=cP \tag{10.3.3}$$

$$\tau=\frac{\rho Vc}{hA}$$

$$c=\frac{1}{hA},$$

其中：τ 为系数；T 为温度，T_∞ 为环境的温度，ρ 为材料的密度，V 为体积，c 为材料的比热容，$P=I^2R$ 代表电流加热时的电功率，h 为对流系数，将 h 作为常数处理，A 为元件的表面积。选取 $\tau=2$ s，$c=50$ ℃W^{-1}，$T_\infty=25$ ℃。

下面建立对形状记忆合金丝的温度进行控制的控制系统，如图 10-16 所示。

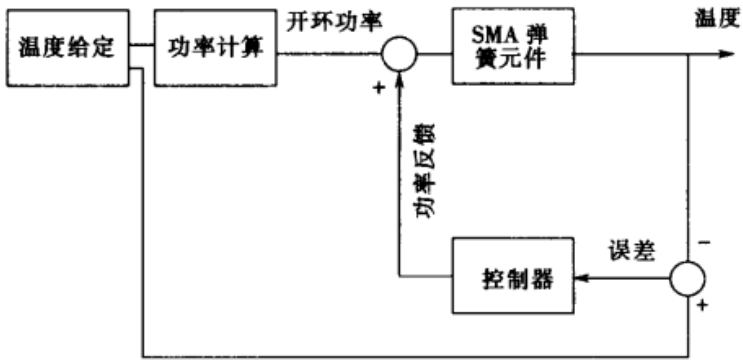


图 10-16　温控系统简图

其中温度给定环节是根据转子转速变化的规律，寻找合适的温度变化规律，使得在某个转速附近改变温度，从而改变系统的刚度，避开转子系统的固有频率，减小振动幅值。这个部分需要根据控制经验，确定比较合理的温度变化策略，找到描述该曲线的函数表达式。功率计算环节根据 NiTi 合金的热力学模型，即式(10.3.3)推出

$$P=\frac{1}{c}[\tau\dot{T}+(T-T_\infty)] \tag{10.3.4}$$

这样开环功率可根据温度给定的函数计算出来。控制器根据给定温度和实际温度的误差确定反馈量的大小，得到反馈功率，这样可以使元件的温度更好跟随给定温度的变化，提高系统性能。

仿真系统质量 $M=1$ kg，阻尼系数 $C=1$ N·s/m，选择转子偏心距 $e=0.05$ mm，弹性支承的刚度 $K=20$ kN/m，SMA 弹簧的参数选择如下：$N=6$，$D=10$ mm，$d=2$ mm，$T_M=22$ ℃，$T_A=60$ ℃，$a_1=1600$，$a_2=52\,800$，其刚度在低温(30 ℃)下为 12 kN/m，在高温(50 ℃)下约为 30kN/m。角加速度 $\varepsilon=2$ rad/s^2，仿真时间为 200 s。

下面首先计算系统在刚度分别保持不变时的情况。图 10-17 和图 10-18 分别是对转子

在大刚度和小刚度情况下的仿真结果。

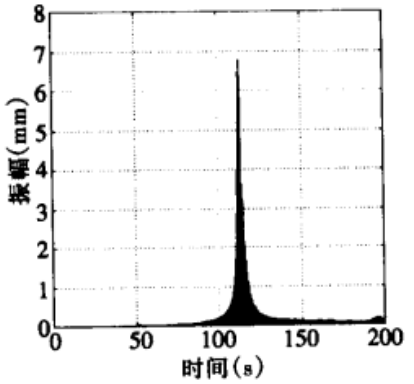


图 10-17 系统在大刚度下的振幅

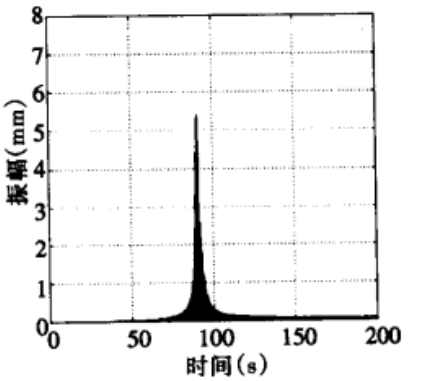


图 10-18 系统在小刚度下的振幅

由于采用了 $\varepsilon = 2\ \mathrm{rad/s^2}$ 的角加速度，系统的响应接近于稳态响应。在大刚度时，系统固有频率大，共振时激振力大(此时激振力为 $Me\omega^2$，ω 为系统固有频率)，故大刚度时的系统振幅(6.8 mm)反而大于小刚度时的振幅(5.4 mm)。我们的设想是一开始就对记忆合金控制器加热，使系统处于大刚度状态；当转速接近系统固有频率时，切换至小刚度状态。从图 10-17 和图 10-18 可以看出，刚性改变点在第 100 秒左右处。考虑到记忆合金的时滞特性和控制系统的反应速度，在第 99 秒处开始改变系统刚性。为此确定如下温度给定曲线。该曲线函数表达式为：

$$T(t) = 6.5\ \arctan[-2 \times (t - 99)] + 40$$

图 10-19 是对温度模块进行开环控制时转子振幅曲线，图 10-20 为进行闭环控制时振幅曲线。

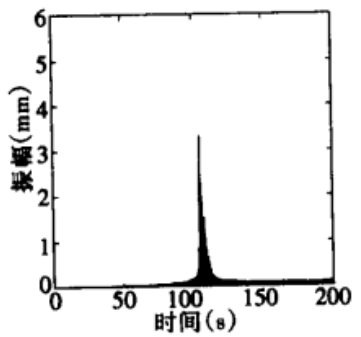


图 10-19 开环控制效果图

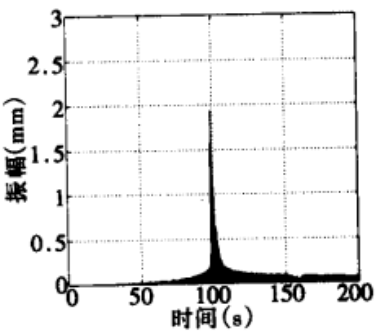


图 10-20 闭环控制效果图

可见，与系统刚度不变时(图 10-17 和图 10-18)相比，开环控制时系统最大振幅为 3.4 mm，减少为未加控制时的 63%，闭环控制时减少到 1.9 mm，减少为未加控制时的 35%，闭环时最大振幅为开环时的 56%。

为了提高主动控制效果，以不平衡力信号作为参考信号，并利用模糊控制原理，通过对

系统振幅的实时监测，建立如图 10-21 所示的控制系统。

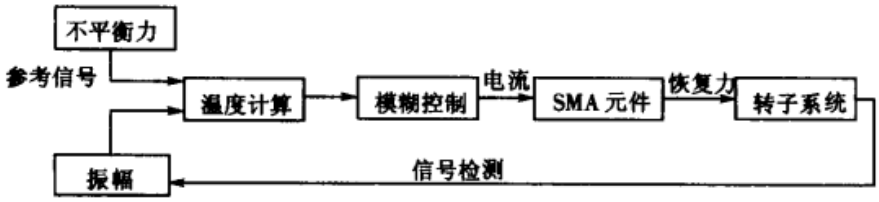


图 10-21　模糊控制系统结构图

我们的控制思想是以转子系统产生的不平衡力作为参考信号，试图以 SMA 提供的恢复力来抵消。不平衡力环节是指系统产生的不平衡力的参考信号。要得到其实时信号，在应用中需要根据系统的状态变量进行估算，这里使用非线性转子运动方程

$$\ddot{x} + \xi\dot{x} + \omega^2 x = -ax^3 + e\Omega^2\cos\Omega t + e\varepsilon\sin\Omega t$$

中的 $e\Omega^2\cos\Omega t$ 项作为不平衡力的参考信号。振幅环节代表实时检测到的系统的振幅。温度计算环节根据 SMA 弹簧的恢复力模型。把检测到的振幅信号和不平衡力参考信号分别作为模型中的位移和恢复力，计算得到温度大小的理论值。由于振幅和不平衡力有正值和负值，计算出来的温度也会出现正负交替的现象。模糊控制环节以计算得到的温度作为输入，利用软非线性转子振动的特点，设计温度和功率的成员函数以及控制法则如表 10-7 和图 10-22、图 10-23 所示，得到对 SMA 弹簧加热的电流功率的变化曲线。最后根据模糊控制输出的电流功率，对 SMA 弹簧元件的温度进行控制，从而控制了 SMA 的恢复力，改变系统的动态特性，实现主动控制减振的目的。

表 10-7　模糊控制的控制法则

温度	负大	负中	小	正中	正大
功率	大	中	小	中	大

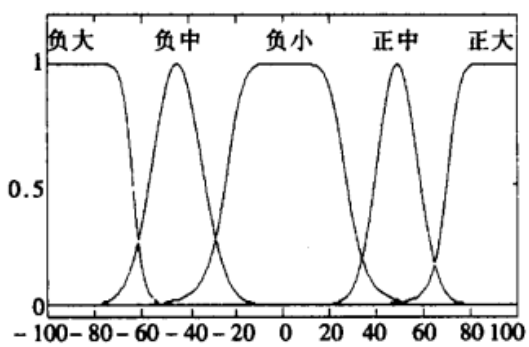


图 10-22　温度的成员函数图

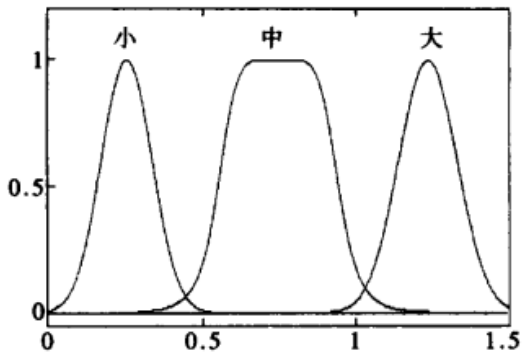


图 10-23　功率的成员函数图

仿真计算选用自适应步长的四阶/五阶龙格-库塔方法。令转子作角加速度为 2 rad/s^2

的匀加速运动，仿真时间为 200 s。仿真系统的参数仍参照第 6 章中的系统：质量 $M = 1$ kg，阻尼系数为 1 N·s/m，选择转子的偏心距 $e = 0.05$ mm，弹性支承的刚度为 20 kN/m。SMA 弹簧的参数选择如下：$N = 6$，$D = 10$mm，$d = 2$ mm，$T_M = 22$ ℃，$T_A = 60$ ℃，$a_1 = 1\ 600$，$a_2 = 52\ 800$。设定采样时间为 1 s。图 10-24、图 10-25 分别代表原系统采用闭环控制和采用模糊控制时转子振幅随时间变化的曲线。

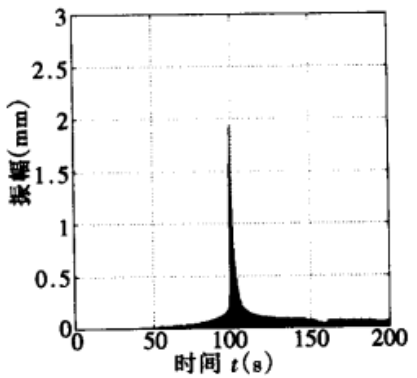


图 10-24 原闭环系统振幅—时间曲线

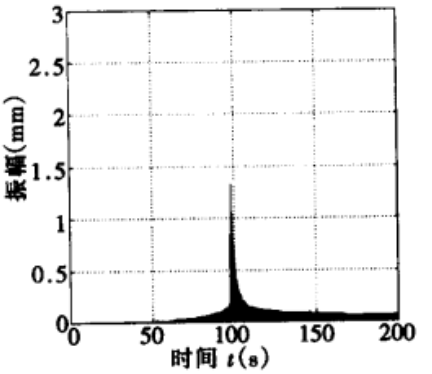


图 10-25 模糊控制时振幅—时间曲线

可见，闭环控制时最大振幅为 1.9 mm，采用模糊控制时转子最大振幅为 1.35 mm，减振效果达 30% 。

转子系统变刚度控制中的一个重要问题是转子瞬态响应的问题。刚度改变的过程虽然时间很短，仍然会产生瞬态振幅，其大小与刚度改变的大小以及改变时间有关。系统的响应将是稳态响应和瞬态响应合成的结果。受控转子系统稳态运动方程为 $m\ddot{x} + c\dot{x} + k(t)x = f + u(t)$，其中，$k(t)$代表在变刚度过程中刚度的变化规律，$f$ 为偏心力，$u(t)$为控制力。当刚度突然减小时，$k(t)x$ 必突然减小，由于速度及不平衡力不能突变，则 $m\ddot{x}$ 必突然增大，位移及速度也随之增大。经过一段时间过渡到另一个稳态。此时系统成为时变系统，可以通过采用时变设计方法设计控制力，抑制参数变化所产生的瞬态振幅。

由于支承刚度的变化可以看成分段线性过程，所以可以采用线性时变的设计方法。对于线性时变的系统，特别是对于具有周期性变化的时变参数，已经有很多设计方法，对于非周期性的时变参数，可采用极点配置方法。但是这种方法需要参数对时间的导数，由于不可能准确地测量时变参数，在对时间微分的过程中，测量的噪声不可避免地会放大，使得闭环系统出现振荡响应。其他如最优控制等方法，则需要知道参数的变化趋势。我们采用的控制方法只要知道参数过去和现在的信息，不需要对参数进行预测，也不需要对时变参数求导。

在参数识别的梯度算法中，对于参数估计误差的动态方程

$$\dot{z} = -\gamma\omega(t)\omega^{\mathrm{T}}(t)z(t), z(t)\in\mathbf{R}^n \tag{10.3.5}$$

其中 γ 是任意正常数，$z(t)$代表参数估算误差，$\omega(t)\in\mathbf{R}^{n\times m}$称为回归量，如果存在正常数

Δ、α_1、α_2，满足 $\alpha_1 I \leqslant \int_{t-\Delta}^{t} \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\tau)\boldsymbol{\omega}(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \alpha_2 I$，$\forall\, t>0$，则系统(10.3.5)是指数稳定的。

对于一个多变量线性的时变系统：

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}(t)x(t) + B(t)\boldsymbol{u}(t) \\ x(0) &= x_0 \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{aligned}\right\} \tag{10.3.6}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 是系统状态向量，$\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^m$ 是控制输入，$\boldsymbol{y}(t)\in\mathbf{R}^p$ 是系统输入，系统矩阵 $\boldsymbol{A}(t)\in\mathbf{R}^{n\times n}$，输入矩阵 $\boldsymbol{B}(t)\in\mathbf{R}^{n\times m}$，输出矩阵 $\boldsymbol{C}(t)\in\mathbf{R}^{p\times n}$ 为时变矩阵，其中的各元素是时间的分段连续函数，并假定状态转移矩阵 $\boldsymbol{\phi}(t,t_0)\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 对于所有的时间 t 和 t_0 均有界且不为零，我们的目标是设计一种控制方案，在只能得到系统的输出 $y(t)$的情况下，对系统进行镇定。

考虑基于状态观测器的反馈控制 $u(t) = -K\hat{x}(t)$，其中 $\hat{x}(t)$是 $x(t)$的估算值，同时假定系统完全可观和可控。首先进行坐标变换，令

$$x(t) = \phi(t,t_0)z(t)$$

其中 $z(t)$是新的坐标，该变换把系统状态 $x(t)$的稳定性问题转换为 $z(t)$的问题。转换后，新的系统方程为

$$\dot{z}(t) = \boldsymbol{\phi}(t,t_0)^{-1}\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$$

选择

$$\boldsymbol{u}(t) = -\gamma\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\phi}^{-\mathrm{T}}(t,t_0)z(t) \tag{10.3.7}$$

其中 λ 为任意正数，系统方程变为

$$\dot{z}(t) = -\gamma\phi(t,t_0)^{-1}B(t)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\phi}^{-\mathrm{T}}(t,t_0)z(t) \tag{10.3.8}$$

其中 $\boldsymbol{\phi}^{-1}(t,t_0)\boldsymbol{B}(t)$为回归量，此时闭环系统状态变量 $x(t)$指数收敛到零。

下面进行状态观测器的设计。假定系统中唯一可达的信号是系统输出 $y(t)$，为了估算 $x(t)$，设计龙伯格状态观测器

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + L(t)(y(t) - C(t)\hat{x}(t)) \tag{10.3.9}$$

其中 $\hat{x}(0) = \hat{x}_0$，$\hat{x}(t)\in R^n$ 是状态变量$x(t)$的估算值，$L(t)\in\mathbf{R}^{n\times p}$是观测器的反馈增益。由式(10.3.6)和式(10.3.9)得估算误差的动态方程

$$\dot{\tilde{x}} = [A(t) - L(t)C(t)]\tilde{x} \tag{10.3.10}$$

其中 $\tilde{x} = \hat{x} - x$。为设计 $L(t)$，同样进行坐标变换

$$\tilde{x}(t) = \phi(t,t_0)\tilde{z}(t)$$

则以上方程变为

$$\dot{\tilde{z}} = -\boldsymbol{\phi}^{-1}(t,t_0)L(t)C(t)\phi(t,t_0)\tilde{z}$$

同系统方程选择的方法相似，选择

$$L(t) = v\phi(t,t_)\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(t,t_0)C(t) \quad (v>0) \tag{10.3.11}$$

估算误差方程变为

$$\dot{\tilde{z}} = -v\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(t,t_0)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(t)C(t)\phi(t,t_0)\tilde{z}$$

这和方程(10.3.5)中的梯度算法的形式相同,此处回归量为 $\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(t,t_0)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(t)$,则在系统(10.3.6)完全可观的条件下,状态估算误差指数收敛到0。

下面以某型转子系统为例进行具体设计。转子系统方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k(t)x = f + u(t)$$

其中 m、c、k 分别为系统的质量、阻尼和刚度,e 为偏心距,ω 为角速度,$f = me\omega^2\cos(\omega t + \phi)$。系统参数仍按前述:$m = 1$ kg,$c = 1$ N·s/m,大刚度 $k_2 = 50$ kN/m,小刚度 $k_1 = 32$ kN/m(均为弹性支承刚度与记忆合金控制器刚度的叠加),选取角加速度为 2 rad/s^2。设计时令刚度切换时间为 20 ms 且是线性变化的,即

$$k(t) = (-1\,500t + 3\,050) \times 10^3 \text{ N/m}$$

下面使用以上梯度算法的理论设计状态反馈控制 $u(t) = -K\hat{x}(t)$。系统标准状态方程为

$$\dot{X} = A(t)X + B_1(t)f + B_2(t)u(t)$$

考虑到激励叠加的作用,且不平衡力 f 是不可控的,可对系统 $\dot{X} = A(t)X + B_2(t)u(t)$ 进行设计,以 $u(t) = -K\hat{x}(t)$ 来镇定时变参数引起的瞬态响应。根据以上的参数,系统方程如下所示:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-20 & (1\,500t - 3\,050)\times 10^3\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$

根据前面讨论的梯度算法,首先进行坐标变换,$x(t) = \phi(t,t_0)z(t)$,求出状态转移矩阵

$$\boldsymbol{\phi}(t,t_0) = I + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\int_{t_0}^{t} A(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau + \cdots$$

然后计算出 $\boldsymbol{\phi}^{-1}(t,t_0)$ 及其转置,并代入式(10.3.7),求出 $u(t) = -\gamma\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\phi}^{-\mathrm{T}}(t,t_0) \times \boldsymbol{\phi}^{-1}(t,t_0)x(t)$。再设计状态观测器,根据式(10.3.11)的结论,并代入 $\boldsymbol{C}(t) = (0,1)$,计算出 $\boldsymbol{L}(t)$。在分别计算出反馈控制 $\boldsymbol{u}(t)$ 和状态观测器的反馈 $L(t)$ 后,构造出反馈环节和观测器,组成转子闭环控制系统。

使用 MATLAB 的 SIMULINK 动态仿真,根据以上理论计算的结果,构造出系统结构图,对加入反馈控制的系统进行仿真。由于我们的控制主要针对记忆合金在刚性变化时的瞬态响应,为了屏蔽在刚性改变点之前系统在升速过程中由角加速度等因素造成的瞬态响应,以便更好地观察控制方案的效果,这里给予系统初始以稳态激励 $Me\omega_1^2\cos(\omega_1 t)$(其中 $\omega_1 = \sqrt{k_1/M}$),仅在刚性改变过程中给予角加速度 2 rad/s^2,刚性改变完成后给予稳态激励 $Me\omega_1^2\cos(\omega_2 t)$(其中 $\omega_2 = \sqrt{k_2/M}$)。在仿真中,考虑了实际变刚度时可能存在的参数的抖动,即刚度的线性变化加上了微小的扰动。图 10-26、图 10-27 分别是未加控制力和施加控

制力后变刚度过程中转子的瞬态响应。

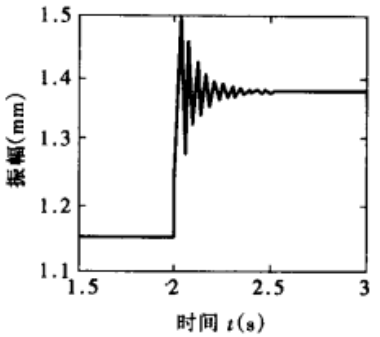


图 10-26　未控制时振幅—时间曲线

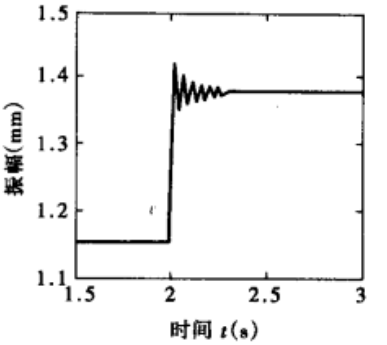


图 10-27　施加控制后振幅—时间曲线

从图 10-26 和图 10-27 可以看出，时变控制确实大大减小了系统的瞬态响应。对于一些高速转子系统，系统升降速时角加速度很大，此时时变控制对系统振幅的控制效果将会得到更好的体现。

第 11 章 非线性动力学理论在赤潮研究中的应用

赤潮是海洋中某些浮游藻类、原生动物和细菌在一定的环境条件下爆发性繁殖或聚集而引起海洋水体变色的一种有害生态异常现象。近 20 年来，随着工业化程度的提高，大量的营养物质(氮、磷、硅等)入海，造成了生态环境的富营养化，致使中国近海每年发生赤潮几十次，损失数十亿元，而且呈逐年增加的趋势。频繁发生的赤潮灾害已严重影响了沿海生态环境和经济的可持续发展，并给沿岸的海洋产业，如渔业、养殖业、旅游业等造成了巨大的经济损失。赤潮产生的毒素通过食物链的传递也严重威胁着人类的生命安全。

目前国内对于赤潮形成机理的研究多侧重于实验分析，或对所建模型进行数值模拟。实验分析有待于理论支持，而数值模拟则有其本身的缺点，特别是对于充满非线性因素的生态系统。赤潮的生态动力学模型的研究则是最有效和最有希望的方法(Geohab，2001)，运用非线性动力学理论可对赤潮生态模型进行严密的分析，可以克服一些不确定因素的影响，进而从更本质和更深层次去揭示赤潮的发生、发展和消亡的规律，研究结果对赤潮的预测和控制也有指导作用。

11.1 单种群赤潮生态模型的非线性动力学研究

11.1.1 “硅藻—氮—磷”生态动力学模型

“硅藻—氮—磷”生态动力学模型以赤潮代表性藻类——硅藻为研究对象，主要考虑影响藻类生长的理化因子氮和磷对藻类生长的影响，根据生物生长机理和氮、磷、藻之间的耦合和底物反馈机制，对各环境因子进行关联和模型合理简化而建立的多自由度非线性生态动力学模型。在此基础上，运用现代非线性力学的分岔理论对模型进行理论求解和讨论。根据分析结果，能够较为明确地发现影响藻类生长的限制性因子。

1.藻类生长营养动力学模型的建立

引发赤潮的生物在世界范围内约有 80 多个种属，除细菌和原生动物缢虫外，其余均为藻类。而在我国沿海海域的赤潮生物约 30 多个种属，不同季节和不同海域引发赤潮的藻类种属也不同，其中以甲藻和硅藻居多。以下选取具有代表性的硅藻为例，研究其生长规律与营养盐之间的关系。

基于有连续培养基的培养室内微生物的连续培养模式，并认为氮和磷两种营养盐对藻类生长的限制是互相独立的，即

$$\mu_{max} = \mu_{max,N}\mu_{max,P}g(N)g(P) \tag{11.1.1}$$

根据微生物生长的底物消耗抑制动力学模型方程，得到氮和磷限制的营养动力学模型如下：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= r_1[-(r+l_1)A + \mu_{max}g(N)g(P)A]\\ \frac{dN}{dt} &= r_2[l_2(N_0-N) - \omega_1\mu_{max}g(N)g(p)A + \varepsilon_1 A]\\ \frac{dP}{dt} &= r_3[l_3(P_0-P) - \omega_2\mu_{max}g(P)g(N)A + \varepsilon_2 A]\end{aligned}\right\} \tag{11.1.2}$$

其中营养增长函数符合 Monod 方程：

$$\left.\begin{aligned}g(N) &= \frac{N}{K_N+N}\\ g(P) &= \frac{P}{K_P+P}\end{aligned}\right\} \tag{11.1.3}$$

式中：A 代表 t 时刻藻类的密度；N、P 分别代表 t 时刻可溶性无机氮和可溶性无机磷的浓度；N_0、P_0 分别代表氮，磷的初始浓度；r_1、r_2、r_3 分别代表藻类、氮、磷的相对增长比率；l_1、l_2、l_3 分别为藻类、氮、磷的环境损耗率；r 为藻类的死亡率；ε_1、ε_2 分别代表藻类代谢分解及其他生物代谢对氮、磷浓度增长的贡献率(同浓度下)；ω_1、ω_2 分别代表藻类生长对氮、磷的吸收比率；μ_{max}为藻类的最大生长速率；K_N、K_P 分别代表藻类生长对氮和磷的半饱和常数。

2. *系统动力学方程的求解*

注意到式(11.1.2)所含分式展开后出现的关于氮和磷的高次非线性项，运用现代非线性动力学理论中的中心流形定理来判断方程解的稳定性。

首先，求方程的平衡点。方程(11.1.2)可以简化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \alpha_1 A + \beta_1 g(N)g(P)A\\ \frac{dN}{dt} &= \alpha_2(N_0-N) - \beta_2 g(N)g(P)A + \eta_1 A\\ \frac{dP}{dt} &= \alpha_3(P_0-P) - \beta_3 g(N)g(P)A + \eta_2 A\end{aligned}\right\} \tag{11.1.4}$$

其中：

$$\alpha_1 = -r_1(r+l_1),\quad \alpha_2 = r_2 l_2,\quad \alpha_3 = r_3 l_3,\quad \beta_1 = r_1\mu_{max},\quad \beta_2 = r_2\omega_1\mu_{axm}$$

$$\beta_3 = \omega_2 r_3\mu_{max},\quad \eta_1 = r_2\varepsilon_1,\quad \eta_2 = r_3\varepsilon_2$$

参考相关文献，选取以下模型参数：

$$r_1 = 13,\quad r_2 = 28,\quad r_3 = 0.8,\quad l_1 = 0.97,\quad l_2 = 0.4,\quad l_3 = 0.1,\quad r = 0.9$$

$$\mu_{max} = 3.0,\quad K_N = 4.0,\quad K_P = 0.54,\quad \varepsilon_1 = 2.10,\quad \varepsilon_2 = 0.28,\quad \omega_1 = 1.2,\quad \omega_2 = 0.2$$

令方程(11.1.4)右端为零，则

①当 $A=0$ 时,易得平衡点为(O,N_0,P_0),即初始状态。

②当 $A\neq 0$ 时,此即为 t 时刻藻类的浓度不为零。令 $N/P=k$,求出平衡点为

$$X^*=(A^*,N^*,P^*)$$

作如下线性变换:

$$\begin{cases} x=A-A^* \\ y=N-N^* \\ z=P-P^* \end{cases}$$

将上式带入方程(11.1.2),同时将 $g(N)g(P)$进行泰勒展开,分离线性项和高次项得

$$\boldsymbol{\theta}'=\boldsymbol{K}\boldsymbol{\theta}+f(\boldsymbol{\theta}) \tag{11.1.5}$$

其中 $\boldsymbol{\theta}=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{K}$ 为线性项系数矩阵,$f(\theta)$为高次项。$f(\theta)=(f_1(\theta),f_2(\theta),f_3(\theta))^{\mathrm{T}}$

$$\begin{aligned} f_1(\theta)=&\frac{-\beta_1K_NA^*P^*}{(K_N+N^*)^3(K_P+P^*)}y^2+\frac{\beta_1K_NA^*P^*}{(K_N+N^*)^2(K_P+P^*)}xy\\ &+\frac{\beta_1K_NA^*P^*}{(K_N+N^*)(K_P+P^*)^2}xz+\frac{-\beta_1K_NK_PA^*}{(K_N+N^*)^2(K_P+P^*)^2}yz\\ &+\frac{-\beta_1K_NA^*N^*}{(K_N+N^*)(K_P+P^*)^2}z^2+\text{h.o.t.}\\ f_2(\theta)=&\frac{-\beta_2K_NA^*}{(K_N+N^*)^3}y^2-\frac{\beta_2K_N}{(K_N+N^*)^2}xy\\ &-\frac{\beta_2K_NA^*}{(K_N+N^*)^4}y^3+\frac{\beta_2K_N}{(K_N+N^*)^3}xy^2+\text{h.o.t.}\\ f_3(\theta)=&\frac{\beta_3K_PA^*}{(K_P+P^*)^3}z^2+\frac{\beta_3K_P}{(K_P+P^*)^2}xz\\ &-\frac{\beta_3K_PA^*}{(K_P+P^*)^4}z^3+\frac{\beta_3K_PA^*}{(K_P+P^*)^3}xz^2+\text{h.o.t.} \end{aligned}$$

平衡点处的雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} 0 & s_1 & s_2 \\ t_1 & -s_1-\alpha_2 & -s_2 \\ t_2 & -s_1 & -s_2-\alpha_3 \end{bmatrix}$$

其中:

$$s_1=\frac{-\alpha_1K_NA^*}{N^*(K_N+N^*)},\quad s_2=\frac{-\alpha_1K_PA^*}{N^*(K_P+P^*)},\quad t_1=\frac{\eta_1\beta_1+\beta_2\alpha_1}{\beta_1},\quad t_2=\frac{\eta_2\beta_1+\beta_3\alpha_1}{\beta_1}$$

计算 $\boldsymbol{K}$ 的特征值,得

$$\lambda_1=s_2+\frac{s_1t_1\alpha_3}{\alpha_2t_2},\quad \lambda_2=t_1,\quad \lambda_3=\frac{\alpha_2t_2}{t_1}$$

易知 $\lambda_2,\lambda_3\neq 0$。故令 $\lambda_1=0$。其对应的特征向量分别为

$$\zeta_1=\begin{pmatrix}1 & \frac{t_1}{\alpha_2} & \frac{\alpha_2}{t_2}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},\quad \zeta_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{t_2-t_1}{t_1+\alpha_3}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},\zeta_3=\begin{pmatrix}1 & \frac{t_1^2-\alpha_2 t_2}{\alpha_2 t_1-\alpha_2 t_2} & \frac{t_1 t_2-\alpha_2 t_2}{\alpha_3 t_1-\alpha_3 t_2}\end{pmatrix}$$

由特征向量求取的线性变换矩阵为

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ \frac{t_1}{\alpha_2} & 0 & \frac{t_1^2-\alpha_2 t_2}{\alpha_2 t_1-\alpha_2 t_2}\\ \frac{\alpha_3}{t_2} & \frac{t_2-t_1}{t_1+\alpha_3} & \frac{t_1 t_2-\alpha_2 t_2}{\alpha_3 t_1+\alpha_2 t_2}\end{pmatrix}$$

代入参数得

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 3.063 & 0 & 2.767\\ -0.069\,7 & -1.154 & 2.622\end{bmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}-0.372\,8 & 0.440\,8 & -0.323\,0\\ 0.960\,1 & -0.314\,2 & -0.034\,6\\ 0.412\,7 & -0.126\,6 & 0.357\,6\end{bmatrix}$$

作线性变换

$$(x,y,z)^{\mathrm{T}}=T(u,v,w)^{\mathrm{T}}$$

则原来的微分方程(11.1.5)可以化为

$$\phi'=\boldsymbol{D}\phi+\mathrm{T}^{-1}f(T\phi)\tag{11.1.6}$$

其中

$$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}\begin{pmatrix}0 & t_1 & \frac{\alpha_2 t_2}{t_1}\end{pmatrix},\boldsymbol{\phi}=(u\quad v\quad w)^{\mathrm{T}}$$

把各参数代入式(11.1.6)得

$$\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix}'=\begin{bmatrix}0 & & \\ & t_1 & \\ & & \frac{\alpha_2 t_2}{t_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-.0372\,8f_1(T\phi)+0.440\,8f_2(T\phi)-.032\,30f_3(T\phi)\\ 0.960\,1f_1(T\phi)-0.314\,2f_2(T\phi)-0.034\,6f_3(T\phi)\\ 0.412\,7f_1(T\phi)-0.126\,6f_2(T\phi)+0.357\,6f_3(T\phi)\end{bmatrix}\tag{11.1.7}$$

由中心流形定理,设

$$\begin{cases}v=b_2u^2+b_3u^3+b_4u^4+\cdots\\ w=c_2u^2+c_3u^3+c_4u^4+\cdots\end{cases}$$

代入方程(11.1.7)的(2)和(3)式,比较等式两端同次幂系数后得

$$b_2=0,\quad b_3=0.500\alpha_2\alpha_3,\quad b_4=0.125t_1\alpha_1\alpha_2+0.416\,7\alpha_2^2\alpha_3t_2/t_1$$

$$c_2=0.500\alpha_3,\quad c_3=0.166\,7\alpha_2\alpha_3t_2/t_1$$

$$c_4 = 0.251 \times \left[\frac{\alpha_2^2 t_2^2 \alpha_3}{t_1^2} + \frac{\beta_3 \alpha_3 K_P}{(K_P + P^*)^2} - \frac{\alpha_3 \beta_3 (t_1 - t_2) K_P A^* P^*}{(K_N + N^*)(K_P + P^*)^2} \right]$$

精确到三次方的中心流形为

$$W^c = \left\{ \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \middle| \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.500\alpha_2\alpha_3 u^3 + O(u^4) \\ -0.500\alpha_3 u^2 - \dfrac{0.166\,7\alpha_2\alpha_3 t_2}{t_1} u^3 + O(u^4) \end{pmatrix} \right\}$$

将该中心流形代入式(11.1.7)的(1)式,得到中心流形上的方程

$$u' = \left[0.243\,0 \times \left(1 - \frac{\beta_2 t_1}{\beta_1 \alpha_2 t_2} + \frac{1}{\alpha_2} \right) \frac{\beta_1 A^* N^*}{K_N + N \times} + \frac{0.251\,4\beta_3 t_1}{\alpha_2 t_2} \right] \frac{-\alpha_3 K_P s_1}{(K_P + P^*)^2} u^3 + O(u^4)$$

令 u^3 的系数为 C,则 C 的符号取决于

$$m = 0.243\,01 \times \left(1 - \frac{\beta_2 t_1}{\beta_1 \alpha_2 t_2} + \frac{1}{\alpha_2} \right) - \frac{\beta_1 A^* N^*}{K_N + N^*} + \frac{0.251\,4\beta_3 t_1}{\alpha_2 t_2}$$

代入各参数,得

$$m = \frac{10.086k^2 - 168.554k - 0.076\,0}{(1.12k + 0.239\,0)(30.957k + 0.956)}$$

由分岔理论知,当系统发生分岔时,有 $m = 0$,此时求得

$$k_1 \approx 0, k = 16.71$$

3. *系统动力学行为的分析和数值仿真*

由于 $k = N/P$,当 $k = 0$ 时有 $N = 0$,即表示海水中不含有营养盐氮,而这在实际中很难出现,因此 $k = 0$ 无实际意义,下面就 $k = 16.71$ 展开讨论。

①$k = 16.71$ 时,$P^* = 1.382$,$N^* = 23.096$,$A^* = 32.36$。海洋学家认为,大洋中的无机氮和磷的比为 16:1(Redfield 比值)。一般认为,比值过高或过低都会影响藻类的生长。另外由此计算出的引发藻类急剧繁殖的限制性营养盐磷的浓度与林昱等实验研究得出的引发中肋骨条藻的 DIP 值应大于 1.2 μmol/L 也较为一致。

②$k > 16.71$ 时,$C < 0$,系统趋于稳定。此时,磷处于相对缺乏状态,为限制性环境因子。因此藻类生长速率较慢,死亡率和环境损耗率大于生长速率,藻类浓度减小,甚至趋于消亡。

③$k > 16.71$ 时,$C > 0$,系统不稳定。此时,限制性因子磷相对充足,使得藻类繁殖增快,浓度迅速增加,从而形成一次赤潮。Redfield 等认为,在海洋中,任何氮的缺乏都可以有来自于浮游生物的固氮作用所弥补,而磷的补充则只受物理因素的影响,恢复相对较慢,因而磷在很大意义上是海水中藻类生长的限制性营养盐。

④当 $\lambda_1 = 0$ 时,可以得出 $k = 16.2$,即为模型方程的解产生分岔时 k 的取值,与模型的最终分析结果基本一致。

为了检验理论结果,根据所选模型参数值在计算机上用 MATLAB 进行仿真,下面给出仿真结果。其中藻类浓度单位为 μg/L,氮、磷的浓度单位为 μmol/L。

图 11-1、图 11-2 和图 11-3 是藻类、氮和磷的浓度随时间变化图。由于环境因素以及藻

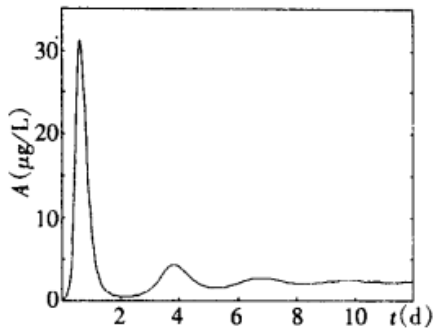


图 11-1　藻类浓度随时间变化曲线

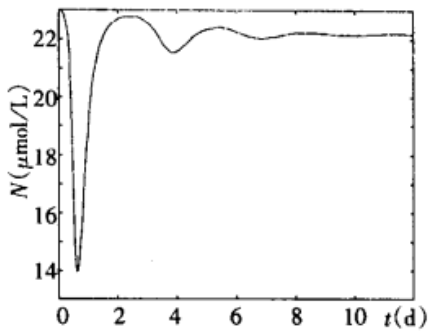


图 11-2　氮浓度随时间变化的曲线

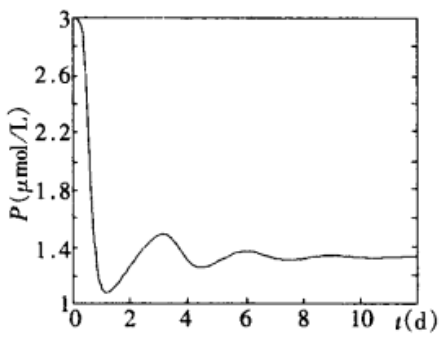


图 11-3　磷浓度随时间变化的曲线

类本身生理特性的限制，藻类的生长表现出渐进的周期性。当周围环境适宜时，一定种群密度的藻类开始迅速生长，同时消耗周围环境的营养物质。当藻类的密度大于一定的值时，形成第一次赤潮。而当藻类密度第一次达到峰值（此时赤潮的影响最为严重）时，藻类对周围环境的利用达到极限。随后，由于营养盐限制（由图易知，同时期的氮和磷浓度降低到较低值）藻类的浓度开始急剧下降，直到很低的水平。由于藻类密度的急剧减少，藻类代谢和死亡藻类的降解，以及洋流的扩散作用，营养盐的浓度逐渐恢复。藻类在此条件下又进入急剧增长期，从而形成第二次赤潮（第二次峰值的出现）。因为营养盐的浓度比第一次时小，所以藻类浓度的峰值较第一次小。随后，藻类浓度随时间继续振荡，最后趋于平衡，见图 11-1。由图 11-2 和图 11-3 可知，营养盐氮和磷的浓度随时间变化亦呈周期变化，经几度振荡后趋于恒定值，而且峰值呈衰减趋势。比较图 11-2 和图 11-3 可知，磷的浓度在经过几次周期振荡后趋于极低的水平，而氮的浓度经过几次周期振荡后趋于初始的水平。这反映了磷在赤潮的发生过程中是限制性营养盐，其浓度水平直接影响赤潮的发生过程。比较图 11-1、图 11-2 和图 11-3 可知，当藻类的浓度最大时，氮和磷的浓度也逐渐降到最低值，但有一定的延迟。

图 11-4、图 11-5 和图 11-6 分别表示出了藻类浓度与氮浓度、藻类浓度与磷浓度以及氮浓度与磷浓度的时间历程图，图中的曲线皆收敛于一点。图 11-6 表征了赤潮发生过程中氮和磷的浓度变化。由图易知，氮的浓度经过几次周期振荡后能基本恢复到初始水平，而磷的浓度在几次周期振荡后趋于较低的水平。稳定点处的氮磷比值接近于 16:1，仿真结果和实际非常接近。

上述理论分析和仿真结果表明，在藻类生长过程中营养盐对藻类起着重要作用。在忽略其他物理因素的影响下，磷的浓度对藻类的生长影响最大，为限制性因子。模型的分析结果和有关文献的实验结果基本一致，仿真结果与赤潮的实际发生过程基本一致，因此理论分析结果与仿真结果是吻合的。

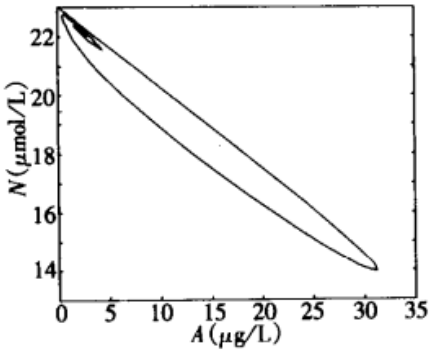


图 11-4 藻类浓度与氮浓度的相图

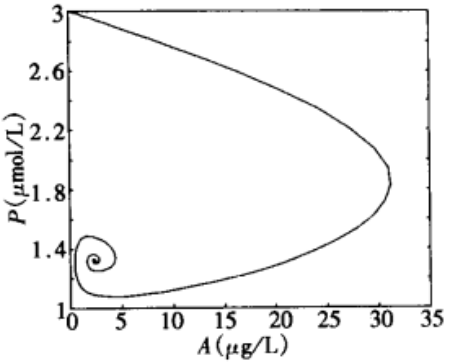


图 11-5 藻类浓度与磷浓度的相图

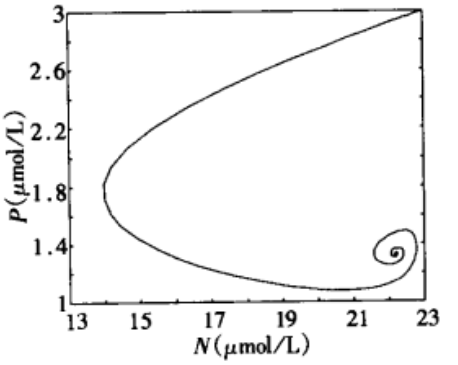


图 11-6 氮浓度与磷浓度的相图

11.1.2 “中肋骨条藻—浮游植物—浮游动物”生态动力学模型

“中肋骨条藻—浮游植物—浮游动物”生态动力学模型是根据对渤海湾历年发生赤潮的数据进行分析综合的基础上，结合渤海湾的典型赤潮藻类——中肋骨条藻，考虑了多方面因素的影响(营养物质、高等动物捕食、光照等)建立的以 N、P、Z 为变量的中肋骨条藻的生态动力学模型。在利用现代非线性动力学理论对模型进行稳定性研究的基础上，发现某些参数的变化可以致使变量发生分岔乃至混沌行为，在实际意义上，也就是导致了中肋骨条藻出现了爆发性的增长(赤潮的发生)。

1. 系统生态动力学模型的建立

根据中肋骨条藻赤潮发生时形成的营养物质—中肋骨条藻—浮游动物形成的一个简单的食物链，考虑光照强度的影响，建立渤海湾典型赤潮藻类中肋骨条藻的生态动力学模型：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= -\frac{N}{e+Nb+cP}\frac{a}{}P + k(N_0 - N)\\ \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} &= \varepsilon_1 \frac{N}{e+Nb+cP}\frac{a}{}P - \lambda(1-\mathrm{e}^{-\alpha P})Z - (s+k)P\\ \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} &= \varepsilon_2\lambda(1-\mathrm{e}^{-\alpha P})Z - \mathrm{d}Z^2\end{aligned}\right\} \tag{11.1.8}$$

式中：$N(t)$代表营养物质，包括氮、磷等营养元素的浓度总合随时间的变化；$P(t)$代表中肋骨条藻密度随时间的变化；$Z(t)$代表浮游动物密度随时间的变化。

藻类的食物链模型结构如图 11-7 所示。其他各参数意义及其取值范围如表 11-1 所示。

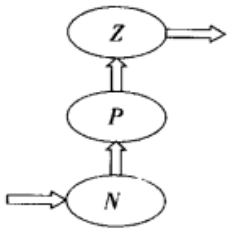


图 11-7　藻类的食物链模型结构

表 11.1　各参数意义及其取值范围

符号	意义	默认取值	取值范围
a	赤潮藻的生长率	0.2	0.1 ~ 0.6
b	光在水中的衰变率	0.2	0.04 ~ 0.2
c	赤潮藻的自屏蔽作用	0.4	0.3 ~ 1.2
d	高等动物的捕食	1	0.25 ~ 1.0
e	吸收营养盐的半饱和常数	0.03	0.02 ~ 0.15
k	通过跃层的交换率	0.05	0.000 8 ~ 0.13
s	赤潮藻的沉降率	0.04	0.032 ~ 0.08
λ	浮游动物的最大摄食率	0.6	0.6 ~ 1.4
α	浮游动物摄食半饱和系数	0.035	0.02 ~ 0.1
N_0	定量输入的营养物质浓度	0.6	0.1 ~ 2.0
ε_1	赤潮藻的营养转化率	0.9	0.2 ~ 0.99
ε_2	浮游动物的营养转化率	0.9	0.2 ~ 0.99

考虑浮游动物对藻类的消耗时，采用了 Holling Ⅱ 型 Watt 功能性反应方程（陈兰荪，1988）。

考虑光照对藻类生长的影响时，采用了 Steele 公式（Edwards etc，1999）。

考虑营养物质对藻类的生长影响时，采用了米门公式(S.E.扬戈逊)。

2. 系统的稳定性分析

根据模型方程的基本特征，注意到食物链模型中各元素的物理意义及在实际发生过程中相互影响、耦合，运用 Lyapunov 运动稳定性理论来判断变量各状态的稳定性。

首先求方程的平衡点，令方程(11.1.8)的左端为零，即

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}&=0\\ \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}&=0\\ \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}&=0\end{aligned}\right\} \tag{11.1.9}$$

解方程(11.1.9)得模型方程的平衡点 $Q(N^*, P^*, Z^*)$。作坐标平移，令

$$\begin{cases} u = N - N^* \\ v = P - P^* \\ w = Z - Z^* \end{cases}$$

并令

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f_1(u, v, w) \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} f_2(u, v, w) \\ \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} f_3(u, v, w) \end{cases}$$

可得模型方程(11.1.9)的线性部分的雅可比矩阵

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \dfrac{-aeP^*}{(e+N^*)^2(b+cP^*)} - k & \dfrac{-abN^*}{(e+N^*)(b+cP^*)^2} & 0 \\ \dfrac{\varepsilon_1 aeP^*}{(e+N^*)^2(b+cP^*)} & -(s+k) + \dfrac{\varepsilon_1 abN^*}{(e+N^*)(b+cP^*)^2} - a\lambda Z^* \mathrm{e}^{-aP^*} & -\lambda(1-\mathrm{e}^{-aP^*}) \\ 0 & \varepsilon_2 a\lambda Z^* \mathrm{e}^{-aP^*} & -2dZ^* + \varepsilon_2\lambda(1-\mathrm{e}^{-aP^*}) \end{bmatrix}$$

由方程(11.1.9)可知,系统的平衡点 $Q(N^*, P^*, Z^*)$只有3种情况:①$(N_0, 0, 0)$,其中 $N_0 \neq 0$;②$(N_i^*, P_i^*, 0)$,其中 $N_i^* \neq 0$ 且 $P_i^* \neq 0$;③(N^*, P^*, Z^*),其中 N^*、P^*、Z^* 均不为0。下面分别考虑3种定常状态的稳定性。

①对于平衡点$(N_0, 0, 0)$,其物理意义对应于初始水平,藻类和浮游动物密度均为零,此时的雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -k & \dfrac{-aN_0}{b(e+N_0)} & 0 \\ 0 & -(s+k) + \dfrac{\varepsilon_1 aN_0}{b(e+N_0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由稳定性理论,定常状态的稳定性取决于所对应的雅可比矩阵的特征值。对应于$(N_0, 0, 0)$,$\boldsymbol{K}$ 的三个特征值分别为 $-k$、Φ、0,其中 $\Phi = -(s+k) + \dfrac{\varepsilon_1 aN_0}{b(e+N_0)}$。

由于对应矩阵的特征值有一个为零,所以要利用中心流形定理对原方程进行降维处理。经过分析得到,当 $\Phi = -(s+k) + \dfrac{\varepsilon_1 aN_0}{b(e+N_0)} < 0$ 时,此状态是稳定的;当 $\Phi = -(s+k) + \dfrac{\varepsilon_1 aN_0}{b(e+N_0)} > 0$ 时,此状态是不稳定的;当 $\Phi = -(s+k) + \dfrac{\varepsilon_1 aN_0}{b(e+N_0)} = 0$ 时,此状态对应的矩阵有两个为零的特征值,此时将会发生余维2的跨临界分岔。而对于所给定的所有参数在其变化范围内,总有 $\Phi > 0$,也就是说,定常状态$(N_0, 0, 0)$总是不稳定的,任何一个微小的扰

动都会让它偏离$(N_0,0)$这个平衡位置,所以在实际的海域中,此种状态不可能稳定地存在。

②对于平衡点$(N_i^*,P_i^*,0)$,有两种情况,即$(N_1^*,P_1^*,0)$和$(N_2^*,P_2^*,0)$。其中N_1^*、N_2^*由方程

$$ck\varepsilon_1 N^2+[\varepsilon_1 a-b(s+k)+ck\varepsilon_1(e-N_0)]N-[b(s+k)+ck\varepsilon_1 N_0]e=0$$

求得,P_1^*、P_2^*由方程

$$P_i^*=\frac{b\varepsilon_1(N_0-N_i^*)}{s+k}\quad(i=1,2)$$

求得。

因为

$$N_1^*N_2^*=-\frac{[b(s+k)+ck\varepsilon_1 N_0]e}{ck\varepsilon_1}<0$$

所以两根必异号,设$N_1^*>0$,$N_2^*<0$。对于N_2^*无实际意义,因此只考虑N_1^*。对应$(N_1^*,P_1^*,0)$的雅可比矩阵为

$$\begin{bmatrix}\dfrac{-aeP_1^*}{(e+N_1^*)^2(b+cP_1^*)}-k & \dfrac{-abN_1^*}{(e+N_1^*)(b+cP_1^*)^2} & 0\\ \dfrac{\varepsilon_1 aeP_1^*}{(e+N_1^*)^2(b+cP_1^*)} & -(s+k)+\dfrac{\varepsilon_1 abN_1^*}{(e+N_1^*)(b+cP_1^*)^2} & -\lambda(1-e^{-aP_1^*})\\ 0 & 0 & \varepsilon_2\lambda(1-e^{-aP_1^*})\end{bmatrix}$$

考虑其第三行,矩阵必有一特征值为$\varepsilon_2\lambda(1-e^{-aP_1^*})$且定大于零,所以此状态不稳定。

③对于第三种定常状态(N^*,P^*,Z^*),也就是食物链中的3种主体都存在的情况,也是赤潮发生的基础条件。此时,其雅可比矩阵为

$$\begin{bmatrix}\dfrac{-aeP^*}{(e+N^*)^2(b+cP^*)}-k & \dfrac{-abN^*}{(e+N^*)(b+cP^*)^2} & 0\\ \dfrac{\varepsilon_1 aeP^*}{(e+N^*)^2(b+cP^*)} & -(s+k)\dfrac{\varepsilon_1 abN^*}{(e+N^*)(b+cP^*)^2}-a\lambda Z^*e^{-aP^*} & -\lambda(1-e^{-aP_1^*})\\ 0 & \varepsilon_2 a\lambda Z^*e^{-aP^*} & -2dZ^*+\varepsilon_2\lambda(1-e^{-aP^*})\end{bmatrix}$$

其中$Z^*=\dfrac{\varepsilon_2\lambda(1-eaP^*)}{d}$。代入式(11.1.8)中的第一式和第二式可求得关于N^*、P^*的两个高次方程,但是无法解出具体的表达式。因此,下面借助于数值的方法对其稳定性和分岔情况进行探讨。

3. Hopf 分岔及混沌的存在

利用现代非线性分岔与混沌理论可以较好地解决复杂情况下系统状态出现的失稳及突变现象,这与赤潮的产生密切相关。

各参数采用表11-1中的默认值,可以算出初始条件$(N,P,Z)=(0.4,0.1,0.05)$。

选取参数初始浓度 N_0 作为分岔参数对系统进行研究，分别让 N^0 取不同的值进行分析。结果如图 11-7(a)(b)所示。

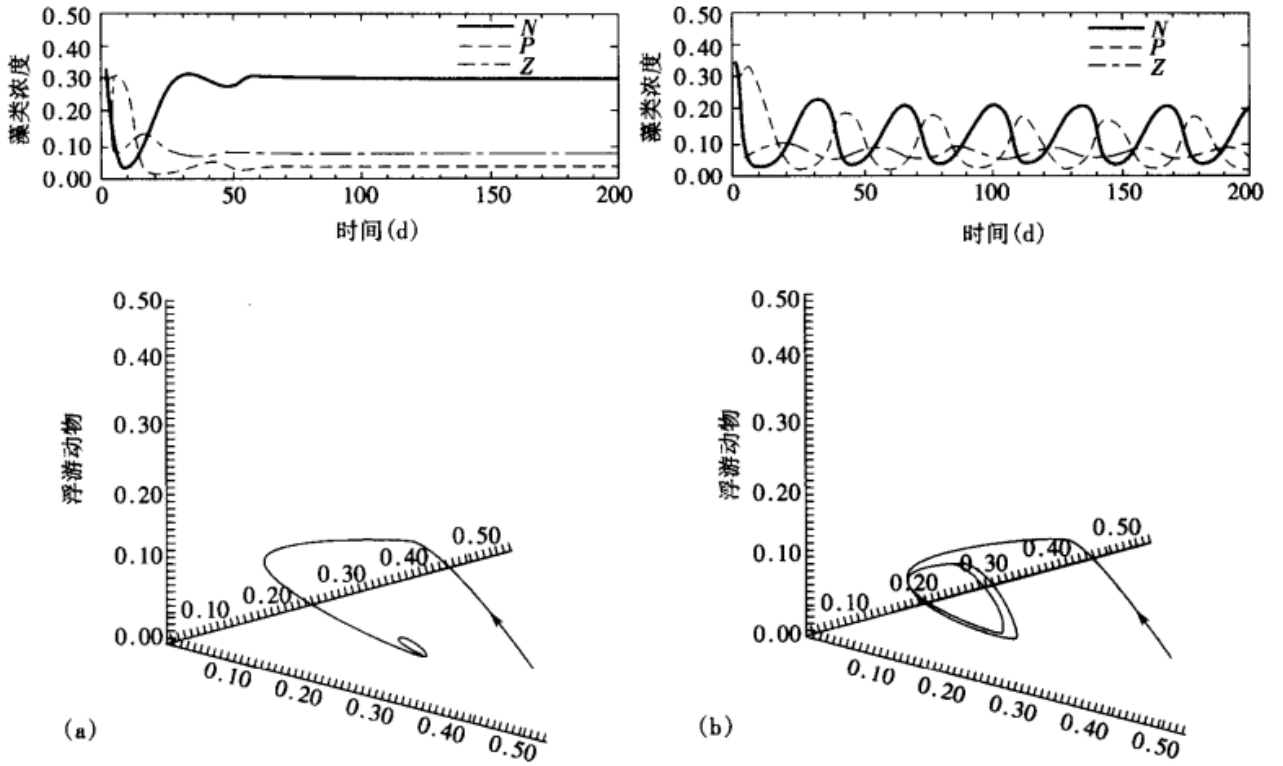


图 11-7 N 与 Z 的时间历程图

(a) $N_0 = 0.8$ 时；(b) $N_0 = 2.0$ 时

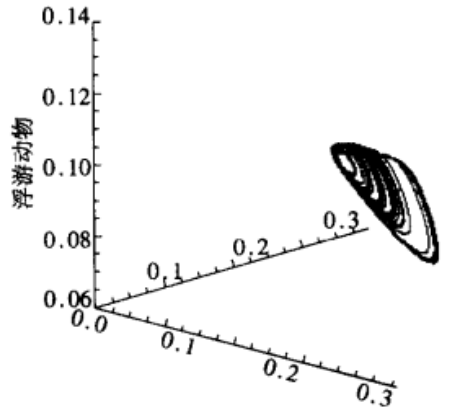


图 11-8 $N_0 = 6.0$ 时 N 与 Z 的时间历程图

对于图 11-7(a)，当 $N_0 = 0.8$ 时，系统经过轻微的振荡过程趋于稳定；对于图 11-7(b)，当 $N_0 = 2.0$ 时，系统发生剧烈振荡并且持久进行。

由 Hopf 分岔理论可知，当 N_0 在这个区间变化时，导致系统发生了 Hopf 分岔，系统从趋于一个稳定解变化为趋于一个极限环。

当 N_0 继续变大时，系统将会出现更加复杂的情况以至于混沌的产生，此时，$N_0 = 6.0$，其他参数取默认值，如图 11-8 所示。

导致混沌的途径很多，可以通过倍周期分岔、切分岔、准周期道路和阵发(间歇)道路产生。本系统混沌行为的产生途径还有待去研究，这对于了解赤潮产生以至于最后控制赤潮都很有意义。至于赤潮的产生是因为分岔导致还是混沌的行为，至今

尚无定论，有待于进一步研究。但有一点可以肯定，赤潮的爆发性增值肯定与系统的分岔和混沌行为有关，这是今后着重研究的方向。

11.2　多种群赤潮生态模型的非线性动力学研究

11.2.1　“营养物质—硅藻—夜光藻”生态动力学模型

本节内容依据相关文献资料，通过分析多种群赤潮生态动力学模型，根据种群食物链营养物质增加—浮游植物(硅藻)大量繁殖—夜光藻的迅速繁殖—发生赤潮的反馈机制，建立反映各种生态要素的多参数模型。选取主要影响参数作为控制变量，对模型方程解的稳定性进行深入的研究。

1. 多种群赤潮食物链模型

根据夜光藻赤潮发生时形成的营养物质—硅藻—夜光藻形成的一个简单的食物链，利用多种群生态学原理，建立夜光藻营养动力学模型：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= rc_1(E_0 - E) - \frac{raES}{E_m + E}\\ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= -(\gamma + c_2)S + \frac{\varepsilon_1 aES}{E_m + E} - b(1 - \mathrm{e}^{-\beta S})N\\ \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= -(\delta + c_3)N + \varepsilon_2 b(1 - \mathrm{e}^{-\beta S})N\end{aligned}\right\} \tag{11.2.1}$$

式中：$E = E(t)$、$S = S(t)$、$N = N(t)$分别为随时间变化的营养物质浓度、硅藻密度、夜光藻密度；E_0 为定量输入的营养物质浓度；E_m 为营养物质浓度增长的半饱和参数；c_1、c_2、c_3 为营养物质、硅藻、夜光藻的环境损耗率；r 为营养物质的相对增长比例；a、b 和 γ、δ 分别为硅藻、夜光藻的增长率和死亡率；ε_1、ε_2 分别为硅藻、夜光藻的吸收营养转换率，且 $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < 1$；$\beta$ 为硅藻增长的饱和率水平。

2. 系统的运动稳定性分析

根据模型方程的基本特征，注意到食物链模型中各元素的物理意义及在实际发生过程中相互影响、耦合，运用 Lyapunov 运动稳定性的判定条件及其相关稳定理论来判断模型方程的稳定性。

首先求方程的平衡点，令方程(11.2.1)的左端为零，即

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= 0\\ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= 0\\ \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= 0\end{aligned}\right\} \tag{11.2.2}$$

解方程(11.2.2)得模型方程的平衡点 $Q(E^*, S^*, N^*)$。作坐标平移,令

$$\begin{cases} u = E - E^* \\ v = S - S^* \\ w = N - N^* \end{cases}$$

则方程(11.2.1)可化为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= rc_1(E_0 - E^* - u) - \frac{ra(u+E^*)(v+S^*)}{E_m + u + E^*} \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -(\gamma + c_2)(v+S^*) + \frac{\varepsilon_1 a(u+E^*)(v+S^*)}{E_m + u + E^*} - b(1-\mathrm{e}^{-\beta(v+S^*)})(w+N^*) \\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= -(\delta + c_3)(w+N^*) + \varepsilon_2 b(1-\mathrm{e}^{-\beta(v+S^*)})(w+N^*) \end{aligned}\right\} \tag{11.2.3}$$

则可得模型方程(11.2.1)的线性部分的雅可比矩阵

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} rc_1 + \dfrac{raS^* E_m}{(E_m + E^*)^2} & \dfrac{-raE^*}{E_m + E^*} & 0 \\ \dfrac{\varepsilon_1 aS^* E_m}{(E_m + E^*)^2} & -(\gamma + c_2) + \dfrac{\varepsilon_1 aE^*}{E_m + E^*} - \beta bN^* \mathrm{e}^{-\beta S^*} & b(1-\mathrm{e}^{-\beta S^*}) \\ 0 & \varepsilon_2 \beta bN^* \mathrm{e}^{-\beta S^*} & -(\delta + c_3) + \delta_2 b(1-\mathrm{e}^{-\beta S^*}) \end{bmatrix}$$

根据 Lyapunov 运动稳定性条件和有关稳定性理论,模型方程的局部稳定性取决于雅可比矩阵 K 的特征值。对于三维模型方程,其平衡点应当有 8 种情况。对于讨论的模型方程,考虑到具体实际情况,仅有 3 种情况有具体意义,即 $Q_1(E_0,0,0)$、$Q_2(E_1,S_1,0)$和 $Q_3(E^*, S^*, N^*)$。下面讨论在各种稳态下系统的局部稳定性。

①对于平衡态 $Q_1(E_0,0,0)$,物理意义是理想化的初始水平,即硅藻和夜光藻的种群密度均为零,此时的雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -rc_1 & \dfrac{-raE_0}{E_m + E_0} & 0 \\ 0 & -(\gamma + c_2) + \dfrac{\varepsilon_1 aE_0}{E_m + E_0} & 0 \\ 0 & 0 & -(\delta + c_3) \end{bmatrix}$$

雅可比矩阵为上三角矩阵,其三个特征值分别为:$-rc_1$、φ 和 $-(\delta + c_3)$,其中

$$\varphi = -(\gamma + c_2) + \frac{\varepsilon_1 aE_0}{E_m + E_0}$$

由此可知,系统解的稳定性取决于 φ。对于 $\varphi < 0$,$Q_1(E_0,0,0)$是稳定的,而对于 $\varphi > 0$,Q_1 是一个鞍点,系统解是不稳定的。考虑到实际情况,对于默认的各参数值,φ 总是大于零的,而且任意一个参数在其取值范围内变化时,φ 总为正;对于 $\varphi < 0$,Q_1 是第一象限中唯一的

稳定的平衡态。

②对于平衡态 $Q_2(E_1, S_1, 0)$，此时硅藻的细胞密度不为零。令 $N=0$，则由方程(11.2.2)可以解得

$$E_1 = \frac{(\gamma + c_2)E_m}{a\varepsilon_1 - \gamma - c_2}, \quad S_1 = \frac{c_1(E_0 - E_1)(E_m + E_1)}{aE_1}$$

显而易见，营养盐的函数实际值应当为正，故有

$$a\varepsilon_1 > \gamma + c_2$$

当 $S_1 \leqslant 0$ 时，方程代表非实际系统，但从理论上讲，此时系统是稳定的。而 $S_1 > 0$ 为赤潮发生的必要条件，即

$$E_0 > E > E_1$$

其中 E 为藻类实际发生过程浓度。

同时，对于稳定态 $Q_2(E_1, S_1, 0)$，对其对应的雅可比矩阵的特征值分析表明，其稳定性变化取决于 θ：

$$\theta = -(\delta + c_3) + \varepsilon_2 b(1 - e^{-\beta S_1})$$

随参数取值的变化，稳定态 Q_2 出现跨临界分岔和超临界分岔现象。

③当 $N \neq 0$ 时，则有平衡态 $Q_3(E^*, S^*, N^*)$。

求解方程(11.2.2)可得

$$S^* = -\frac{1}{\beta}\ln\left(1 - \frac{\delta + c_3}{\varepsilon_2 b}\right)$$

E^* 取决于二次方程

$$c_1 E^{*2} + [aS^* + c_1(E_m - E_0)]E^* - c_1 E_0 E_m = 0 \tag{11.2.4}$$

N^* 由下式给出：

$$N^* = \frac{\varepsilon_1 c_1(E_0 - E^*) - (\gamma + c_2)S^*}{b(1 - e^{-\beta S^*})}$$

对于 E^*，解方程可得到两个根：E_1^* 和 E_2^*。对应的平衡态为 (E_1^*, S^*, N_1^*) 和 (E_2^*, S^*, N_2^*)，其中

$$N_i^* = \frac{\varepsilon_1 c_1(E_0 - E_{i_i}^*) - (r + c_2)S^*}{b(1 - e^{-\beta S^*})}$$

对于 $i = 1、2$，方程(11.2.4)的两个解一个为正，一个为负。若定义 $E_1^* > 0$，则 $E_2^* < 0$，可知平衡态 (E_2^*, S^*, N^*) 在生态学上是非实际的状态。对于平衡态 (E_1^*, S^*, N^*)，其稳定性取决于两个因素：$S^* > 0$ 和 $N_2^* > 0$。由 $S^* > 0$ 可得

$$\varepsilon_2 b > \delta + c_3$$

可以认为，$\varepsilon_2 b > \delta + c_3$ 为赤潮发生和发展的必要条件之一。

$N^* > 0$ 的条件是当且仅当 $\omega > 0$ 时，此处

$$\omega = \varepsilon_1 c_1 (E_0 - E_i^*) - (\gamma + c_2) S^*$$

此外，N^* 和 E^* 的正根总是唯一的，故在 E^*、S^*、$N^* > 0$ 时，实际系统仅有一个稳定态。也就是说对于该模型方程，如果在 E^*、S^*、$N^* > 0$ 时若在第一象限内出现一个平衡态 $Q_3(E^*, S^*, N^*)$，则其是唯一的，且模型方程不会在该象限内产生交叉分岔，即鞍点。

分析可知，平衡态 $Q_2(E_1, S_1, 0)$ 和平衡态 $Q_3(E^*, S^*, N^*)$ 在临界分岔点出现交叉重叠，此时 $\omega = 0$。在临界点处的局部分岔行为可总结如下。

当 $\omega < 0$ 时，$(E_1, S_1, 0)$ 稳定，(E^*, S^*, N^*) 为生态非实际的（$Z^* < 0$）；当 $\omega > 0$ 时，$(E_1, S_1, 0)$ 不稳定，(E^*, S^*, N^*) 为生态实际且稳定的。

综上所述，从理论上讲，系统解的稳定性是有条件的，而且在不同的平衡态之间，稳定的条件也不同，不同平衡态之间存在着交叉重叠的现象。对于平衡态 $(N_0, 0, 0)$ 的稳定性较为简单明了；而对于 $(N_1, S_1, 0)$，虽然理论上存在稳定的可能性，但是实际上是不可能稳定的。在两种临界分岔 $\varphi = 0$ 和 $\omega = 0$ 处，稳定态 (E^*, S^*, N^*) 随着 ω 的减小，逐渐离开第一象限。而 $\theta = 0$ 正是两种临界分岔时的参数需要满足的条件。

为了对模型方程解的稳定性作进一步的深入讨论，考虑到赤潮发生的实际情况以及影响食物链模型的关键参数，取硅藻的增长率 a 作为控制变量（单位 $10^{-1}\mathrm{d}^{-1}$），对模型方程平衡态的稳定性运用分岔理论进行研究。取参数：

$$c_1 = 6.0 \times 10^{-4}, \quad c_2 = 1.267 \times 10^{-2}, \quad c_3 = 2.243 \times 10^{-2}, \quad r = 1.20 \times 10^{-3}$$

$$b = 3.64 \times 10^{-2}\mathrm{d}^{-1}, \quad \gamma = 1.17 \times 10^{-2}\ \mathrm{d}^{-1}, \quad \delta = 9.20 \times 10^{-2}\ \mathrm{d}^{-1}, \quad \varepsilon_1 = 1.235 \times 10^{-2}$$

$$\varepsilon_2 = 2.185 \times 10^{-2}, \quad \beta = 1.3\ \mathrm{cell/L}, \quad E_m = 0.15\mu\mathrm{g/L}, \quad E_0 = 8\ \mu\mathrm{g/L}$$

其中 c_1、c_2、c_3、r、ε_1、ε_2 为无量纲的参数，各个状态变量的初始值取值如下：

$$E(0) = 2\ \mu\mathrm{g/L}, \quad S(0) = 0.1\ \mathrm{cell/L}, \quad N(0) = 0.1\ \mathrm{cell/L}$$

将各参数代入模型方程，进行数值模拟仿真。

对三种平衡态下 E、S 和 N 随着 a 的变化（图 11-9）的分析可知：图 11-9(a) 中营养物质浓度 $E > 0$，须满足 $a > 1.974$，而此也正是赤潮发生的必要条件之一，即 $a\varepsilon_1 > \gamma + c_2$；当 $a = 2.1$ 时，系统的稳定性发生变化，此时也正是 $\varphi = 0$ 时 a 的取值；当 a 逐渐增大到 2.08 时，系统的稳定状态发生变化，此时 a 满足 $\omega = 0$。具体稳定状态变化曲线见图 11-9。

当 a 变化时，$(E_0, 0, 0)$、$(E_1, S_1, 0)$、(E^*, S^*, N^*) 三种平衡状态的稳定性变化出现了交叉传递现象。在 A、B 两点发生了跨越临界分叉，分别对应于 $a = 2.01$ 和 $a = 2.09$。

进一步的分析表明，当 a 继续增大时（其他参数固定不变），系统的稳定性发生了突然变化。图 11-10 和图 11-11 给出了 $a = 2.5$ 和 $a = 3.0$ 时的系统时间历程图。

图 11-10 表明系统在 $a = 2.5$ 时，经过一个较短的时间内趋于一个平衡点；图 11-11 表明系统在 $a = 3.0$ 时经过较长时间后，趋于一个极限环。根据霍普夫分岔理论，可以断定在 2.5～3.0 的区间内，存在一个霍普夫分岔点。

为此，将 a 连续地取此区间的值，对应所有的 S 稳态值作图（见图 11-12，当然还可以类

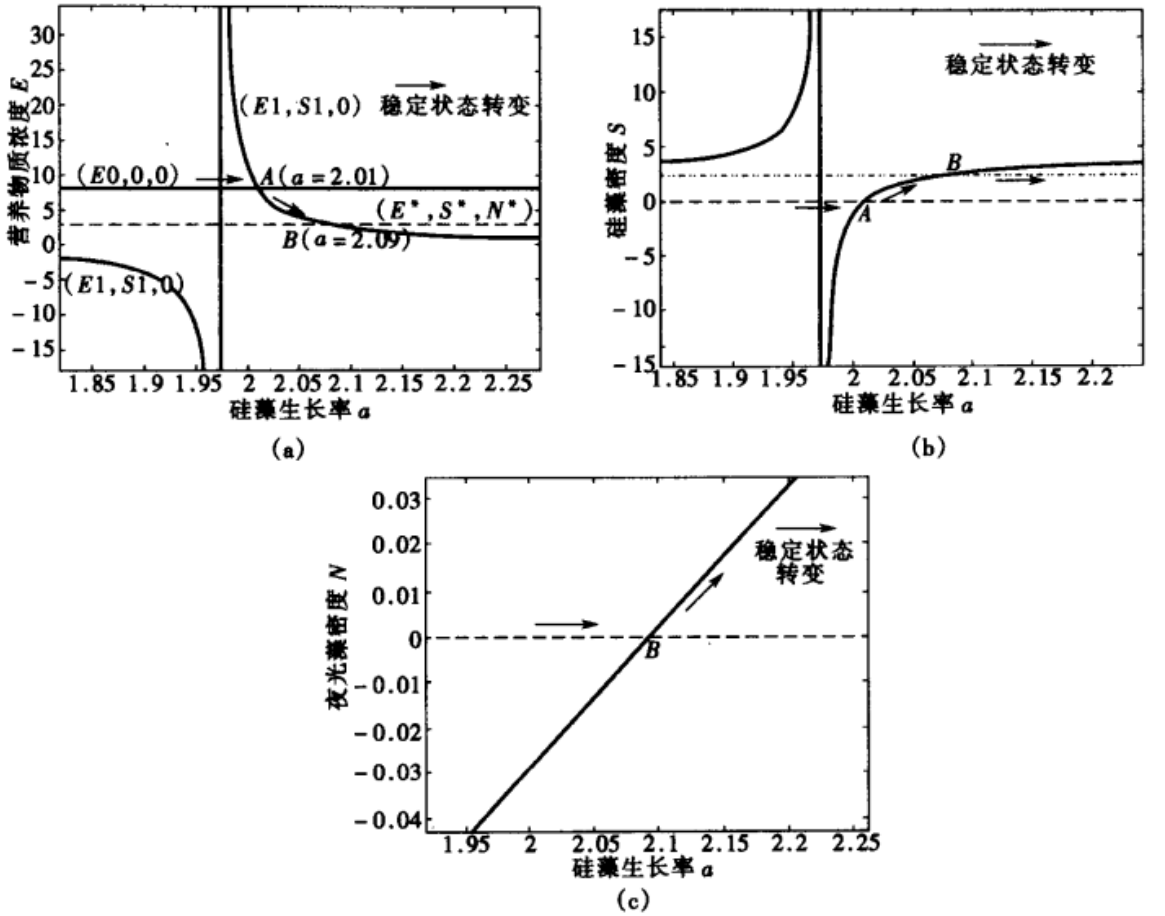


图 11-9　E、S、N 随 a 变化过程

(a) a—E 变化过程；(b) a—S 变化过程；(c) a—N 变化过程

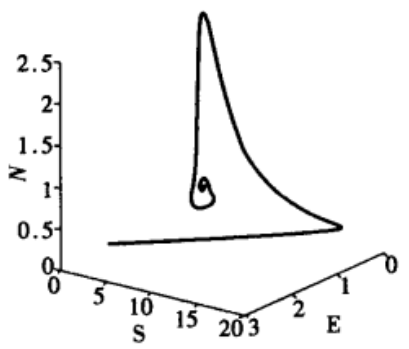


图 11-10　a = 2.5 时系统时间历程

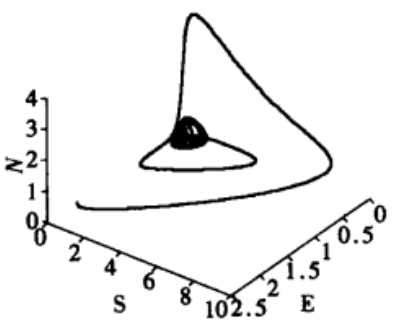


图 11-11　a = 3.0 时系统时间历程

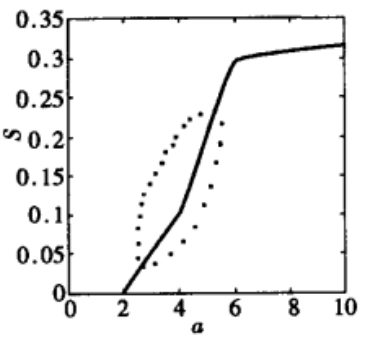


图 11-12　E 随 a 的变化历程

似地作出 E、S 稳态值)。发现当 a = 2.8 时，系统的稳定态将发生变化，从单值的稳定态转化为周期震荡解。从而可以得出，当其他参数取定值时，系统将在 a = 2.8 时发生霍普夫分

叉，且在 $a=5.6$ 时又存在另一个分岔点。分析表明第一个分岔点为超临界分岔点，而第二个为亚临界分岔点。对应于点 A、B 则发生了跨临界分岔现象。我们作出了当 a 变化时对应于硅藻细胞密度的稳态变化曲线，见图 11-12。

11.2.2 “硅藻—甲藻—浮游动物”生态动力学模型

一般认为，海洋富营养化是造成赤潮爆发的基本条件，而赤潮藻类之间的作用对于阐明赤潮发生机理也有重要意义。本节考虑两种藻类之间的相互作用及浮游动物的捕食，建立了典型藻类的非线性动力学模型，运用非线性动力学理论对方程解的稳定性进行分析。

1.模型基本方程的建立

选取典型赤潮藻类——硅藻和甲藻，在海洋富营养化的条件下考虑这两种藻类之间的相互作用及浮游动物的捕食，参照文献建立模型如下：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dP_1}{dt}&=P_1(\varepsilon_1-a_{11}P_1-a_{12}P_2-a_{13}Z)\\ \frac{dP_2}{dt}&=P_2(\varepsilon_2-a_{21}P_1-a_{22}P_2-a_{23}Z)\\ \frac{dP_3}{dt}&=Z(\varepsilon_3-a_{31}P_1-a_{32}P_2-a_{33}P_2)\end{aligned}\right\}\tag{11.2.5}$$

式中：P_1、P_2、Z 分别代表硅藻、甲藻及浮游动物的密度；$\varepsilon_i(i=1,2)$代表两种藻类的内禀增长率；ε_3 代表浮游动物的死亡率；$a_{ii}(i=1,2,3)$表示藻类和浮游动物密度制约系数，a_{12}及a_{21}分别表示两种藻类之间的相互作用系数，二者之和$(a_{12}+a_{21})$表示藻类间的作用率；a_{13}、a_{23}、a_{31}、a_{32}表示浮游动物与藻类之间的捕食关系。

参考 Azar 等人的实验数据，所采用的参数表示如下：

$$\varepsilon_i=a_{ii}=1,\quad a_{23}=\mu,\quad a_{32}=\mu d,\quad a_{13}=r,\quad a_{31}=rd,\quad a_{12}=\alpha,\quad a_{21}=\beta$$

其中 r 为浮游动物对 P_1 的最大捕食率；d 为浮游动物的捕食转化率且 $0<d<1$。

2.系统稳定性和分岔行为分析

模型(11.2.5)有 7 个平衡点。

①三种群平衡点 $S_3=(P_1^*,P_2^*,Z^*)$只有 1 个：

$$P_1^*=(r-dr\mu-\alpha\mu+d\mu^2)/|A|$$
$$P_2^*=(dr^2-dr\mu-r\beta+\mu)/|A|$$
$$Z^*=(\alpha\beta+d\mu-d\mu\beta-dr+dr\alpha-1)/|A|$$

系统(11.2.5)的系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&\alpha&r\\ \beta&1&\mu\\ -dr&-d\mu&0\end{bmatrix}$$

$$|A|=d[r^2+\mu^2-(\alpha+\beta)r\mu]$$

②两种群平衡点 3 个：

$$S_{101} = (r, 0, dr - 1)/dr^2$$
$$S_{011} = (0, \mu, d\mu - 1)/d\mu^2$$
$$S_{110} = (1 - \alpha, 1 - \beta, 0)/(1 - \alpha\beta)$$

③一种群平衡点 3 个：

$$S_{100} = (1,0,0), \quad S_{010} = (0,1,0), \quad S_{000} = (0,0,0)$$

均为不稳定的平衡点。

下面着重研究有实际意义的三种群平衡点 S_3 的稳定性及其分岔与混沌。为此，需先求出其相应的扰动方程。令

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= P_1 - P_1^* \\ x_2 &= P_2 - P_2^* \\ x_3 &= Z - Z^* \end{aligned}\right\} \tag{11.2.6}$$

将式(11.2.6)代入式(11.2.5)，则得扰动方程

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{B} \tag{11.2.7}$$

其中

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -P_1^* & -\alpha P_1^* & -rP_1^* \\ -\beta P_2^* & -P_2^* & -\mu P_2^* \\ drZ^* & d\mu Z^* & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -x_1(x_1 + \alpha x_2 + rx_3) \\ -x_2(\beta x_1 + x_2 + \mu x_3) \\ x_3(drx_1 + d\mu x_2) \end{bmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值决定了 S_3 的稳定性。其特征方程为

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \tag{11.2.8}$$

其中

$$a_1 = P_1^* + P_2^*$$
$$a_2 = d(r^2 P_1^* + \mu^2 P_2^*)Z^* + (1 - \alpha\beta)P_1^* P_2^*$$
$$a_3 = (dr^2 + d\mu^2 - dr\alpha\mu - dr\beta\mu)P_1^* P_2^* Z^*$$

由霍尔维茨判据，特征方程的根具有负实部的充要条件为：$a_i > 0 (i = 1,2,3)$ 且 $a_1 a_2 - a_3 > 0$。此时 S_3 是渐进稳定的。

当参数取值满足

$$a_1 a_2 - a_3 = 0 \tag{11.2.9}$$

时，系统将发生霍普夫分岔。此时，特征方程(11.2.8)的两个共轭复数根的实部为零，即有一对纯虚根，特征方程的根为

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \quad \lambda_3 = -a_1$$

其中 $\omega_0^2 = a_2$。

下面对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施以变换 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & \omega_0 & 0\\ \omega_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -a_1\end{pmatrix}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{P}$ 由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 三个特征值所对应的特征向量组成

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}(r-1)P_1^*P_2^* & -\omega_0 rP_1^* & rP_1^*(P_2^*-a_1)-P_1^*P_2^*\\ (1-1.5r)P_1^*P_2^* & -\omega_0 rP_2^* & P_2^*(P_1^*-a_1)-1.5rP_1^*P_2^*\\ 0.5P_1^*P_2^*+\omega_0^2 & \omega_0(P_1^*+P_2^*) & 1.5P_1^*P_2^*-(P_1^*-a_1)(P_2^*-a_1)\end{bmatrix}$$

为了得到方程的正规型，做变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$，其中

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}$$

通过复杂的线性代数运算得到

$$\dot{\boldsymbol{Y}}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{D} \tag{11.2.10}$$

其中

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P},\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}D^1(y_1,y_2,y_3)\\ D^2(y_1,y_2,y_3)\\ D^3(y_1,y_2,y_3)\end{bmatrix}$$

$D^1(y_1,y_2,y_3)$、$D^2(y_1,y_2,y_3)$、$D^3(y_1,y_2,y_3)$均为非常复杂的代数表达式。

式(11.2.10)右边第一项为线性项，第二项为非线性项，从这些非线性项中，可以计算出发生霍普夫分岔后周期轨道的稳定系数。

$$\begin{aligned}R_c=&\frac{1}{16\omega_0}\left[\left(\frac{\partial^2D^1}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2D^1}{\partial y_2^2}\right)\frac{\partial^2D^1}{\partial y_1\partial y_2}-\left(\frac{\partial^2D^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2D^2}{\partial y_2^2}\right)\frac{\partial^2D^2}{\partial y_1\partial y_2}\right.\\&\left.+\frac{\partial^2D^1}{\partial y_2^2}\frac{\partial^2D^2}{\partial y_2^2}-\frac{\partial^2D^1}{\partial y_1^2}\frac{\partial^2D^2}{\partial y_1^2}\right]+\frac{1}{16}\left[\frac{\partial^3D^1}{\partial y_1^3}+\frac{\partial^3D^2}{\partial y_2^3}+\frac{\partial^3D^1}{\partial y_1\partial y_2^2}+\frac{\partial^3D^2}{\partial y_1^2\partial y_2}\right]\\&+\frac{1}{16a_1(a_1^2+4\omega_0^2)}\frac{\partial^2D^1}{\partial y_1\partial y_3}\left[(3a_1^2+8\omega_0^2)\frac{\partial^2D^3}{\partial y_1^2}+(a_1^2+8\omega_0^2)\frac{\partial^2D^3}{\partial y_2^2}-4\omega_0a_1\frac{\partial^2D^3}{\partial y_1\partial y_2}\right]\\&+\frac{1}{16a_1(a_1^2+4\omega_0^2)}\frac{\partial^2D^2}{\partial y_2\partial y_3}\left[(a_1^2+8\omega_0^2)\frac{\partial^2D^3}{\partial y_1^2}+(3a_1^2+8\omega_0^2)\frac{\partial^2D^3}{\partial y_2^2}+4\omega_0a_1\frac{\partial^2D^3}{\partial y_1\partial y_2}\right]\\&+\frac{1}{16a_1(a_1^2+4\omega_0^2)}\left(\frac{\partial^2D^1}{\partial y_2\partial y_3}+\frac{\partial^2D^2}{\partial y_1\partial y_3}\right)\left[2\omega_0a_1\frac{\partial^2D^3}{\partial y_1^2}-2\omega_0a_1\frac{\partial^2D^3}{\partial y_2^1}+2a_1^2\frac{\partial^2D^3}{\partial y_1\partial y_2}\right]\end{aligned}$$

稳定系数 R_c 的符号决定了周期轨道的稳定性。$R_c<0$ 周期轨道稳定，$R_c>0$ 周期轨道不稳定。

3. 实例计算

各参数取值如下：

$$d=0.5,\quad \alpha=1,\quad \beta=1.5,\quad \mu=1,\quad \varepsilon_i=a_{ii}=1。$$

初始值为

$$P_1=0.2,\quad P^2=0.6,\quad Z=0.03$$

将 r 作为控制分岔参数，由式(11.2.9)可以算出 $r=5.486$，记为 rf。此时，可求出 $R_c=-0.05<0$，从而可以判定所产生的极限环是稳定的。

然后通过进一步的计算发现，当分岔参数变化时，系统经过不动点的 0 环面 T_0 和极限环的 1 环面 T^1，接着产生了 2 环面 T^2。由理论和实验证实：$T^2\rightarrow$混沌道路是通有的。由此可以看出，方程(11.2.5)所描述的生态系统，会产生稳定的极限环，并通过准周期分岔导致混沌。计算中各参数取值同上，仍将 r 作为分岔参数，采用四阶 Runge-Kutta 方法，分别计算当 $r=5.3$、6.0、7.5、7.8、10.0 时，其仿真结果如图 11-13、图 11-14、图 11-15、图 11-16、图 11-17、图 11-18 所示。

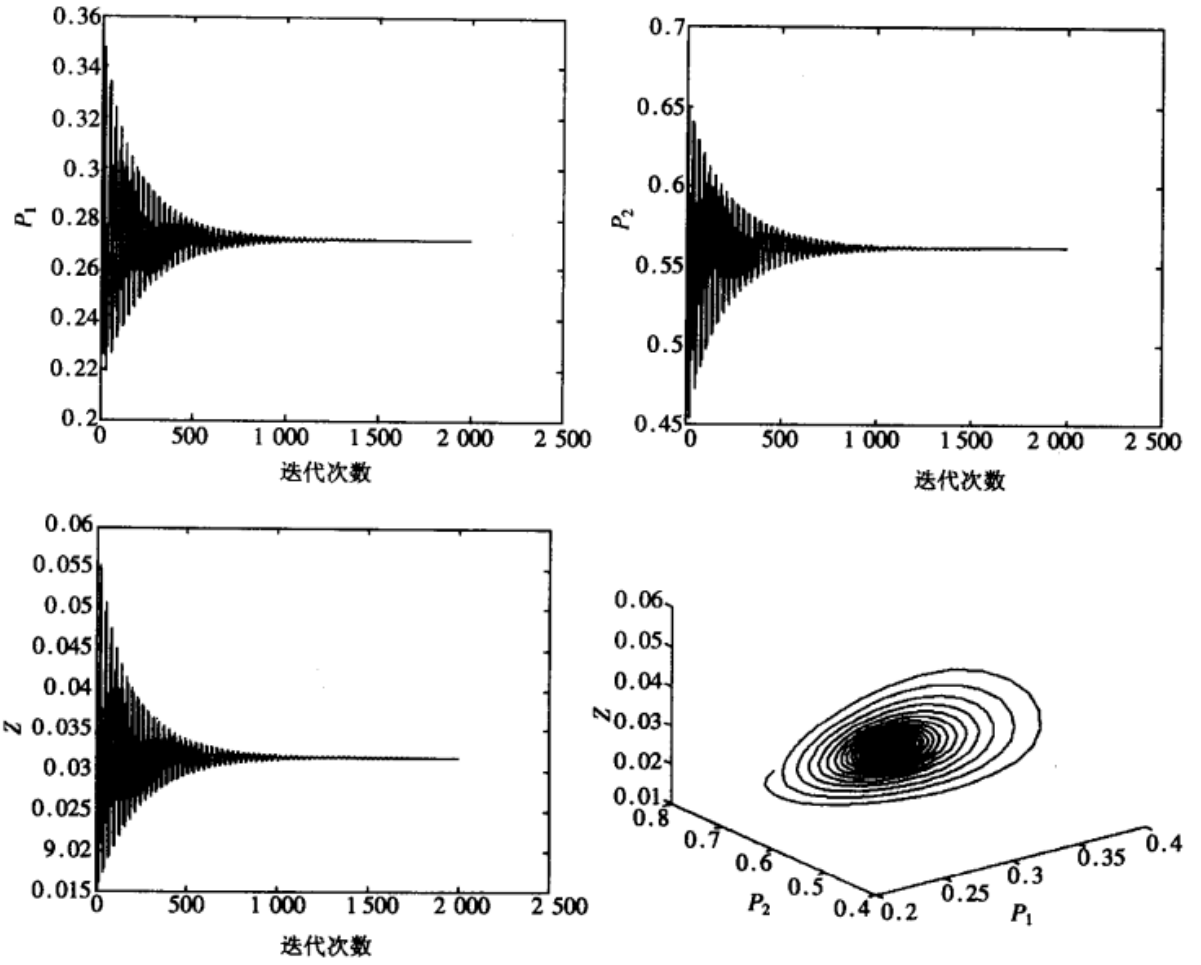


图 11-13　$r=5.3$ 时系统趋于稳定态

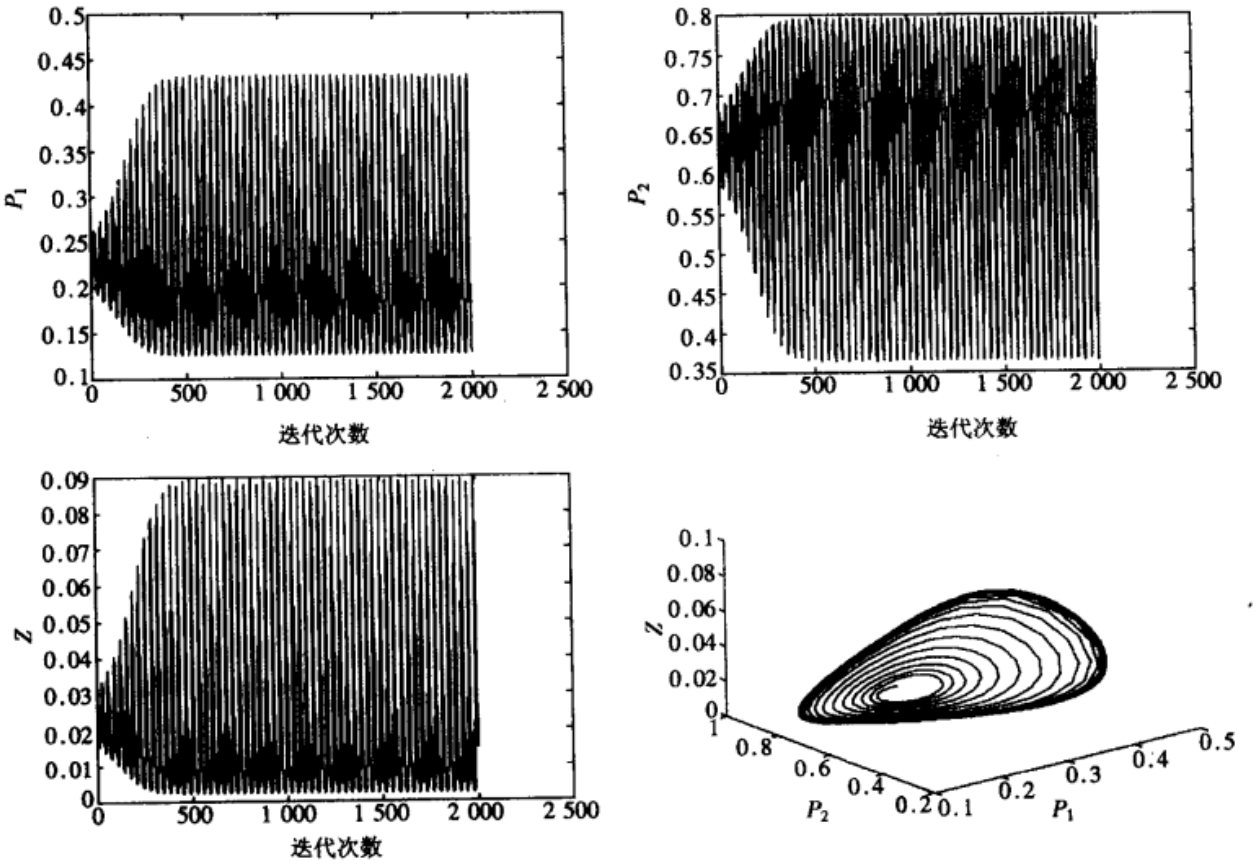


图 11-14 $r=6.0$ 时系统的 1 环面(初始值(0.2, 0.6, 0.03))

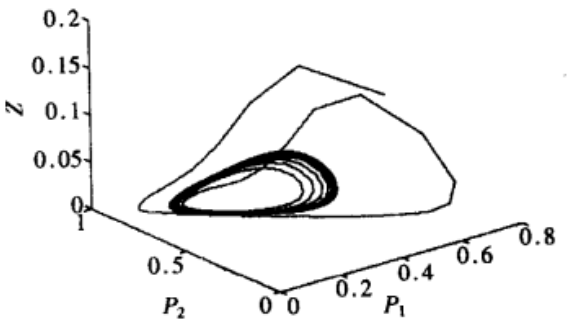


图 11-15 $r=6.0$ 时系统的 1 环面
(初始值(0.6, 0.4, 0.12))

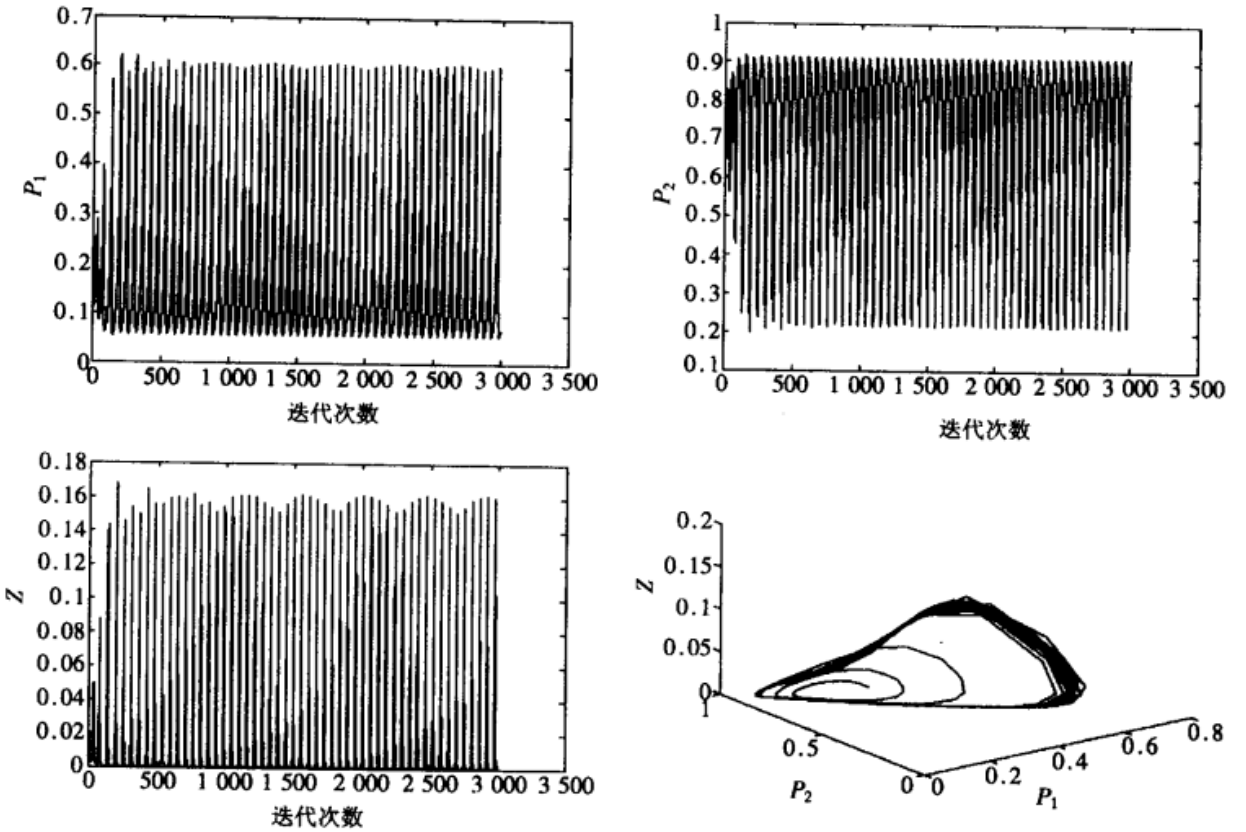


图 11-16　$r = 7.5$ 时系统的 1 环面

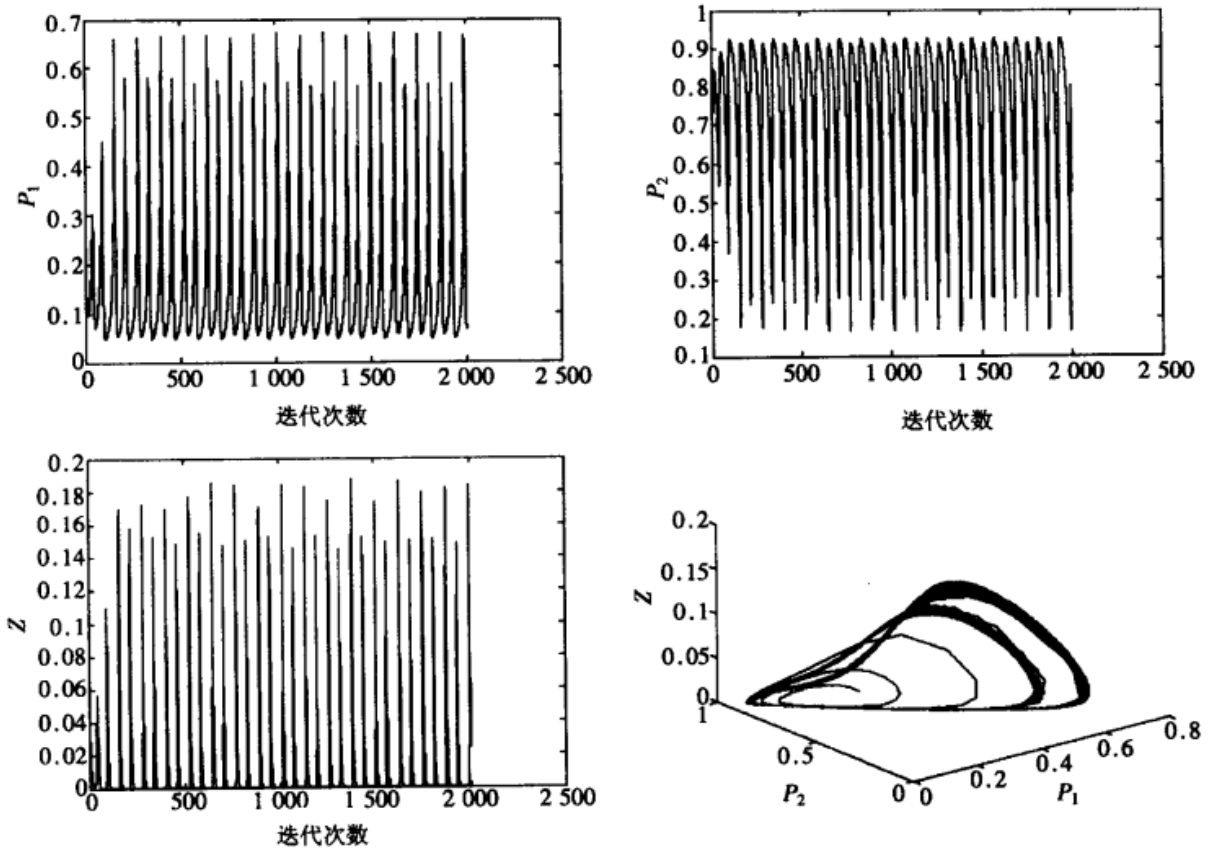


图 11-17 $r=7.8$ 时系统的 2 环面

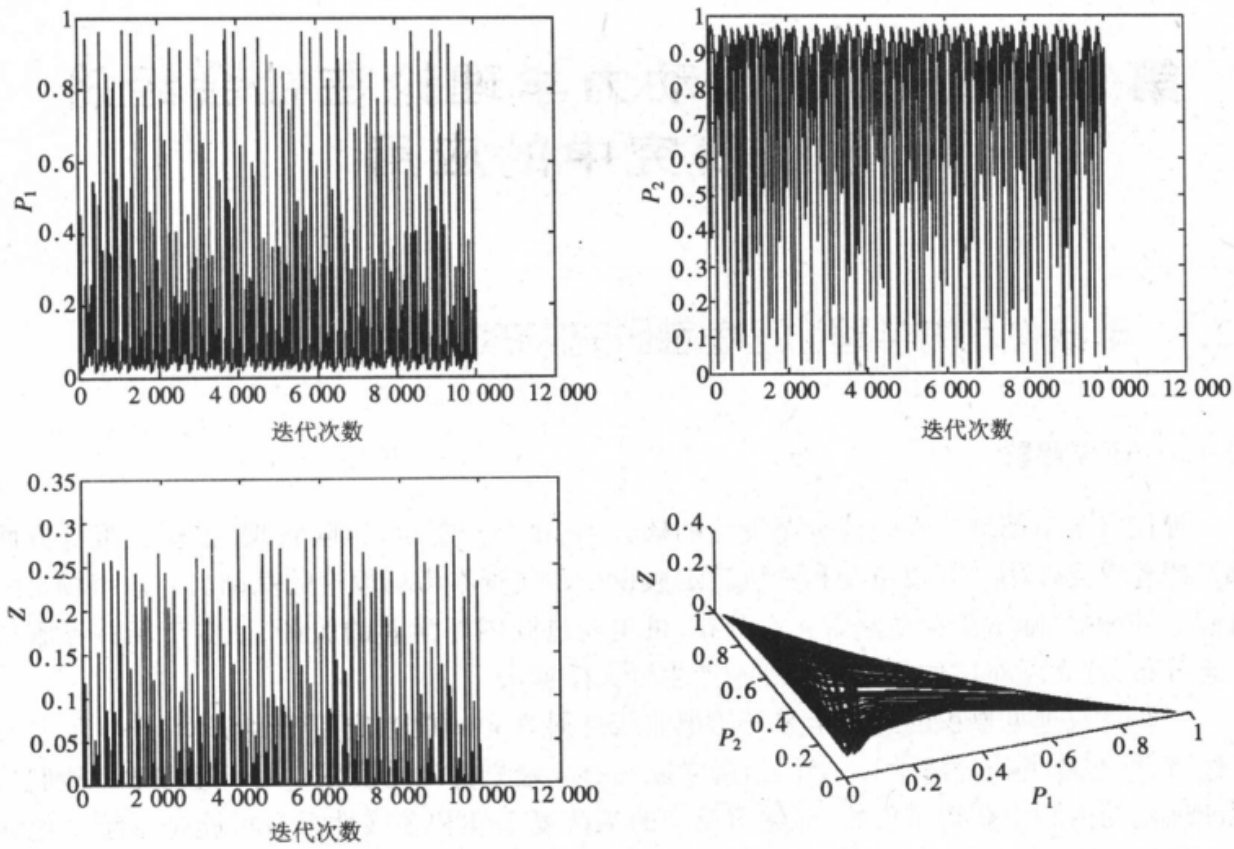


图 11-18　$r = 10.0$ 时产生的 Vance's 螺旋混沌

从以上的理论计算以及数值仿真可以看出，当 r 增大时，系统状态会发生质的变化，从稳定态到极限环最后发生混沌。根据数值计算可以得出，当 $r = 5.48$ 时，系统会发生霍普夫分岔。对于极限环稳定性的判断，由稳定系数 $R_e < 0$ 可知周期解应该稳定。取不同的初始值作数值计算，结果参看图 11-14 与图 11-15。很明显可以看出不同的初始值（位于极限环外的初始点与位于极限环内的初始点）均趋向于极限环，所以在适当的参数范围内，系统只存在一个稳定的 1 环面极限环。当 r 继续增大时，系统会产生 2 环面 T^2，继续增大 r 系统出现了 Vance's 螺旋混沌。由 $T^2 \rightarrow$混沌道路是通有的，判定该模型所描述的生态系统通过准周期分岔产生混沌。

第 12 章 非线性动力学理论在社会经济系统研究中的应用

12.1 非线性动力学理论在金融研究中的应用

12.1.1 研究背景

现代资本市场理论是现代金融理论的核心，它在资产定价、风险管理、投资决策等方面都发挥着重要作用。有效市场和随机游走假设是现代资本市场理论的基础。有效市场是随机游走的前提，随机游走蕴涵着正态分布，可是经过国内外学者的验证，证券市场并不服从正态分布，这无疑对现代资本市场理论产生巨大的冲击。

一些具有远见卓识的经济学家开始把非线性科学中的成果应用于经济学，产生了非线性经济学(也称混沌经济学)。美国经济学家 Stutzer 最早将混沌模型应用于经济学。他们从混沌理论的内涵中获得了启发：证券市场中的某些复杂性和多样性很有可能是系统中包含的非线性因素的产物；而难以做出经济长期预测的麻烦极有可能是来自经济系统自身的混沌特性。因为对于混沌运动来说，只要初始条件有微小的变化，系统的状态随时间演变的轨线就会以指数速度分离，并在一定的时间之后，完全掩盖了系统的真实状态，从而导致系统的长期演变的不可预测性。

1. 国内外研究现状

20 世纪 70 年代兴起的非线性混沌理论，揭示了一些自然界普遍存在但被人们所忽视的规律。这些规律包括，简单确定的非线性系统可以产生确定的行为，也可以产生不稳定的、貌似随机的不确定现象，即混沌现象。经济系统是一个开放的有人参与的系统，许多现象是不可逆的，其本质是一类非线性系统。1985 年，经济系统中的混沌现象被首次发现，从而对当今西方主流经济学新古典主义和凯恩斯主义产生了巨大的冲击，引发了人们对传统经济学理论的反思，也掀起了非线性经济学、混沌经济学的研究热潮。

(1)经济系统混沌特性的揭示

在国外，混沌经济学的研究始于 20 世纪 80 年代。1980 年，M. Stutzer 首次在 Havvelmo 经济增长方程中揭示了宏观经济系统的混沌现象，使人们认识到建立在传统经济学理论基础之上的经济模型的局限性。混沌理论对传统经济学的冲击和对宏观经济管理理论的重要性启示，受到了包括中国经济学家李京文(1991)、张守一(1992)、傅琳(1990, 1993)等专家的关注与研究，并取得了一定的成就。

在宏观经济领域中，有关经济系统混沌特性的研究涉及很多方面。中国学者黄小原研究了一般动态经济增长方程在单边受限和双边受限条件下产生混沌的条件。Benhabib. R. Day(1981)分析了消费者选择问题，指出实际收入的增加将导致极为复杂的消费者动态行为，即穷人的消费选择很可能是相当稳定的，而富人的消费行为可能是周期波动的，甚至是混沌的。Boldrin(1986)讨论了在什么情况下最优经济增长轨道出现混沌现象。这一令人担忧的发现不禁使人想到，由于很难使人们的行为遵循混沌轨道，在许多情况下人们行为达不到最优。这一发现还与 Pool 提出的"混沌状态是人体的健康状态"不谋而合。1990 年，他的进一步研究说明，宏观经济现象的不规则波动是在市场力、技术创新和消费者三者相互作用下，经济系统内生力量决定的结果。Brock(1986)应用混沌理论寻找商业周期中的有序性，借此改变短期预测效果。这些研究表明，经济系统在一定的条件下可以呈现混沌状态。

宏观经济学理论的热点之一是对经济波动现象的解释。Klein 曾利用计量经济模型作过测量，得出美国经济周期约为 47 年。J. B. Rosser(1994)从刻画资本主义市场经济的两阶乘数加速计量模型(multiptier-two-stage-accelerator)和刻画社会主义计划经济的长波投资模型(long investment waves)中，证明了市场经济存在波动的必要性，指出中央计划的社会主义经济既会出现长期性波动，也会出现混沌。Rosser 的研究在经济领域里支持了自组织理论(self-organization)关于混沌是新秩序产生的契机的论断，这对宏观经济管理具有重要的意义。

在微观经济系统，中国学者黄登仕(1991)研究了微观经济领域中有关经济弹性、企业竞争力与多重分形问题。作者通过建立产品扩散的随机分形网络模型及企业产品销售的有关数据，运用适当的统计方法对分维值进行计算。并得出：分维较大，说明该企业的竞争能力强，反之，则竞争能力弱。因而，作者认为分维值可以作为企业竞争能力的指标。Baumol W. J. 和 Wolff E. N. (1983)揭示了当企业 R&D 支出水平占企业销售收入的比例达到一定范围时，企业生产增长率出现周期性变化，甚至混沌。

另外，Feichtinger 等学者研究了管理科学中运筹学领域的混沌问题。如排队系统、库存系统等在不同的管理决策规则时，也会产生相应的混沌现象。这些研究说明，企业作为一个微观经济系统，在一定的条件下，系统会失去稳定和有序而走向混沌。他们的结论对提高企业管理水平及进行有效决策提供了科学的思路。

(2)系统混沌特性的检验及有关方法

首次声称成功地在经济数据中建立了确定性混沌动力学系统的，是索耶斯(Sayers)、巴雷特(Barnett)和陈平(Chen P.，1988)。此外，布劳克(Brock，l988)、沙因可曼(Scheinkman)等人都在股票证券、外汇交易、期货市场等产生的高频数据中找到了低维混沌吸引子。他们从经验数据出发，研究了经济混沌的存在性，提出用关联维、"搅拌"、"残差"等方法诊断经济时间序列的混沌性。他们的研究意味着只需少数几个经济变量就可以描述这类复杂的经济现象，这对经济预测与控制的改善将是根本性的。另一方面，拉姆塞(Ramsey)、罗斯曼(Rothman，l990)和泰特(Ted，1993)等人又给出了不同的结论。到目前为止，所有被检验过的经济

数据中，没有强有力的证据反对经济系统中混沌吸引子的存在。

(3)混沌条件下经济系统预测理论的研究

混沌理论对于预测学的影响从其发展伊始就受到了经济学家的重视。非线性系统混沌特性的揭示，一方面说明了对未来事物预测的局限性；另一方面又说明了对事物预测的可能性，因此，混沌理论开辟了预测研究新领域，为原来认为不可预测事物的研究提供了新的理论与方法途径。基于这一点，Priestly 认为包括混沌在内的非线性科学对于预测学的影响将是革命性的，不仅仅是对预测方法的简单修正，更重要的是在观念上、思维方式上的根本性改变。

在国外，Mottison 尝试将混沌学中的数学分析、统计分析、相空间变换等方法用来将“复杂的、不可预测的系统转换化为一个简单的、可预测的系统”，讨论了各种方法的适用性及局限性；Modis 根据混沌理论的内随机原理，研究了事物增长的前期和后期存在波动的必然性，并提出了事物整体增长的前期和后期存在的波动的必然性，并提出了事务整体增长过程分形的概念；Fatmer 研究了混沌时间序列的预测方法；Phillipshs 和 Kin 研究了新产品市场营销策略与市场扩散行为混沌之间的关系；Baoumol 和 Quande 根据一维迭代函数产生混沌和分形的情形以及社会经济系统的反馈特征，讨论了经济系统的可预测特性；Mantica 和 Gitaud 研究了含有噪声的经济时间序列的预测建模方法。

在国内，刘华杰在分析了混沌理论对决定论的影响之后，从轨道意义上的预测出发，阐述了混沌理论关于复杂系统不可预测的含义；徐寅峰、江应洛研究了混沌理论对经济预测的影响，认为如果经济系统是混沌的，那么，短期预测具有一定的准确性而长期预测往往不具有说服力；刘洪在应用混沌理论协同论和自组织理论研究经济系统和企业组织演化过程中，分析了非线性复杂系统的复杂观、未来观和混沌理论中预测的内涵等问题，对基于混沌吸引子、分形等混沌理论概念的经济、技术系统预测建模的方法论等问题进行了探讨。

2. 当前研究中存在的问题

综上所述，国内外在对经济领域内混沌理论的研究与其在管理方面的应用还处于萌芽阶段，尚有许多工作要做，目前存在的问题主要有以下几个方面。

①虽然经济过程的确处处有非线性，但如何刻画，即怎样建模，仍是一个难点。由于经济系统内结构的复杂性，决定了建立描述经济系统准确结构的数学模型的困难性。现有的方法往往是利用现成的非线性、混沌模型进行参数估算来拟合所研究的系统，这样，忽视经济系统与自然系统本质的区别，就很难使研究取得突破性进展。在方法上，与其他学科的结合上都有待深入进行。

②研究的深度与广度不够。在混沌特性的检验方面的研究，尤其是国内的研究，对混沌特性检验的方法上较为缺乏。有关经济系统混沌研究多见于混沌现象的揭示，对经济系统进行的预测研究在方法上有待进一步提高。

③实际经济数据的数量及质量上的问题。国内较多混沌预测方面的文章只在理论上对一些方法进行了阐述，并没有利用实际的经济数据进行检验。另外，经济系统与自然系统从

本质上有着很大的差别，由于其影响因素众多，在其数据中含有大量的噪声影响。目前，关于经济时间序列数据滤波技术、滤波过程、时间序列性质判断等都有待进一步研究。

④从国内关于证券市场的混沌、分形方面的研究来看，大多数属定性分析的文章，定量计算方面还较欠缺。

12.1.2　我国证券市场混沌现象分析研究

1.相空间重构

实际系统一般都是高维的，而我们往往只能得到这些高维系统的一维信息，即一组观测值，或称一维标量时间序列。但刻画它的真实系统无疑是高维的，问题的关键就是如何根据有限的数据来重构动力系统。混沌时间序列研究的基础是状态空间的重构理论，即把具有混沌特性的时间序列重建为一种低阶非线性动力学系统。通过相空间重构，可以找出隐藏在混沌吸引子中的演化规律，使现有的数据纳入某种可描述的框架之下，从而为时间序列的研究提供了一种崭新的方法和思路。

所谓相空间重构也叫动力系统重建，即通过一维的时间序列反向构造出原系统的相空间结构。目前较为常用的是延迟矢量法。该方法首先由 Packard 等人提出，并由 Takens 为之奠定了可靠的数学基础。它的基本思想是：系统中任一分量的演化都是由与之相互作用着的其他分量所决定的，因而这些相关分量的信息就隐含在任一分量的发展过程中。

令 $x(t), t=0,1,2,\cdots,N$ 表示所研究的时间序列，m 称为嵌入维数；τ 称为时间延迟量；$N'=N-(m-1)\tau$，表示向量序列的有效长度，即重构之后相空间矢量的长度。可重构得到 m 维相空间矢量 $Y_n, n=0,1,2,\cdots,N'$。Y_n 中每个分量都具有 m 个元素，是从 $x(t)$ 中以 $x(n)$ 为起点，每隔 τ 个观测值选取一个元素组成。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_1 &= (x_1, x_{1+\tau}, \cdots, x_{1+(m-1)\tau})^{\mathrm{T}} \\
\boldsymbol{y}_2 &= (x_2, x_{2+\tau}, \cdots, x_{2+(m-1)\tau})^{\mathrm{T}} \\
&\vdots \\
\boldsymbol{y}_{N'} &= (x_{N'}, x_{N'+\tau}, \cdots, x_{N'+(m-1)\tau})^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

假设动力系统维数为 d，Takens 已经证明，当嵌入维数充分大时，重构算法是一个嵌入映射，重构的相空间可以将动力系统的许多特性保存下来，即重构后的动力系统在极限集的稳定性、最大李雅普诺夫指数和分形维数等性质保持不变，并对嵌入维数给出了具体的范围：若原系统的状态空间维数是 d，则当时间序列没有噪声时，嵌入维数须大于 $2d+1$；当时间序列有噪声时，需要重构相空间矢量的秩大于等于 $2d+1$。

2.我国证券指数的最大 Lyapunov 指数的求解

1)最大 Lyapunov 指数的计算方法

混沌运动仅出现在非线性动力系统中，是一种非常普遍的非线性现象。在宏观上呈现出一种混乱、貌似随机且对初始条件十分敏感(即所谓蝴蝶效应)。它不是简单的周期运动

或准周期运动，而是一种始终限于有限区域且轨道永不重复的、性态复杂的运动。

混沌系统的一个重要特征就是对于初始条件的敏感依赖。系统对于初始条件的敏感依赖的程度可以用 Lyapunov 指数来度量。它表示重构相空间中相邻两点随时间演化的发散程度。一个负的 Lyapunov 指数度量收缩——系统在受到扰动以后需要多长时间才能恢复自己；一个正的 Lyapunov 指数度量相空间中的伸展，也就是度量邻近的点相互之间发散得有多快。Lyapunov 指数是一个谱系 $\lambda_i(i=1,2,3\cdots,m)$，其中 $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_m$，若谱系中最大的 $\lambda_1>0$，则系统必是混沌的。

对于已知函数的 Lyapunov 指数可以很容易地计算出来，但对于一般的时间序列，不知道产生时间序列的数学模型，此时可以通过 Wolf 算法来寻找最大 Lyapunov 指数。Wolf 算法是以前面介绍的延迟坐标重构相空间技术为基础的，对于一个一维的时间序列 $x(t)$，选择适当的嵌入维数 m 和延滞时间 τ 后，重构相空间，则

$$\boldsymbol{Y}_n(m,\tau)=\{x(t),x(t+\tau),x(t+2\tau),\cdots,x(t+(m-1)\tau)\}^{\mathrm{T}}\quad(n=1,2,\cdots,N')$$

这样，一维的时间序列就演化到 m 维的状态空间。

由于运动方程式未知，不能求出 Lyapunov 的全谱，但可以使用 Wolf 等人提出的方法计算最大的 Lyapunov 指数 LE。LE 大于零表明对于初始条件的敏感依赖的存在，且系统有一个奇异吸引子，度量了重构的相空间中邻近点的发散，并且标示了发散速度在固定的时间间隔上如何缩放。

首先，对时间序列进行相空间重构，然后选取两个相距至少一个平均轨道周期的点。在一个固定的时间间隔（“进化时间”）之后，度量两点之间的距离，用此距离与开始时两点的距离的比值代表轨道的发散程度。如果距离变得太大，超出了所允许的范围，则搜索一个与原来的那个定向角度相似的替代点，新的这对点的定向应该尽可能地与原来那对点保持一致，即这对新点与原来那对点的夹角尽可能的小。再求出经过下一个时间间隔后，得到的两点距离与前边两点距离的比值（图 12-1）。如此继续下去，穷尽时间序列，就得到了最大 Lyapunov 指数

$$LE=\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{N'}\log_2\frac{l'(t_{j+1})}{l(t_j)}\tag{12.1.1}$$

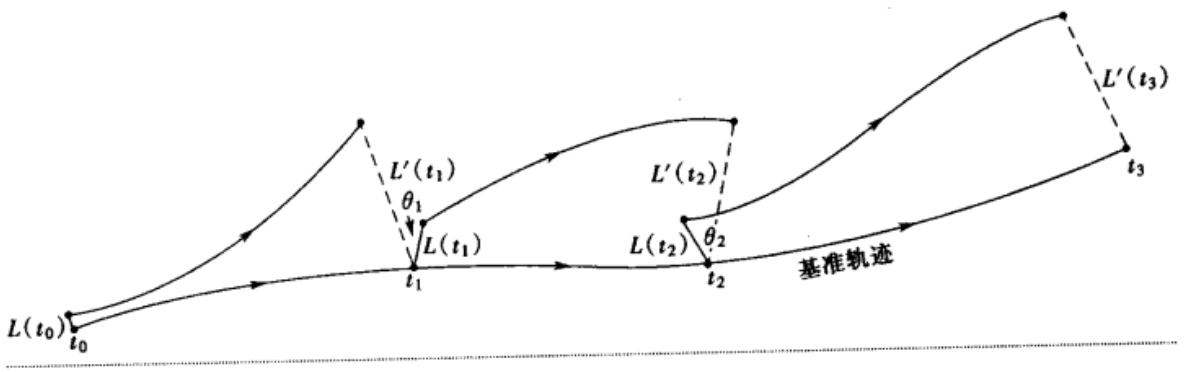


图 12-1 从一个时间序列估计最大 Lyapunov 指数的 Wolf 算法的示意图

2)计算结果

下面以 1991 年 4 月 3 日至 2000 年 12 月 29 日深成指数的日收盘价的对数收益率为样本,共计 2 391 个数据,计算深市的最大的 Lyapunov 指数。深成指数日收盘价的对数收益率 $s_t = \ln(\text{Inde } x_t / \text{Inde } x_{t-1})$,取对数收益率的目的是为了消除数据中的干扰因素,其中 Inde x_t 为 t 时的深成指数。取延滞时间 8 d,延迟时间 $s = 6$ d,逐渐增大嵌入维数 m,得到计算结果如表 12-1 所示。图 12-2 和图 12-3 中所示的是嵌入维数分别为 15、18 的最大 Lyapunov 指数曲线图。

表 12-1　深成指数对数收益率的最大 Lyapunov 指数

嵌入维数 m	10	13	14	15	16	17	18	25
最大 Lyapunov	0.338	0.205	0.200	0.190	0.150	0.148	0.137	0.121

由表 12-1 可以看出随着嵌入维数的升高,最大 Lyapunov 指数是降低的,最后大致趋于 0.12。

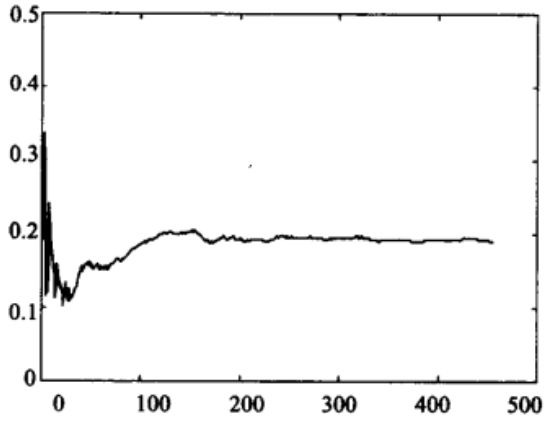


图 12-2　$m = 15, \tau = 8, s = 5$ 时最大 Lyapunov 指数曲线图

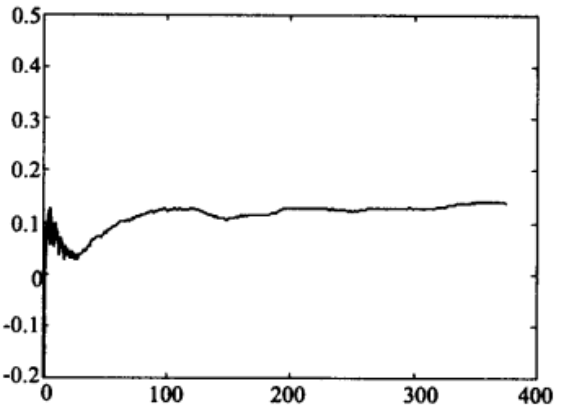


图 12-3　$m = 18, \tau = 8, s = 6$ 时最大 Lyapunov 指数曲线图

对上证指数的每日收盘价(从 1991 年 1 月 2 日至 2000 年 12 月 29 日共 2 480 个数据)进行上述计算,得到计算结果如表 12-2 所示。图 12-4 和 12-5 中所示的是嵌入维数分别为 15、18 的最大 Lyapunov 指数曲线图。

表 12-2　上证指数对数收益率的最大 Lyapunov 指数

嵌入维数 m	10	13	14	15	16	17	18	25
最大 Lyapunov	0.295	0.175	0.178	0.147	0.147	0.132	0.129	0.110

随着嵌入维数的升高，上证指数的最大 Lyapunov 指数最后大致趋于 0.11。

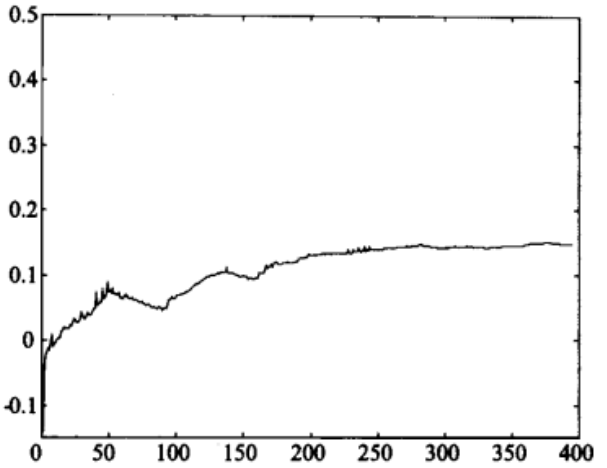


图 12-4 $m=15,\tau=8,s=6$ 时
最大 Lyapunov 指数曲线图

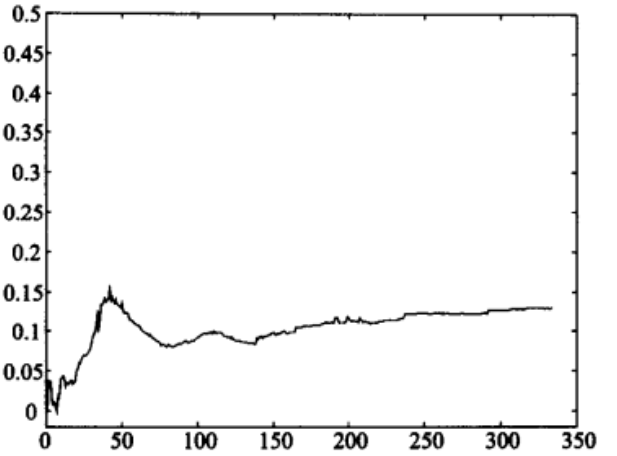


图 12-5 m = 18, τ = 8, s = 6 时
最大 Lyapunov 指数曲线图

深沪两市的最大 Lyapunov 指数均为正数，说明深沪两市证券指数在重构的相空间中是发散的，初始的信息会随着时间迅速地损失掉，很快就掩盖了系统初始的状态，这就是混沌系统对初始条件的极其敏感性。

3.我国证券指数分形维的求解

1)分形维的 G-P 算法

对实际观测到的一维时间序列 $x(t),t=1,2,\cdots,N$，运用上述相空间重构的原理，将其嵌入到 m 维相空间 R^m 中，得到 m 维向量 $\boldsymbol{Y}_n$，定义时间序列 $\boldsymbol{Y}_n$ 的关联积分为

$$C_m(r)=\frac{2}{N'(N'-1)}V \tag{12.1.2}$$

V 是两相点之间距离小于等于 r 的个数，可以表示为

$$V=\sum_{i=1,j=i+1}^{N'}H(r-\|\boldsymbol{Y}_i-\boldsymbol{Y}_j\|) \tag{12.1.3}$$

式中 $H(\cdot)$是 Heaviside 函数，即当 $X<0$ 时，$H(X)=0$；当 $X\geqslant 0$ 时，$H(X)=1$。

当 r 充分小时，关联积分与 r^D 成比例关系。这里，指数 D 称为混沌吸引子的关联维数。分别取对数，则它是 $\ln C_m(r)$对 $\ln r$ 的斜率。只需作出和 $\ln C_m$ 和 $\ln r$ 双对数图，对其进行线性回归，得到的线性方程的斜率就是关联维数，即

$$\ln(C_m)=D\ln(r)+\text{const}(\text{常数}) \tag{12.1.4}$$

2)计算结果及分析

在计算关联积分时，对嵌入空间中两点的距离计算是采用欧氏空间中的距离公式。但公式中包含了较多的乘方和开方运算，大大影响了计算速度。在实际计算中，采用的是求最大模距离，这两种距离是拓扑等价的，求出的分维数也是相同的。

取时滞为 8,嵌入维数为 10,作双对数图,如图 12-6、图 12-7 所示。对图中直线进行线性回归,所得直线的斜率即关联维数,用同样方法改变嵌入维数计算,得到表 12-3 和表 12-4 中的结果。

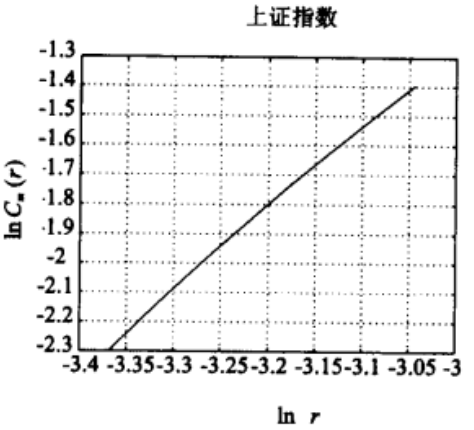


图 12-6　上证指数 ln $C_m(r)$—ln r 对数图

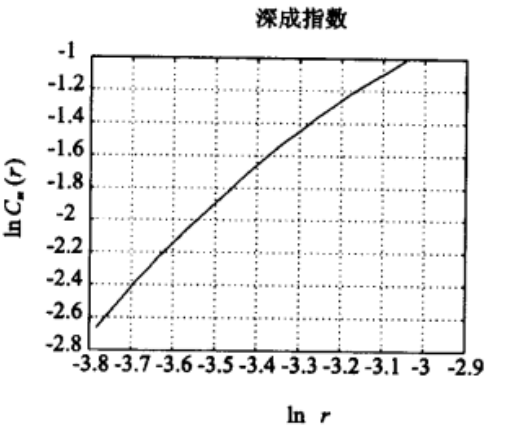


图 12-7　深成指数 ln $C_m(r)$—ln r 对数图

表 12-3　深成指数对数收益率序列相空间分形维

嵌入维数	5	6	7	8	9	10	15
D	2.9	2.69	2.56	2.11	2.22	2.24	2.24

表 12-4　上证指数对数收益率序列相空间分形维

嵌入维数	5	6	7	8	9	10	15
D	2.31	2.50	2.41	2.35	2.33	2.33	2.31

由表 12-3、12-4 可以看出,随着嵌入维数的增高,D 最后趋于稳定,深成指数的分形维最后稳定在 2.24,上证指数的分形维稳定在 2.33。

由于上海市场和深圳市场同处于我国宏观经济大环境中,因而求出的两个分形维数相差不大是合理的。同时分形维也代表了决定系统的混沌吸引子的自由度,上证指数和深成指数收益率序列的分维数都在 2 和 3 之间,说明虽然我国证券市场运行系统很复杂,但其决定因素只有 3 个,即 3 个变量就可以完全决定系统的变化趋势。这对于进一步进行混沌模型的建立和预测具有重要意义。

3.我国证券指数测度熵的求解

(1)测度熵的计算方法

对于一个复杂的时间序列,如何判断它是被随机运动决定的,还是被多周期运动决定的,或者是由混沌运动决定的呢?测度熵的概念为区别这三种系统提供了理论基础。测度

熵又称柯尔莫戈诺夫(Kolmogorov)熵,能够描述系统的混沌特性及其程度,它给出了轨道在单位时间内产生的平均信息量的一个上限。它具有如下性质:测度熵 K 等于零时,系统是有序的,表示可能完全准确预测;K 为无穷大时,系统是随机的,表示可能作统计平均值预测;K 介于零和无穷大之间,即当 K 为一确定实数时,表明系统是混沌系统,并且系统的混沌程度随 K 值的增大而增大,这时可能作短期预测。

测度熵的定义及其表达式较为复杂,这里不作介绍,有兴趣的读者可以查阅参考文献中的相关书目。由于测度熵难于计算,考虑用二阶 Renyi 熵 K_2 来代替。K_2 与测度熵具有类似的性质,一般情况下,K_2 是 K 的一个恰当估计,并且易于从时间序列中计算。根据 Grassberger 和 Procaccia 提出的算法,对离散时间序列,固定延迟时间 τ,K_2 可表示成与前面定义的关联积分有关的极限,即

$$K_2 = -\lim_{\tau\to 0}\lim_{r\to 0}\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m\tau}\log_2 C_m(r) \tag{12.1.5}$$

对以上的极限求解进行一定的处理,对离散时间序列,固定延迟时间 τ,实际计算中 m 不可能取无穷,一般能保证数据计算结果比较稳定即可,r 取值在 0.001 ~ 0.05 之间,这也是与求解关联维数时相一致的。

结合 $C(r)\propto r^D$ 对其进行一定的数学处理得到

$$\log_2 C_m(r) = D\log_2 r - K_2 m\tau \tag{12.1.6}$$

在嵌入维数为 m 和 $m+n$ 下

$$\log_2 C_m(r) = D\log_2 r - K_2 m\tau \tag{12.1.7}$$

$$\log_2 C_{m+n}(r) = D\log_2 r - K_2(m+n)\tau \tag{12.1.8}$$

$C_m(r)$和 C_{m+n}分别表示嵌入维数为 m 和 $m+n$ 下的关联积分。

对上述计算分形维时的线性回归方程(固定嵌入维数、延迟时间,在 r 的变化下会得到一组 x 和 y 的值):

$$y_m = ax_m + b_m \tag{12.1.9}$$

式中 m 为嵌入维数,$a = D$(即 a 等于分形维数),在嵌入维数为 m 和 $m+n$ 下,a 值假定相差不大,将两式相减得到

$$K_2 = \frac{\Delta b_m}{n\tau} \tag{12.1.10}$$

式中 $\Delta b_m = b_{m+n} - b_m$。这就是测度熵的计算表达式,实际计算时可取 $n=1$。

(2)计算结果

对上证指数,取时滞为 8,嵌入维数 2 ~ 20,得到的图形如图 12-8 所示。

随着维数的增大,测度熵逐渐稳定在 0.03 和 0.04 之间,当嵌入维数等于 20 时,测度熵为 0.037 487 5。同样,对深成指数,测度熵稳定在 0.07 至 0.08 之间。由此可见,满足测度熵为一确定实数,故系统具有混沌特性。根据测度熵的性质,其大小反映系统的混沌程度,深成指数的测度熵较大,说明深圳市场的结构较为复杂。造成这种现象的原因可能是市场

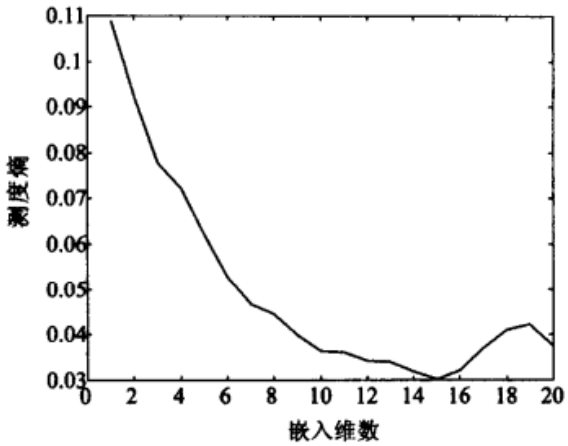


图 12-8　上证指数测度熵计算曲线图

规模小,投资者不成熟等多种因素。

12.1.3　我国证券指数的混沌预测

1.证券市场的相空间预测方法

相空间预测途径与传统的时间序列预测途径有较大的不同,它较传统确定性和随机性预测方法更多地利用了时间序列中包含的丰富信息,因此能够得到更精确的结果。本节以相空间重构理论为基础,对不同的预测期,应用相空间的多点相似预测方法,对上证指数进行预测分析,并对不同的预测期的预测结果进行比较,得出较优的相空间预测方法。

(1)"零级近似"的预测方法

在介绍"多点相似"预测方法之前,先介绍一下"零级近似"方法。

Farmer 等首先提出一种利用近似相矢的混沌时间序列预测方法,由时间序列 $x(t_i)(i=1,2,\cdots,n)$中的 n 个已知数据,预测该时间序列随时间演化后的 $x(t_i)(i=n+1,n+2,\cdots)$ 的步骤如下。

①首先定义近似相矢:如 $Y_i(t)$和 $Y_{ie}(t)$之间满足 $\| Y_i(t)-Y_{ie}(t) \| = \min$,则称 $Y_{ie}(t)$ 为 $Y_i(t)$的近似相矢,其中 $i > ie$。

②找出与时间序列的最后一个已知数据 $x(t_n)$对应的 m 维矢量 $Y_n(t)$,并找到其近似相矢 $Y_{ne}(t)$。

③这两个近似相矢随时间各自演化一步成为 $Y_n(t+T)$和 $Y_{ne}(t+T)$,其中 T 为演化步长(T 为原时间序列时间间隔 Δt 的整数倍),假设演化后的两个相矢仍旧是近似的相矢。

④根据近似相矢相应坐标分量彼此接近的原理,将 $Y_{ne}(t+T)$中最后一个分量 $x(t_{ne}+T)$的数值作为预测相点 $Y_n(t+T)$的相应分量 $x(t_n+T)$的值,即预测值。

这种方法有着明显的系统误差,因为最后是以近似相矢的分量来近似预测,根据混沌理论,在相空间中相点的轨道是不会重复的,因此利用近似相矢的分量近似相等,其预测结果

只能是大于或小于真实值,在理论上都不存在精确预测的可能性。下面介绍的"多点相似"预测方法能够对其进行一定的改进。

(2)"多点相似"预测方法

上述方法中选择一个相点代表性可能不足,计算的精度也无法保证,很可能造成较大的误差。因此进一步可以考虑 $k(k>1)$个相似点(通常仍以近邻点代表)进行预测。设最后一个已知数据 $x(t_n)$对应的 m 维矢量 $Y_n(t)$和它的 k 个最邻近状态为 $Y_{ne}(t_1)$, $Y_{ne(t_2)}$, $\cdots$, $Y_{ne}(t_k)$, $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 均小于 t,经 T 步长后,状态分别演化为 $Y_n(t+T)$和 $Y_{ne}(t_1+T)$, $Y_{ne}(t_2+T), \cdots, Y_{ne}(t_k+T)$。同样基于相似的原则,用 $Y_n(t+T)$的 k 个最近似状态来集成预测$Y_n(t+T)$。对其进行加权平均,权重 λ_i 通常考虑为 t 时刻的 $Y_n(t)$与其 k 个近邻点距离成反比的原则确定,即

$$\hat{Y}(t+T)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i Y_{ne}(t_i+T)$$

其中 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$。

这样邻近相矢可能有的大于真实值,有的小于真实值,对其加权平均之后,不仅预测更加精确,而且从理论上来说也有与真实值相等的可能性。参考点数 k 的选择较重要,点太多通常是不必要的,甚至会影响预测的效果。一般 $k\geqslant m+1$, m 是相空间的嵌入维数。

下面以上证指数的 2 407 个数据为起始数据(1991 年 1 月 2 日至 2000 年 9 月 12 日),对其后的数据进行了 73 个点的预测(2000 年 9 月 13 日至 2000 年 12 月 29 日),这样能以更多的数据来检验这一方法的精度。

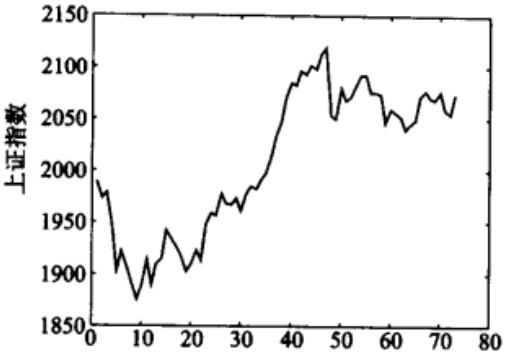
计算过程中,并不是以时间序列的最后一个已知数据 $x(t_n)$对应的 m 维矢量 $Y_n(t)$为预测点,而是保证 $Y_{ne}(t+T)$与 $Y_n(t)$较靠后者的最后一个分量为时间序列的最后一个已知数据,因为 $t_{ne}+T$ 有可能大于 t_n。另外,演化时间(或称预测期) T 的选择对预测的准确程度也会有所影响,分别取 $T=3,5,7,8$ 进行计算,所得结果见图 12-9。

从以上的计算结果来看,预测期分别取 $T=3,5,7,8$ 时,预测数据对证券指数的小幅波动没有能够准确的描绘,但对大盘的基本走势却很好地反映出来。从预测数据误差图来看,百分比误差都在 ±4% 以内,这也是可以接受的。$T=8$ 时,预测数据误差的绝对值的平均值最小,为 1.2%,预测效果最好。

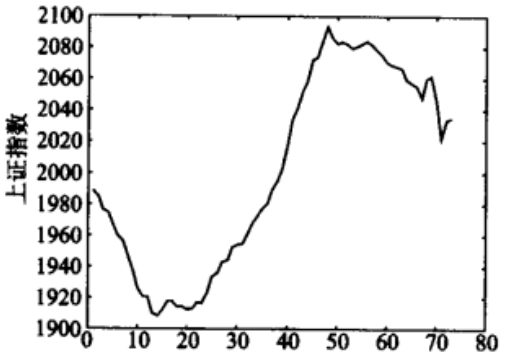
相空间预测方法揭示了证券指数的混沌性,是不同于传统确定性和随机性途径预测方法的一种新途径。传统的时间序列预测方法基于时间的一维"空间",无法容纳多维的奇异吸引子,丢失了许多关于证券指数演化的信息,而相空间途径可以更充分地利用时间序列中证券指数变化的信息。因此,进一步探索相空间预测方法对证券指数时间序列的适用性以及简便易行的使用方法,对于提高证券市场预测精度很有意义。

2.混沌时间序列的局域预测方法

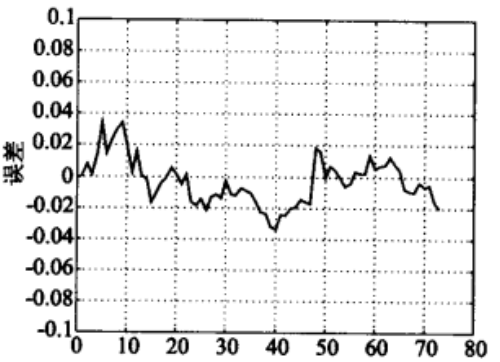
混沌时间序列预测是近年来发展起来的一种非线性预测新方法,它已在天气预报、经济



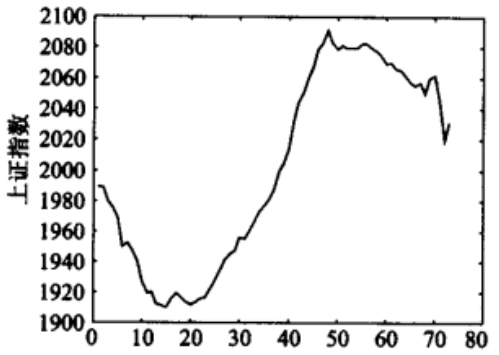
原始数据图



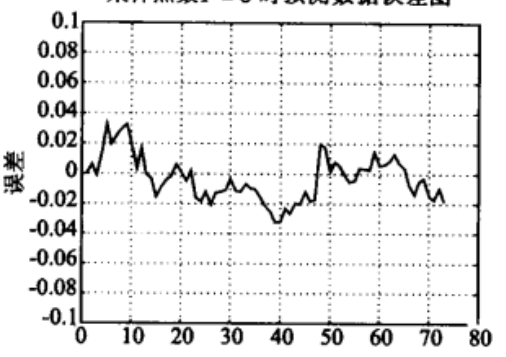
采样点数 $T=8$ 时预测数据图



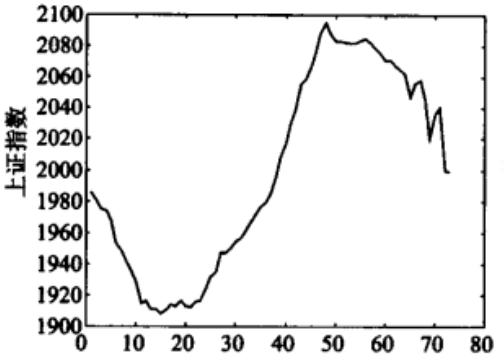
采样点数 $T=8$ 时预测数据误差图



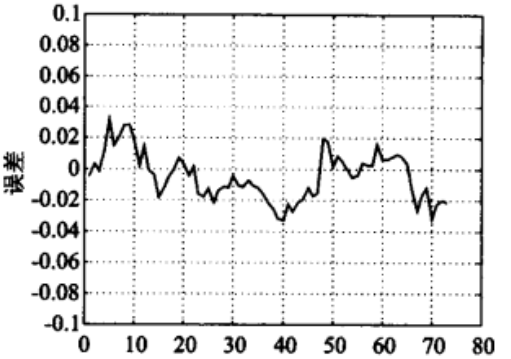
采样点数 $T=7$ 时预测数据图



采样点数 $T=7$ 时预测数据误差图



采样点数 $T=5$ 时预测数据图



采样点数 $T=5$ 时预测数据误差图

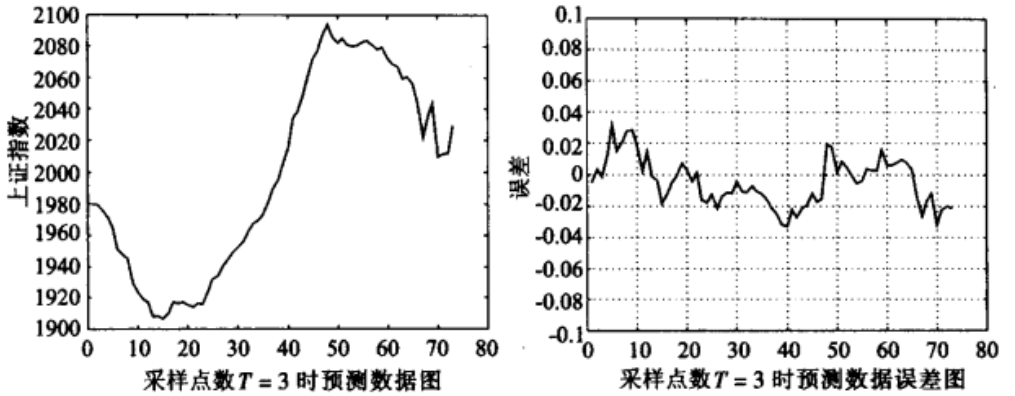


图 12-9 $T=3,5,7,8$ 时的相空间预测结果比较图

预测和洪水预测等方面取得了一定的成功,但在股市预测中的使用还不多见。由于混沌运动对初始条件极其敏感的"蝴蝶效应",无法作出长期的精确预测,但进行较准确的短期预测还是可能的。时间序列一经证实具有混沌性,就可应用混沌时间序列预测方法进行计算。这里将混沌时间序列预测方法应用于深成指数的预测之中,并取得了一定的效果。

混沌吸引子中不同轨道上不相交、互相靠近、分量相差很小(长度接近,夹角也很小)的两个相矢量称为"近似"相矢,在重构相空间中与 $Y_i(t)$ 近似的相矢 $Y_{ie}(t)$ 可由下式得到:

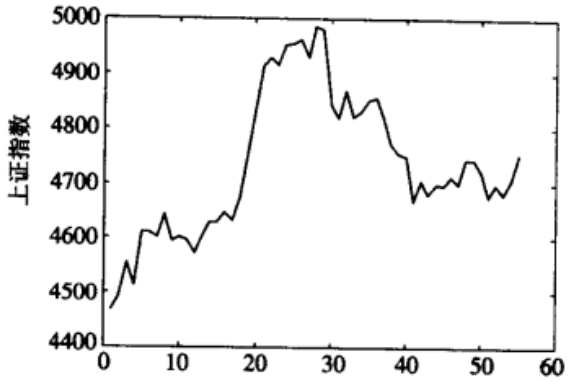
$$\| Y_i(t) - Y_{ie}(t) \| = \min$$

下面介绍一种在局部相空间进行线性回归的方法,在预测的每一时段,都求出两个近似相点之间应该满足的关系式,并将这一关系用于预测计算。首先,根据上式的计算结果,找出包含最后一个已知数据 $x(t_n)$ 的 m 维矢量 $Y_n(t)$ 和它的近似相矢 $Y_{ne}(t)$。将上述两个近似相矢之间的关系表示为

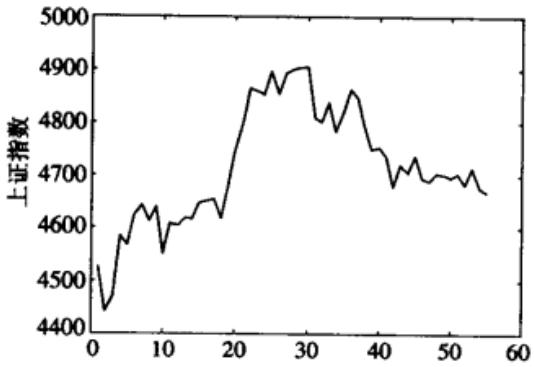
$$Y_n(t) = AY_{ne}(t) + B$$

上式为 m 个线性方程式组成的方程组,用线性回归方法计算回归系数 A、B;$Y_n(t)$ 和 $Y_{ne}(t)$ 两个相矢各自随时间演化一步得到 $Y_n(t+T)$ 和 $Y_{ne}(t+T)$,其中 T 为演化步长,如果这两个相矢各自随时间演化的情况比较接近,演化一步不改变它们之前原来满足的关系式,就可以按上式预测相矢 $Y_n(t+T)$,于是可用关系式 $x(t_n+T)=Ax(t_{ne}+T)+B$ 预测 $x(t_n+T)$ 值。

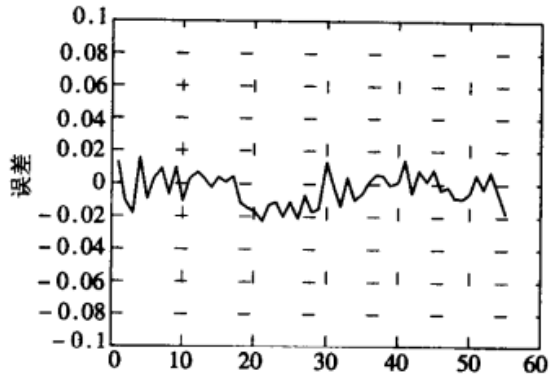
取深成指数 2 337 个数据(1991 年 4 月 3 日至 2000 年 10 月 13 日)为初始时间序列,对其后的 55 个点(2000 年 10 月 15 日至 2000 年 12 月 29 日)分别进行了计算。计算过程中,并不是以时间序列的最后一个已知数据 $x(t_n)$ 对应的 m 维矢量 $Y_n(t)$ 为预测点,而是保证 $Y_{ne}(t)$ 与 $Y_n(t)$ 较靠后者的最后一个分量为时间序列的最后一个已知数据,因为 $t_{ne}+T$ 有可能大于 t_n。另外,演化时间(或称预测期)T 的选择对预测的准确程度也会有所影响,分别取 $T=3,5,7,8$ 进行计算,得到结果如图 12-10。



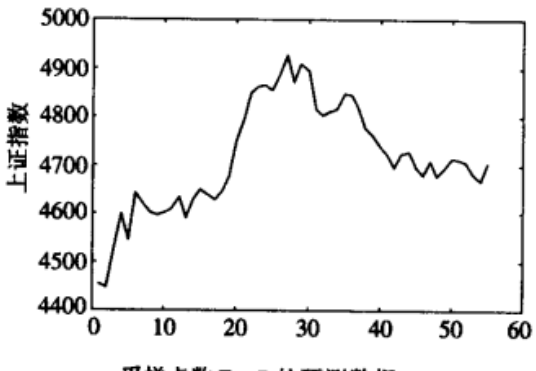
原始数据



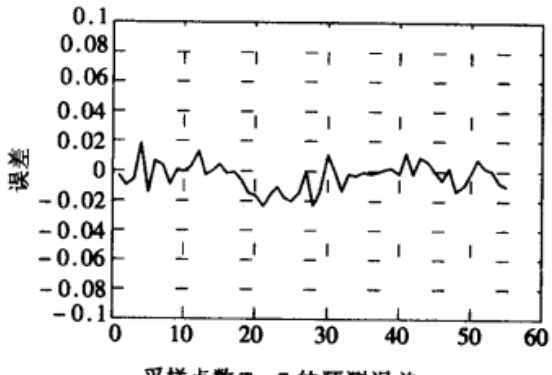
采样点数 $T=8$ 的预测数据



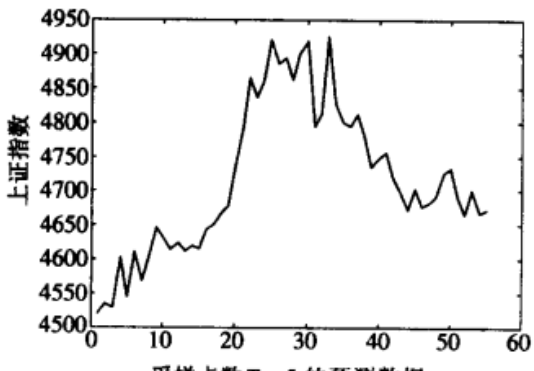
采样点数 $T=8$ 的预测误差



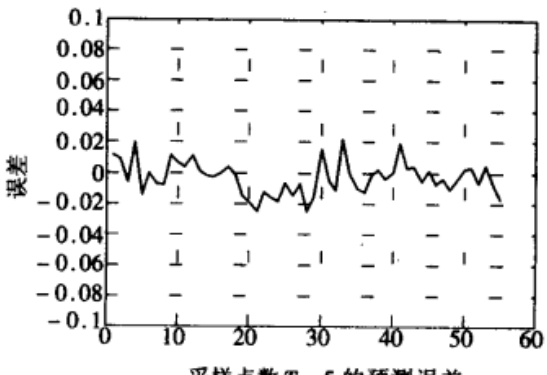
采样点数 $T=7$ 的预测数据



采样点数 $T=7$ 的预测误差



采样点数 $T=5$ 的预测数据



采样点数 $T=5$ 的预测误差

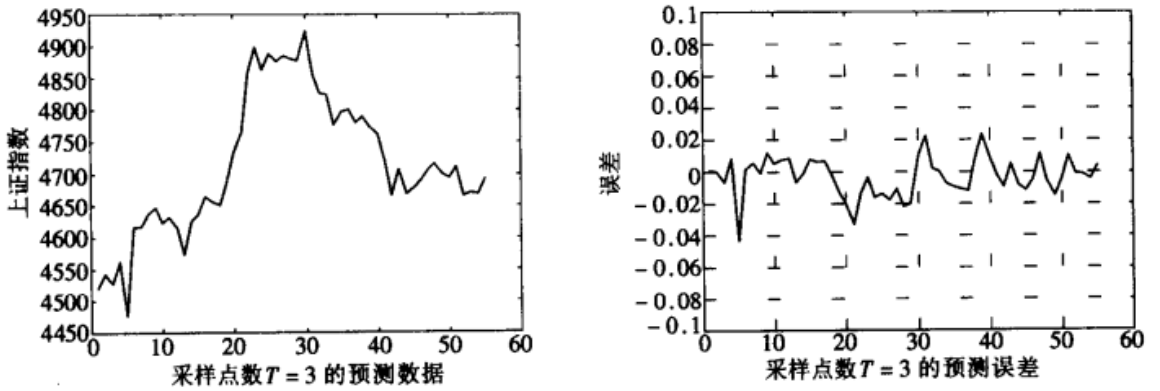


图 12-10 $T=3,5,7,8$ 时的混沌局域预测结果比较图

从以上计算结果来看，预测数据不仅对原始数据的基本走势有了清楚的体现，而且对原始数据小幅波动的波峰、波谷在预测数据中的相应位置基本上都有所反映。预测数据的百分比误差也基本上在 ±4% 之内，$T=7$、8 时，误差绝大部分在 ±2% 之内，误差的绝对值的平均值不到 1%，预测效果较好。

以上的计算是假设 $Y_n(t)$ 和它的近似相矢 $Y_{ne}(t)$ 之间满足的是线性的关系，如果假设 $Y_n(t)$ 和 $Y_{ne}(t)$ 之间满足的是非线性的关系，是不是能得到更精确的结果呢？笔者对这一想法进行了验证：假设 $Y_n(t)$ 和 $Y_{ne}(t)$ 之间满足二次多项式的关系，对其进行多项式拟合，确定其系数，如果随时间演化得到的 $Y_n(t)$ 和 $Y_{ne}(t+T)$ 仍满足此非线性关系，便可进行预测计算。仍利用以上数据，对线性预测中预测结果较好的 $T=7$、8 进行非线性预测，所得结果见图 12-11。

从以上的计算结果可以看出，假设 $Y_n(t)$ 和 $Y_{ne}(t)$ 之间满足的是非线性的二次多项式的关系，并没有期望中的那样改善了预测的精度，不仅个别点有较大的误差，而且对整个数据的基本走势的反映也走了样。由此可见，局域线性回归预测方法不仅计算较为简便，而且能保证一定的精度。但是否存在更合适的预测函数，还需进行进一步的深入研究。

混沌时间序列的局域线性回归预测算法与传统的时间序列预测算法有着较大的差异。真实的证券市场系统是高维的，是通过相点来描述的，而我们看到的时间序列只是系统在相空间中运动所产生的相点的分量的交叉罗列，因此应用这些交叉罗列的相点的分量进行系统规律的研究很难反映真实系统的运动状况。使用的局域线性回归预测方法与传统的线性回归方法不同，因为它反映了原时间序列的混沌特性，通过相空间重构技术，充分利用了隐藏在时间序列中高维系统的信息，这是传统方法无法做到的，因此能够取得更好的预测效果，应该在实际应用中不断发展这种方法。

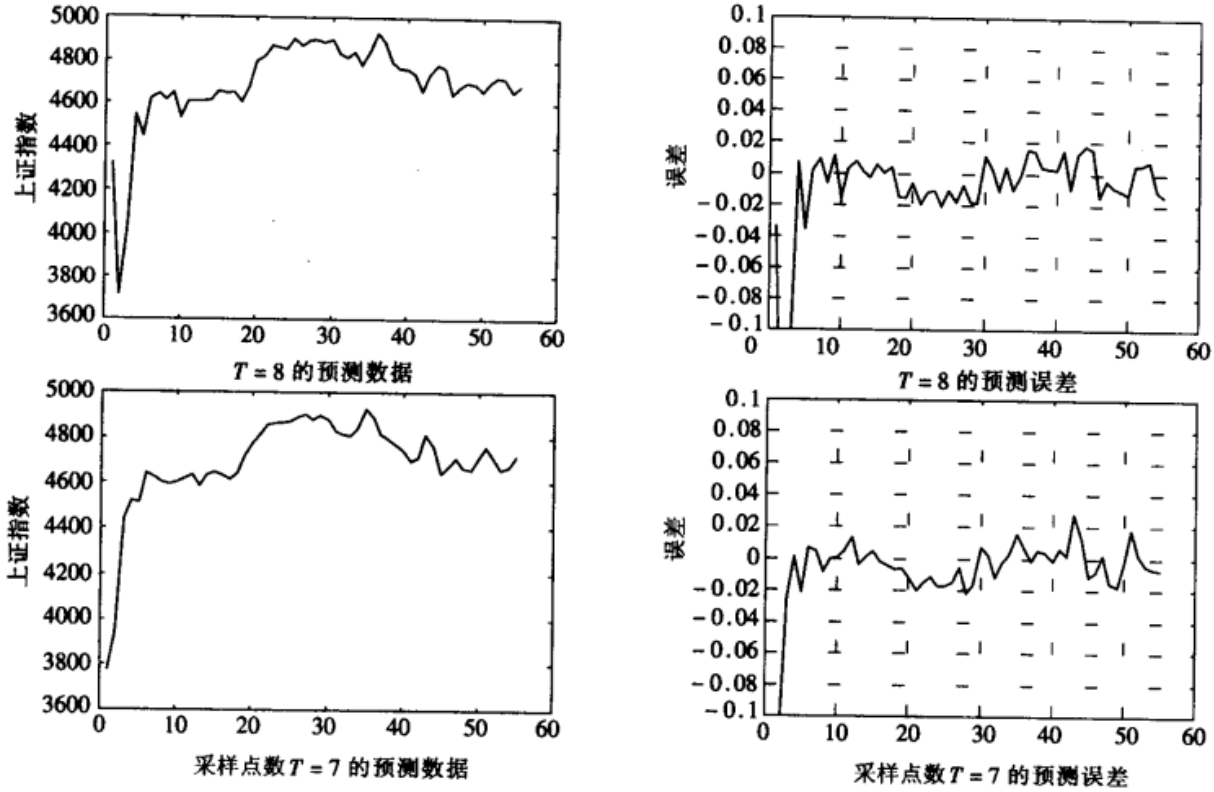


图 12-11　近似相矢满足非线性关系时的预测结果

12.2　国内生产总值的非线性混沌预测

12.2.1　研究背景

在市场经济条件下，对经济系统进行宏观的监控和调控是十分必要的，也是符合我国国策和国情的。但是调控的方向和力度必须准确，并且能够根据实际情况作出及时的调整，这就要求对经济系统内外各经济变量之间的数量关系很清楚，而在这些经济变量中，国内生产总值是最为重要的一个。

国内生产总值(Gross Domestic Product，简称 GDP)，是指在一个特定时期内，一个国家的所有最终产品与劳务的市场价值，是在国内生产的财富和服务行业的附加价值的总额。简言之，就是从用金额来表示其价格的大家所从事生产活动的产品价值中，扣除生产中所需原材料等费用后的总额。

依据宏观经济核算理论，国内生产总值指标可以从生产、分配收入和使用支出三个环节加以计算：

$$GDP = \sum(\text{各部门总产出} - \text{中间消耗})$$

$$= \sum(\text{各部门资本消耗} + \text{劳动报酬} + \text{生产税净额} + \text{营业盈余})$$

$$= \text{总消费} + \text{总投资} + (\text{货物和服务出口} - \text{货物和服务进口}) \tag{12.2.1}$$

由式(12.2.1)可以看出国内生产总值能够综合反映一个国家或者地区的国民经济活动的总量,表明该国或者该地区的经济实力,衡量国民经济发展规模、速度和进行国际对比的功能。应用传统的非线性回归模型很难求出精确解并且趋势外推发散快、误差大。实际的经济系统都是离散的非线性系统,非线性混沌动力学模型更适用研究经济系统,它能够较为准确地揭示经济系统的运行规律。

12.2.2 国内生产总值混沌动力学模型

设一时间序列$\{GDP_i\}$,其中 GDP_i 为第 i 年的国内生产总值,$i=1,2,\cdots,n$,对该时间序列作预处理,即

$$T_i = \frac{GDP_{i+1}}{GDP_i} \quad (i=1,2,\cdots,n-1) \tag{12.2.2}$$

对时间序列$\{T_i\}$,进行非线性回归,不失一般性,可以设非线性自回归模型:

$$T_{i+1} = aT_i^2 - bT_i + c \quad (a \neq 0) \tag{12.2.3}$$

将 $T_i = dX_i + f$ 代入式(12.2.3),得

$$X_{i+1} = AX_i^2 - BX_i + C \tag{12.2.4}$$

其中

$$A = ad, B = b - 2af, C = \frac{af^2 - (b+1)f + c}{d}$$

如果 $C=0$,即

$$af^2 - (b+1)f + c = 0 \tag{12.2.5}$$

若要式(12.2.5)成立,则 $\Delta = (b+1)^2 - 4ac \geqslant 0$,而 $f = \frac{(b+1)+\sqrt{\Delta}}{2a}$,此时式(12.2.4)可改写为

$$X_{i+1} = AX_i^2 - BX_i \tag{12.2.6}$$

令 $X_i = \frac{B}{A}Y_i$,$K = -B$,则

$$Y_{i+1} = KY_i(1 - Y_i) \tag{12.2.7}$$

12.2.3 国内生产总值混沌动力学分析

式(12.2.7)是著名的单种群模型(logistic map)。令 $f(Y_i, K) = KY_i(1 - Y_i)$,则一次映射的不动点 Y_F 满足方程

$$f(Y_F, K) - Y_F = KY_F(1 - Y_F) - Y_F = 0 \tag{12.2.8}$$

解得

$$\left.\begin{aligned} Y_{F_1} &= 0 \\ Y_{F_2} &= 1 - \frac{1}{K} \end{aligned}\right\} \tag{12.2.9}$$

根据

$$\left.\frac{\partial f(Y,K)}{\partial Y}\right|_{Y=Y_{F_1}} = K, \left.\frac{\partial f(Y,K)}{\partial Y}\right|_{Y=Y_F} = 2 - K \tag{12.2.10}$$

则根据稳定性和分岔理论可得：

①当 $0 \leqslant K < 1$ 时，有唯一稳定不动点 Y_{F_1}；

②当 $K = 1$ 时，系统产生跨临界分岔，Y_{F_1} 不稳定，Y_{F_2} 稳定；

③当 $1 < K < 3$ 时，不动点 Y_{F_1} 不稳定，Y_{F_2} 稳定，并且收敛于 $\frac{K-1}{K}$；

④当 $K = 3$ 时，不动点 Y_{F_2} 经倍周期分岔失稳，系统有一对周期 2 不动点。

二次映射时，周期 2 不动点满足方程：

$$f^2(Y_F, K) - Y_F = K^2 Y_F(1 - Y_F)[1 - KY_F(1 - Y_F)] - Y_F = 0 \tag{12.2.11}$$

解式(12.2.11)可得 4 个不动点

$$\left.\begin{aligned} Y_{F_1} &= 0 \\ Y_{F_2} &= 1 - \frac{1}{K} \\ Y_{F_3} &= 1 + K - \frac{1}{2K}\sqrt{(K+1)(K-3)} \\ Y_{F_4} &= 1 + K + \frac{1}{2K}\sqrt{(K+1)(K-3)} \end{aligned}\right\} \tag{12.2.12}$$

同样，根据稳定性和分岔理论可得：

①当 $3 < K < 1 + \sqrt{6}$ 时，不动点 Y_{F_1}、Y_{F_2} 不稳定，Y_{F_3}、Y_{F_4} 是稳定的周期 2 不动点；

②当 $K = 1 + \sqrt{6}$ 时，Y_{F_3}、Y_{F_4} 经倍周期分岔失稳，系统有两对周期 4 不动点。

当 n 次映射时，用数学归纳法可以证明：

①当 $K_{m-1} < K < K_m$ 时，系统具有 2^m 个 n 周期不动点，其中 2^{m-1} 个是稳定的，另外 2^{m-1} 个是不稳定的；

②当 $K = K_m$ 时，2^{m-1} 个稳定的 n 周期不动点发生倍周期分岔，系统有 2^m 个 $2n$ 周期不动点。

综上所述：在 $0 \leqslant K \leqslant 1$ 时，有一个稳定的不动点 $Y_F = 0$；当 $1 < K \leqslant 3$ 时，$Y_F = 0$ 不稳定，而 $Y_F = 1 - \frac{1}{K}$ 稳定；当 $3 < K \leqslant 1 + \sqrt{6}$ 时，$Y_F = 0$ 和 $Y_F = 1 - \frac{1}{K}$ 都不稳定，其二次迭代解稳定；

当 $K=1+\sqrt{6}$时，分岔出一对周期 4 解，而后再分岔出周期 8 解、16 解等等，大约在3.569 94时，进入混沌区。

12.2.4 实证分析

以下就天津市 1992 年至 2000 年的国内生产总值进行实证分析和检验。其中 1992 年至 1998 年的数据为预测数据，1999 年至 2000 年的数据为检验数据。表 12-5 为 1992 年至 2000 年的天津市国内生产总值。

表 12-5 1992 年至 2000 年的天津市国内生产总值 亿元

1992	411.24	1995	920.11	1998	1 336.38
1993	536.1	1996	1 102.4	1999	1 450.06
1994	735.14	1997	1 240.4	2000	1 639.36

将 1992 年至 1998 年的数据按照式(12.2.2)进行预处理，表 12-6 为预处理后的数据。

表 12-6 预处理后的天津市国内生产总值

1.303 6	1.371 3	1.251 6	1.198 1	1.125 2	1.077 4

对表 12-6 中的数据进行非线性回归，使得拟合曲线与表 12-6 中的数据的误差最小，可得拟合曲线为

$$T_{i+1}=4.07T_i^2-9.01T_i+6.08 \tag{12.2.13}$$

则

$$\Delta=(b+1)^2-4ac=1.217\ 7>0,\quad f=\frac{(b+1)+\sqrt{\Delta}}{2a}=1.365\ 3$$

$$B=b-2af=-2.103\ 5,\quad K=-B=2.103\ 5$$

因为 $1<K<3$，则时间序列$\{Y_i\}$收敛于$\frac{K-1}{K}=0.524\ 6$，时间序列$\{X_i\}$收敛于$\frac{B}{A}\cdot\frac{K-1}{K}$，时间序列$\{T_i\}$收敛于 $d\cdot\frac{B}{A}\cdot\frac{K-1}{K}+f=\frac{B}{a}\cdot\frac{K-1}{K}+f=1.094\ 2$。由此测算得 1999 年天津市国内生产总值为 1 462.27 亿元，2000 年天津市国内生产总值为 1 600.01 亿元，其相对误差分别为 8.4‰和 2%，其预测精度还是很高的，满足要求。

若按照非线性回归模型(12.2.13)计算，1999 年天津市国内生产总值为 1 384.9 亿元，2000 年天津市国内生产总值为 1 514.9 亿元，其相对误差分别为 4.5%和 7.6%。

若利用灰色预测法预测，原始序列

$$\boldsymbol{T}^{(0)}=[1.303\ 6\quad 1.371\ 3\quad 1.251\ 6\quad 1.198\ 1\quad 1.125\ 2\quad 1.125\ 2\quad 1.077\ 4]$$

则根据灰色预测法可以得到其后两年的预测值为 1.002 1 和 0.944 8，即 1999 年天津市国内生产总值为 1 339.2 亿元，2000 年天津市国内生产总值为 1 265.3 亿元，其相对误差分别为 7.6%和 22.8%。可见，利用非线性回归方法结合混沌预测，预测结果的准确度明显优于单纯用非线性回归方法和灰色预测方法的预测结果。

12.3　人口预测中的分岔与混沌

12.3.1　研究背景

人口问题不仅是 20 世纪我国所面临的最重大的问题之一，而且在新世纪中将继续存在。无论是对我国目前经济发展状况的认识，还是对未来经济发展的预测，人口问题的研究都具有十分重要的意义。

众所周知，人口的增长并不是按比例线性增长的，也就是说人口问题是非线性动力学问题。在非线性系统中，可能会出现分岔现象，分岔理论为研究人口问题提供了一种新的方法。

对于含参数的系统，当参数变动并经过某些临界值时，系统的定性性态（例如平衡状态或周期运动的数目和稳定性等）会发生突然变化，这种变化称为分岔。它是用来研究非线性常微系统，由于参数的改变而引起的解的不稳定性，从而导致解的数目的变化行为。如果某个动力系统是结构不稳定的，则任意小的适当的扰动都会使系统的拓扑结构发生质的变化，这种质的变化称为动态分岔。当动态分岔出现时，系统的结构必定是不稳定的，可见分岔问题与结构稳定性有着密切的联系。一般来说，解的数目越多，系统的稳定性就越差。动力系统的研究不但要研究结构稳定性的问题，而且也应当考虑由于结构不稳定性而引起的系统稳定性行为的变化。此外，在动力系统中还可以通过一系列的分岔导致混沌运动的出现，这表明分岔和混沌是有密切关系的复杂运动。

分岔和混沌是非线性系统特有的现象，而实际上我们所处的社会经济系统中的绝大部分都是非线性，因此可以运用分岔和混沌理论来研究。这里将分岔和混沌理论用以研究人口问题，提出了人口的跨临界分岔。

12.3.2　系统非线性动力学模型的建立

设在时刻 t（以年为单位）时的人口数量为 $P(t)$，则人口的增长率为 $\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}$，再假设出生率 $b(p,t)$ 和死亡率 $d(p,t)$，不随时间变化，则由马尔萨斯人口理论可得

$$\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} = b(p,t)p(t) - d(p,t)p(t) = \alpha_1 p(t) \tag{12.3.1}$$

其中 $\alpha_1 = b(p,t) - d(p,t) > 0$，一般而言出生率大于死亡率。

显然马尔萨斯模型存在着重大的缺陷,它没有考虑到物种之间的竞争、自然界的平衡和人文环境因素,即生活资料及空间的局限、人与人的竞争、生产力水平、文化水平以及传统观念等因素。

生活资料及空间的局限和人与人的竞争会导致冲突,对人口的增长起到制约的作用。统计规律显示,从人口 $P(t)$中随机抽取一个人,他与其他人冲突的概率与人口总数成正比,即冲突次数 $= k_1 p(t)$,那么 $p(t)$个人冲突的总次数为$\frac{1}{2}k_1 p(t)^2$。而制约作用也是随着总次数的增长而增长,同总次数成正比,以 $\delta_1(p,t)$表示制约作用,则

$$\delta(p,t) = \frac{1}{2}k_1 k_2 p(t)^2 = \beta p(t)^2 \tag{12.3.2}$$

西方大多数国家并没有像我国一样实行计划生育来控制人口,但是这些国家的人口数量却增长缓慢,甚至出现了负增长。另外,就我国而言,农村人口的增长远远高于城市人口的增长,可见生产力、文化和传统观念对人口的影响还是很明显的。为了便于研究,可以认为影响作用与生产力发展水平 α_2 成反比,与文化发展水平 α_3 成反比,与中国传统观念 α_4 成正比,与人口数量 $p(t)$成正比,用 $\delta_2(p,t)$表示这种影响,则

$$\delta_2 = \left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \alpha_4\right) p(t) \tag{12.3.3}$$

假设在未来的若干年内,各地区的人口比例保持不变,则对于某个地区来说,机械迁徙的人口数量与该地区经济发达程度 α_5 成正比,而与迁出区的人口数量成正比,因为可以近似地认为各地区的人口比例不变,所以可以认为与该地区的人口数量成正比,则

$$\delta_3(p,t) = \alpha_5 p(t) \tag{12.3.4}$$

将式(12.3.1)、式(12.3.2)、式(12.3.3)、式(12.3.4)综合起来,充分考虑这几者的作用,得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} &= \alpha_1 p(t) - \delta_1(p,t) + \delta_2(p,t) + \delta_3(p,t)\\ &= \left(\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \alpha_4 + \alpha_5\right) p(t) - \beta p(t)^2\\ &= \alpha p(t) - \beta(t) p(t)^2\end{aligned} \tag{12.3.5}$$

12.3.3 系统特性分析

运用分岔理论对模型$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \alpha p - \beta p^2$ 进行分析。

1.求平衡解

令

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \alpha p - \beta p^2 = 0$$

则解得

$$p_1 = 0, p_2 = \frac{\alpha}{\beta}$$

将式(12.3.5)右边对 x 求导,得

$$D_x\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right) = \alpha - 2\beta p \tag{12.3.6}$$

将 p_1 代入式(12.3.6)得

$$D_x\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right)\Big|_{p_1=0} = \alpha$$

将 p_2 代入式(12.3.6)得

$$D_x\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right)\Big|_{p_2=\frac{\alpha}{\beta}} = -\alpha$$

2.稳定性分析

运用稳定性分析方法,可以很容易地判断其稳定性。

$$D_x\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right)\Big|_{p_1=0} = \alpha \begin{cases} \alpha > 0 \text{时}, & \text{不稳定} \\ \alpha < 0 \text{时}, & \text{稳定} \end{cases}$$

$$D_x\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right)\Big|_{p_2=\frac{\alpha}{\beta}} = -\alpha \begin{cases} \alpha > 0 \text{时}, & \text{稳定} \\ a < 0 \text{时}, & \text{不稳定} \end{cases}$$

3.相对人口增长率

将方程(12.3.5)两边同除以 $p(t)$,则

$$\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}\Big/p(t) = \alpha - \beta p(t)$$

由定义可知$\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}\Big/p(t)$就是相对增长率。

4.分岔图

图 12-12 为跨临界分岔图,图 12-13 为倍周期分岔、混沌图。

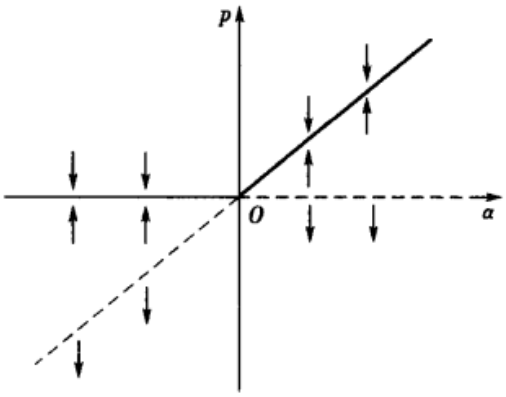


图 12-12　跨临界分岔图

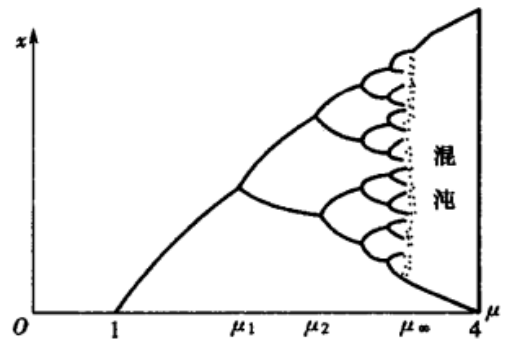


图 12-13　倍周期分岔、混沌图

其中,实线表示稳定,虚线表示不稳定。由图 12-12 可以看出该模型发生跨临界分岔。在 α 的 0 的某个邻域内,当 $\alpha>0$ 时,人口数量是稳定增长的;而当 $\alpha<0$ 时,从 α 系数的物理含义上看,说明死亡率大于其他影响因素系数之和,但是此时由于先前 $\alpha>0$,人口数量已经有所增加,所以能保持人口数量的稳定,同时也可以看出只有短期内保持 $\alpha<0$,人口数量才会稳定。

5.模型的混沌分析

将 $p(t+1)=p(t)+\dfrac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}$ 代入式(12.3.5)得

$$p(t+1)=(\alpha+1)p(t)-\beta p(t)^2 \tag{12.3.7}$$

令

$$x(t)=\frac{\beta}{\alpha+1}p(t),\mu=\alpha+1$$

代入式(12.3.7)得

$$x(t+1)=\mu x(t)[1-x(t)] \tag{12.3.8}$$

式(12.3.8)是著名的单种群模型(logistic map)。这个迭代映射在 $0\leqslant\mu\leqslant1$ 时,有一个稳定的不动点 $x=0$,满足 $x(t+1)=x(t)$;当 $1<\mu\leqslant3$ 时,$x=0$ 不稳定,而 $x=1-\dfrac{1}{\mu}$ 稳定;当 $3<\mu\leqslant1+\sqrt{6}$,$x=0$ 和 $x=1-\dfrac{1}{\mu}$ 都不稳定,其二次迭代解稳定,即 $x(t+2)=x(t)$ 且 $x(t+1)\neq x(t)$;当 $\mu=1+\sqrt{6}$ 时,分岔出一对周期 4 解,而后再分岔出周期 8 解、16 解等等,大约在 3.569 94时,进入混沌区,如图 12-13 所示。

12.3.4 系统的混沌预测

设初始时刻 t_0 的人口为 p_0,将式(12.3.4)分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\alpha p-\beta p^2}=\mathrm{d}t \tag{12.3.9}$$

对式(12.3.9)左右两边取定积分得

$$\int_{p_0}^{p}\frac{\mathrm{d}p}{\alpha p-\beta p^2}=\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t \tag{12.3.10}$$

对式(12.3.10)进行求解,可得

$$p(t)=\frac{\alpha p_0 \mathrm{e}^{\alpha(t-t_0)}}{\alpha-\beta p_0+\beta p_0 \mathrm{e}^{\alpha(t-t^0)}} \tag{12.3.11}$$

只要求出 α 和 β,就可以运用式(12.3.11)作人口预测。理论上,只要将两年的年份与人口数量,即 t_1、$p(t_1)$、t_2、$p(t_2)$ 代入式(12.3.11),则可得一个二元方程组,通过求解此二元方程组,便可以得到 α 和 β 值,但是此二元方程组为超越方程组,求解十分困难。

生态学家通过大量的统计,认为不鼓励也不限制生育时的 α 值为 0.029,将 α 代入式

(12.3.11)则可求得 $\beta=\dfrac{\alpha p_0-\alpha p_t e^{-\alpha(t-t_0)}}{p_0 p_t\left[1-e^{-\alpha(t-t_0)}\right]}$。可以看出，$\beta$ 会随着所代入的 t 的不同而变化，不再是一个常数，而是一个变量；另一方面，我国实行计划生育，限制了出生率，并且模型(12.3.4)中考虑了生活资料和空间的局限性、人与人的竞争、生产力水平、文化水平以及中国传统观念等因素的影响，因此 α 的值不再是 0.029。

基于上述原因，采用数值解法，即确定适当的 α 和 β，使得

$$f=\sum_i\left(\frac{\alpha p_0 e^{\alpha(t_i-t_0)}}{\alpha-\beta p_0+\beta p_0 e^{\alpha(t_i-t_0)}}-p_i\right)^2=\min \tag{12.3.12}$$

其中 p_i 是第 i 年的人口数量，则

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0\\ \frac{\partial f}{\partial \beta}=0\end{aligned}\right\} \tag{12.3.13}$$

根据式(12.3.13)求解将十分复杂，可以用 Matlab 或 C 语言编写一段程序，在一定范围内搜索 α 与 β 值，使得式(12.3.12)成立。

12.3.5　实证分析

以下对河北省 1952 年至 2000 年人口数量进行实证分析和检验。众所周知，在建国后近 50 年中，我国经历了 3 年自然灾害，20 世纪 70 年代开始实行了计划生育政策，这些都会改变动力系统的特征，因此不能将这 49 年的数据看成是同一动力系统的，而应该将它们分成不同的动力系统：1952—1959 年、1966—1979 年、1980—1989 年、1990—2000 年。3 年自然灾害造成了人口数量的骤减，不仅改变了动力系统的特征，而且还造成了 1960—1965 年数据的不稳定，应予以剔除；20 世纪 80 年代后实行计划生育，但是 1989 年的学潮引起了大量人口的机械迁移，因此 90 年代可视为另一个动力系统。

表 12-7 为 1952 年至 2000 年河北省历年总人口数量表。以此为基础数据，根据式(12.3.11)计算得表 12-8。

表 12-7　河北省历年总人口数量表　　万人

年份	人口	年份	人口	年份	人口	年份	人口	年份	人口	年份	人口	年份	人口
1952	3 272	1959	3 791	1966	4 183	1973	4 804	1980	5 168	1987	5 710	1994	6 388
1953	3 343	1960	3 779	1967	4 254	1974	4 862	1981	5 256	1988	5 795	1995	6 437
1954	3 443	1961	3 795	1968	4 347	1975	4 913	1982	5 356	1989	5 881	1996	6484
1955	3 529	1962	3 884	1969	4 445	1976	4 943	1983	5 420	1990	6 159	1997	6 525
1956	3 589	1963	3 956	1970	4 550	1977	4 998	1984	5 487	1991	6 220	1998	6 569
1957	3 670	1964	3 997	1971	4 640	1978	5 057	1985	5 548	1992	6 275	1999	6 614
1958	3 732	1965	4 087	1972	4 728	1979	5 105	1986	5 627	1993	6 334	2000	6 674

表 12-8 计算数据表 万人

年份	α	β	原始计算数据	检验数据			相对误差	相对人口增长率
				年份	真实数据	预测数据		
1952 ~ 1959	0.081	1.67×10^{-5}	1952 ~ 1957 年数据	1958	3 732	3 741	2.4‰	1.87%
				1959	3 791	3 780	2.4‰	1.77%
1966 ~ 1979	0.091	1.598×10^{-5}	1966 ~ 1976 年数据	1977	4 998	5 000	4%%	1.11%
				1978	5 057	5 052	1‰	1.02%
				1979	5 105	5 107	3.9%%	0.94%
1980 ~ 1989	0.037	4.14×10^{-6}	1980 ~ 1986 年数据	1987	5 710	5 718	1.4‰	1.33%
				1988	5 795	5 794	1.7%%	1.3%
				1989	5 881	5 869	2‰	1.27%
1990 ~ 2000	0.053	7.03×10^{-6}	1990 ~ 1997 年数据	1998	6 569	6 571	3%%	0.68%
				1999	6 614	6 613	1.5%%	0.65%
				2000	6 674	6 657	2.5‰	0.61%

由表 12-8 可以看出,使用以上所提出的方法,能够较为精确地预测出人口的数量。4 个阶段的 α 均大于 0.029,这表明生活资料和空间的局限性、人与人的竞争、生产力水平、文化水平、中国传统观念、人口机械迁移以及实行计划生育等因素的综合影响,使人口趋于增多。相对人口增长率,即$\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}\Big/p(t)$,总体上越来越小。20 世纪 80 年代的攀升主要是由于人口迁移的影响,从整体上看人口自然增长率(一般小于人口增长率),也是逐年降低的。实例分析表明,河北省人口动力系统,$\alpha>0$,即处于稳定增长,并且增长幅度越来越小,表明河北省人口控制是有效的。

第 13 章　具有立方非线性机翼极限环颤振的研究

在飞行器设计中结构非线性不可避免，非线性效应常会使系统产生很复杂的运动现象，因此研究此类问题很有意义。国内外的许多学者在此领域做了大量的研究工作。包括：Woolston(1957)，Shen(1959)采用计算机模拟和谐波平衡法讨论了机翼颤振问题；Breitbach(1959)精辟地论述了应用实验和理论分析的方法，分析了具有结构非线性机翼的颤振运动；Shahrzad 和 Mahzoon(2002)应用稳定线性和非线性模型以及不稳定空气动力学模型研究飞机颤振系统，并把谐波平衡法、中心流形理论和规范形理论得到的结果与数值积分结果进行比较；Yang 和 Zhao(1990)用等效线性化法研究了机翼颤振的混沌问题并找到了混沌带；Yang(1990)用 KBM 法研究了带外挂机翼的颤振问题；Yang 和 Zhao(1988)借助于谐波平衡法系统地研究了机翼在不可压缩流中的极限环颤振，Zhao 和 Yang(1990)也通过数值积分发现了在不可压缩流中具有非线性刚度机翼的复周期倍化和混沌运动；Yang(1995)还用近似法研究了在结合处有分段线性刚度的一个机翼—外挂系统的亚谐分岔问题，在二元机翼颤振系统中存在着结构非线性刚度，结构非线性会使系统的动力学特性变得很丰富。

一个被扭曲的薄机翼或螺旋推进器叶片更可能像一个立方硬弹簧那样，随着扭转角度增大而变得更硬。如果发生屈曲，它的效应更像一个软弹簧，随着位移增大它的刚度减小。在高马赫值时，动力加热可以使结构刚度大大减小。依赖于温度和初始条件，非线性可能是一个硬化或软化的弹簧类型。有立方非线性的一个自由度机电系统通常用一个 Duffing 方程来表示。关于 Duffing 方程的特性，在由 Stoker(1950)和 Hayashi(1964)编写的两本经典著作中给出了精辟解释。Ueda(1980)在他的文章中研究了 Duffing 方程混沌特性。

近几年兴起的主动控制技术(杨智春、赵令诚和姜节胜，1993)为颤振控制提供了一个有效的手段，美国 NASA 的“解耦挂架”技术即可认为是半主动控制的成功应用。1984 年 Morino 根据其对结构非线性颤振稳定性的研究，提出了利用结构非线性颤振的极限环特性对颤振系统进行控制。根据对结构非线性颤振的研究发现，在极限环颤振状态下，速度超出临界风速，翼面振动并不发散，而是维持一个有限的等幅振动。研究中还发现，结构的非线性刚度参数直接影响着极限环颤振的稳定性和其振动幅值的大小，从而有可能采用主动、半主动控制技术来控制极限环的幅值和稳定性，达到抑制或减缓颤振的目的。

本章主要研究的是系统的霍普夫分岔，当线性俯仰刚度取不同值时，随着广义气流速度增大，系统所经历的分岔性态是不同的，动力学特性也是不同的。

13.1 机翼颤振系统的霍普夫分岔研究

在空气动力稳定的假设条件下，对具有俯仰和上下平移两个自由度的机翼颤振系统进行了研究，用立方非线性来表示俯仰弹簧的非线性。取广义气流速度 Q 和俯仰刚度的线性部分 k_0 作为系统的分岔参数。通过分析，得到了系统的动力学特性平衡点，并应用谐波平衡法研究了颤振系统发生 2-重半稳极限环颤振的临界值。

13.1.1 数学模型

在不可压缩流中的具有上下平移和俯仰两个自由度的二元机翼颤振系统的模型示意图，如图 13-1 所示。图中：b 是半弦长，ab 是从半弦点到弹性轴 E 的距离，$(0.5+a)b$ 是空气动力焦点 F 到 E 的距离，$x_a b$ 是弹性轴到质心的距离，α 是俯仰角，V 是气流速度，hb 是沉浮位移。根据无量纲时间 $t=\omega_\alpha \tau$（τ 是实数，单位为 s），在空气动力稳定的假设下，二元机翼的运动方程为

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{d}^2 h/\mathrm{d}t^2 + x_a(\mathrm{d}^2\alpha/\mathrm{d}t^2) + (\omega_h/\omega_\alpha)^2 h = -2Q\alpha/\mu \\ &x_a(\mathrm{d}^2 h/\mathrm{d}t^2) + r_a^2(\mathrm{d}^2\alpha/\mathrm{d}t^2) + r_a^2\alpha = (1+2\alpha)Q\alpha/\mu \end{aligned}\right\} \tag{13.1.1}$$

其中 $\mu = m/(\pi\rho b^2)$，ρ 是空气密度，m 是质量，r_a 是机翼关于 E 的回转半径，ω_h/ω_α 是关于上下平移弹簧和线性俯仰弹簧的固有频率的比值。这里 h 是上下平移位移与 b 的比值，$Q=(V/b\omega_\alpha)^2$。

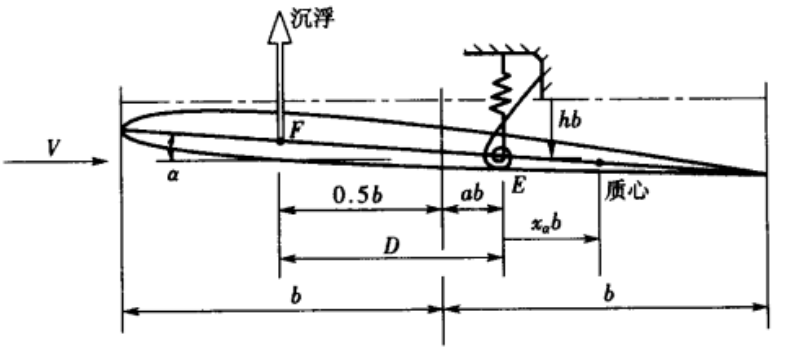


图 13-1 二元机翼略图

取 $x_a=0.25$，$r_a^2=0.25$，$a=-0.1$，$\mu=20$，$(\omega_h/\omega_\alpha)^2=0.2$，则具有黏性阻尼及立方俯仰刚度的颤振系统的运动方程是

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{h} + 0.25\ddot{\alpha} + 0.1\dot{h} + 0.2h + 0.1Q\alpha = 0 \\ &0.25\ddot{h} + 0.5\ddot{\alpha} + 0.1\dot{\alpha} + k_0\alpha + e\alpha^3 - 0.04Q\alpha = 0 \end{aligned}\right\} \tag{13.1.2}$$

其中 Q、k_0、e 分别为广义气流速度、线性俯仰刚度系数和非线性刚度因子，这里取 $e=20$。

13.1.2　平衡点分岔

令 $x_1=\alpha$，$x_3=h$，方程(13.1.2)可以写成一阶微分方程：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2\\ \dot{x}_2&=4(-4k_0+0.26Q)x_1+0.4x_2-0.2x_3-0.1x_4+80x_1^3)/7\\ \dot{x}_3&=x_4\\ \dot{x}_4&=4((k_0-0.24Q)x_1-0.1x_2+0.4x_3+0.2x_4-20x_1^3)/7\end{aligned}\right\}\tag{13.1.3}$$

显然，点 $O(0,0,0,0)$ 是系统的平衡点，在平衡点 O 的雅可比矩阵是

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 4(-4k_0+0.26Q)/7 & -1.6/7 & 0.8/7 & 0.4/7\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 4(k_0-0.24Q)/7 & 0.4/7 & -1.6/7 & -0.8/7\end{bmatrix}$$

它的特征多项式为 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda I)=0$，可以写成如下方程：

$$\boldsymbol{\lambda}^4+\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{\lambda}^3+\boldsymbol{c}_0\boldsymbol{\lambda}^2+\boldsymbol{d}_0\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{p}_0=0\tag{13.1.4}$$

其中

$$b_0=\frac{1.05}{1.75^2},\ c_0=\frac{0.77+7k_0-0.455Q}{1.75^2},\ d_0=\frac{0.14+7k_0-0.028Q}{1.75^2}$$

$$p_0=\frac{1.4k_0-0.056Q}{1.75^2}$$

在上面的方程中，当 $p_0=0$ 时，在直线 $Q_p=25k_0$ 上，方程(13.1.4)的一个特征值为零，此时系统会发生叉形分岔。当 $Q\leqslant Q_p$ 时，系统存在唯一的平衡点 $O(0,0,0,0)$；当 $Q>Q_p$ 时，系统还存在另外两个非零的平衡点 $x_\pm$，即为 $\left(\sqrt{\frac{1.12Q-14}{560}},0,-\frac{1}{2}Q\sqrt{\frac{1.12Q-14}{560}},0\right)$，$\left(-\sqrt{\frac{1.12Q-14}{560}},0,\frac{1}{2}Q\sqrt{\frac{1.12Q-14}{560}},0\right)$，在这两个平衡点的雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ (-0.88Q+32k_0)/7 & -1.6/7 & 0.8/7 & 0.4/7\\ (-0.48Q-8k_0)/7 & 0.4/7 & -1.6/7 & -0.8/7\end{bmatrix}$$

它的特征多项式为

$$\lambda^4+b_1\lambda^3+c_1\lambda^2+d_1\lambda+p_1=0\tag{13.1.5}$$

其中

$$b_1=\frac{1.05}{1.75^2},\ c_1=\frac{0.77-14k_0+0.385\,5Q}{1.75^2},\ d_1=\frac{0.14-1.4k_0+0.056Q}{1.75^2}$$

$$p_1=\frac{-2.8k_0+0.112Q}{1.75^2}$$

由以上分析可知,在该系统中存在霍普夫分岔,当分岔参数 k_0、Q 变化时,系统有很丰富的动力学特性。

13.1.3 应用谐波平衡法研究 2-重半稳极限环分岔

谐波平衡法是求解非线性振动问题常用的一种近似解析法。根据一阶谐波平衡法的概念,在方程(13.1.2)中的刚度项($k_0\alpha + e\alpha^3$)由一个线性刚度项 $k_a\alpha$ 代替,其颤振行列式为

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + 0.1\mathrm{i}\omega + 0.2 & -0.25\omega^2 + 0.1Q \\ -0.25\omega^2 & -0.5\omega^2 + 0.1\mathrm{i}\omega + k_a - 0.04Q \end{vmatrix} = 0 \tag{13.1.6}$$

这里 ω 是颤振频率,$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$。

分别令方程(13.1.6)的实部和虚部为零,得到下面的结果:

$$\left.\begin{aligned} &0.32Q^2 - (12.25k_a + 0.11)Q + (106.25k_a^2 - 16k_a + 1.55) = 0 \\ &\omega^2 = (k_a + 0.2 - 0.04Q)/1.5 \end{aligned}\right\} \tag{13.1.7}$$

由前面知,$e = 20$,$e\alpha^3$ 的等价线性刚度项是$(3/4)eA^2\alpha$,即

$$k_a = k_0 + 15A^2 \tag{18.1.8a}$$

或

$$A = \sqrt{(k_a - k_0)/15} \tag{13.1.8b}$$

将式(13.1.7)代入方程(13.1.8a)或(13.1.8b),得到如下的 A 与 Q 的隐函数关系式:

$$1.55 - 240A^2 + 23\ 906.3A^4 - 16k_0 + 3\ 187.5A^2k_0 + 106.25k_0^2 - 0.11Q - 183.75A^2Q - 12.25k_0Q + 0.32Q^2 = 0 \tag{13.1.9}$$

其中 A 是系统稳定极限环颤振的幅值。下面研究该系统分岔图和 2-重半稳极限环分岔。

关于平衡点 $O(0,0,0,0)$,当分岔参数 k_0、Q 取不同的值时,系统的 Q—k_a、k_a—A 和 A—Q 曲线图如图 13-2($k_0 = 0.5$)、图 13-3($k_0 = 0.081\ 6$)所示。

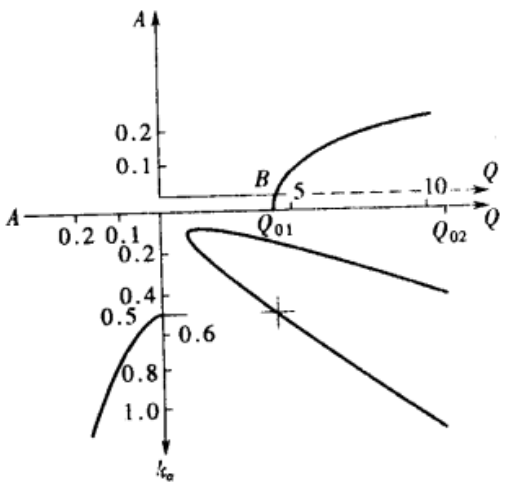


图 13-2 $k_0 = 0.5$ 时 Q—k_a、k_a—A、A—Q 分岔图

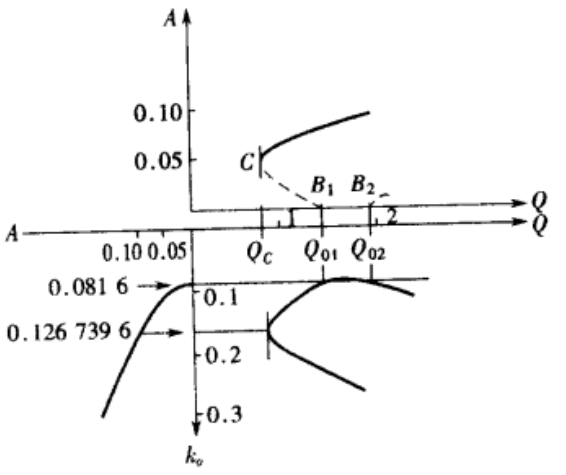


图 13-3 $k_0 = 0.081\ 6$ 时 Q—k_a、k_a—A、A—Q 分岔图

在参数平面 k_0—Q 上的两个点：$E(0.081\ 1,1.723\ 4)$，$F(0.126\ 7,0.891\ 9)$是平衡点 $O(0,0,0,0)$发生霍普夫分岔和超临界(亚临界)霍普夫的分界点。k_0 由 E 和 F 分成三个区间：$k_0 \geqslant 0.126\ 7$，$0.081\ 1 \leqslant k_0 \leqslant 0.126\ 7$ 和 $k_0 < 0.081\ 1$，图 13-2 和 13-3 分别给出了前两种情况的分岔图。图 13-2 表明，当 $k_0 \geqslant 0.126\ 7$ 时，系统在分岔点 B 处($Q = Q_{O1}$)会发生超临界霍普夫分岔，过了该点会出现一个稳定的极限环(这种情况是系统稳定性的软损失或极限环的软产生)。随着 Q 增大极限环颤振的幅值也不断增大；当 Q 继续增大到 $Q = Q_{O2}$ 时，在该分岔点处会发生亚临界霍普夫分岔，而当 $Q > Q_{O2}$ 时会出现一个不稳定的极限环。在图 13-3 中，当 $0.081\ 1 \leqslant k_0 < 0.126\ 7$ 时，在分岔点 $B_1(Q = Q_{O1})$和 $B_2(Q = Q_{O2})$处都发生了亚临界霍普夫分岔。因此当 $Q < Q_{O1}$ 和 $Q > Q_{O2}$ 时，会出现一个不稳定的极限环。当 $k_0 < 0.081\ 1$ 时，没有霍普夫分岔发生。因此，当 $k_0 < 0.126\ 7$ 时，没有稳定的极限环来自于霍普夫分岔。当 $Q < Q_C$(C 点对应的广义气流速度)时，没有极限环颤振发生；当 $Q = Q_C$ 时，有一个半稳极限环。当 $Q > Q_C$ 时，半稳极限环会变成两个极限环(一个稳定的极限环和一个不稳定的极限环)，这种分岔叫作 2-重半稳极限环分岔。因此，当 $k_0 < 0.126\ 7$ 时，在 Q_C 上会发生 2-重半稳极限环分岔，并且随着 Q 值增大到超过 Q_{O1} 时，颤振幅值突然经历一个跳跃，且颤振幅值很大(这种从一个稳定平衡点到大幅周期轨道的跳跃叫做稳定性的硬损失或极限环的硬产生)。

为了证明谐波平衡法的正确性，以发生半稳极限环分岔的临界值为例，通过谐波平衡法和数值模拟计算出的发生 2-重半稳极限环分岔的临界值(表 13-1)，表明谐波平衡法能给出关于 2-重半稳极限环分岔临界值的正确信息。

表 13-1　谐波平衡法和数值模拟法的比较

k_0	0.12	0.10	0.08	0.06	0.04	0.02	0
Q_B(谐波平衡法)	0.892 4	0.892 4	0.892 4	0.892 4	0.892 4	0.892 4	0.892 4
Q_B(数值积分法)	0.892 6	0.892 6	0.892 4	0.896 7	0.900 9	0.922 5	0.939 9
误差(%)	0.02	0.02	0.02	0.48	0.95	3.37	5.32

上述的情况是针对平衡点 $O(0,0,0,0)$的，而对于非零平衡点 $x_\pm$，随着分岔参数广义气流速度 Q 改变时，颤振系统也有比较丰富的动力学特性。

13.1.4　数值模拟

当 $k_0 = 0.5$，初始条件为 $x_0 = (0.03,0,0,0)$时，分别取 $Q = 3.5$、$Q = 8$、$Q = 18$、$Q = 28$ 时，关于平衡点 O，系统的各种运动相图如图 13-4 所示。

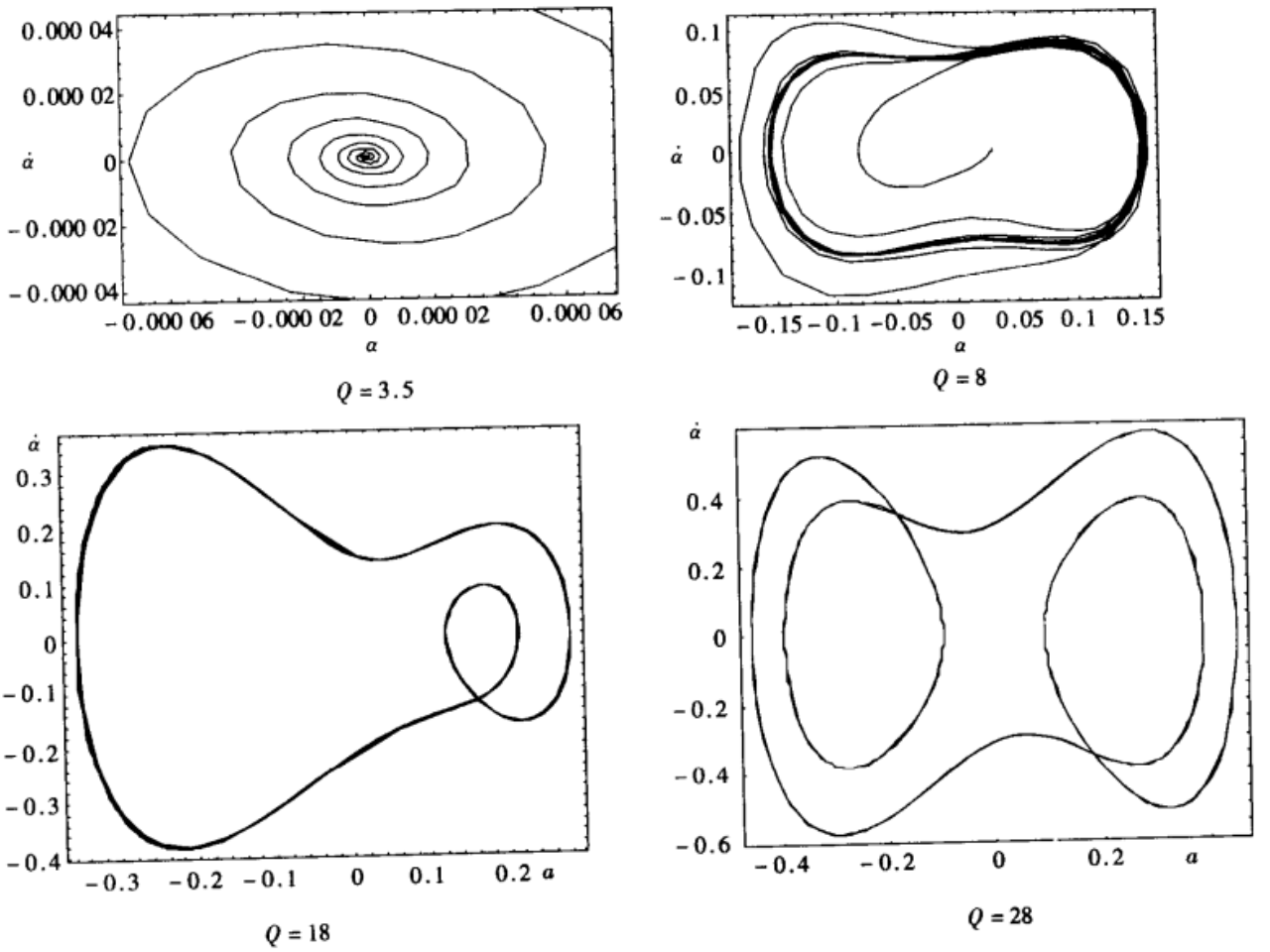


图 13-4 在不同广义气流速度下平衡点 $O(k_0=0.5)$的相图

从图 13-4 中可以看出，关于平衡位置 O 当广义气流速度 Q 不断地增大时，在初始值给定的情况下颤振系统的运动为分别趋近于平衡点、极限环运动、倍周期运动等。

当 $k_0=0.5$，且 Q 分别取 $Q=13$、$Q=27$、$Q=30$ 值时，在非零平衡位置 $x_\pm$，系统的各种运动相图如图 13-5 所示。

同样可见系统有趋近于平衡点和极限环的运动，可见当线性俯仰刚度取定值，广义气流速度 Q 在不同的区域取值时，系统的动力学性态是完全不同的。这里取线性俯仰刚度值 $k_0=0.5$ 只是用于说明方法，对于其他的 k_0 值，可以用相同的方法。

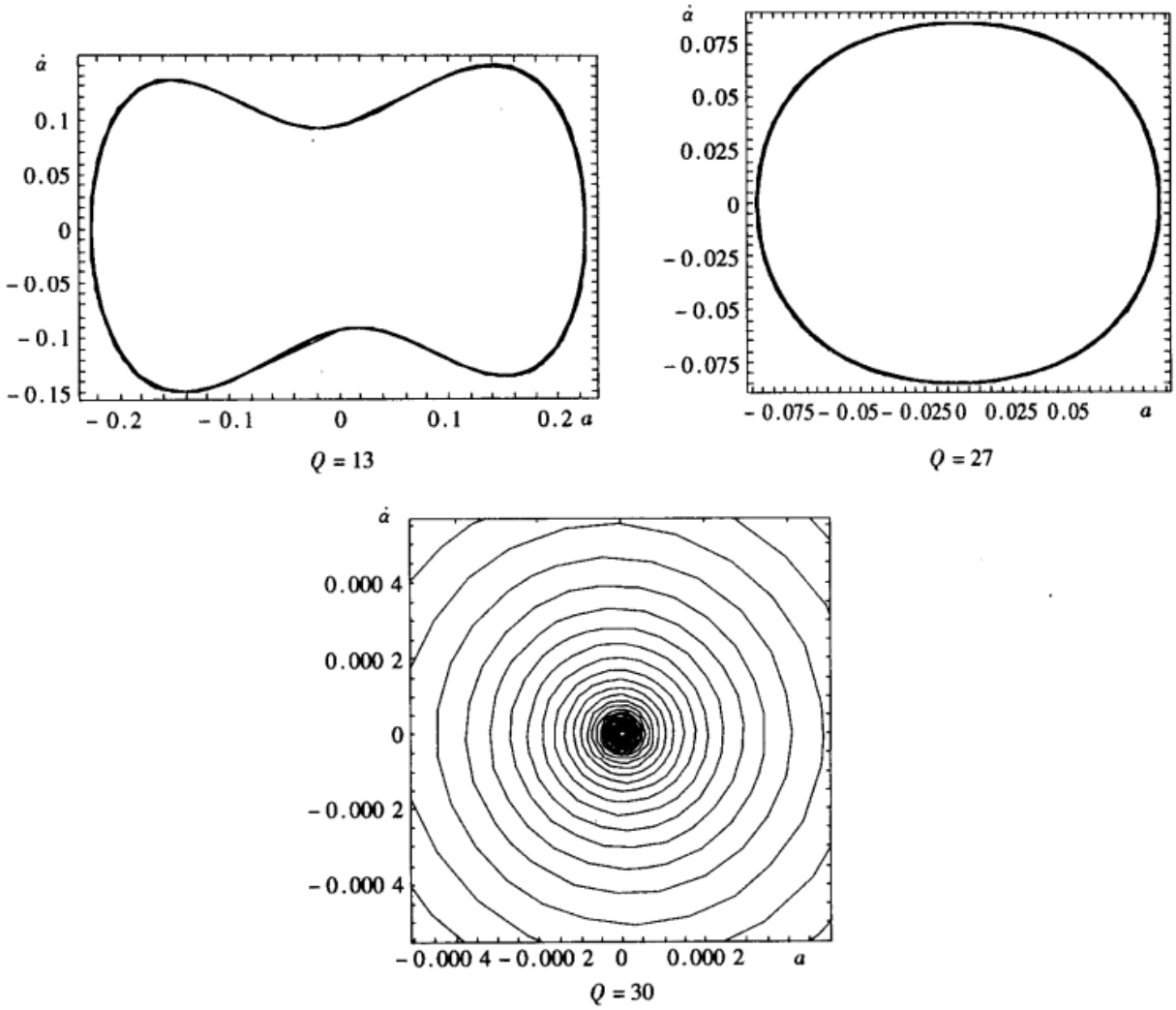


图 13-5　在不同的广义气流速度下平衡点 $x_{\pm}$ ($k_0 = 0.5$)的相图

13.2　给定系统的霍普夫分岔

非线性振动系统平衡点的类别及其稳定性的判定，是非线性动力学特性研究的最基本也是最重要的内容之一。如果相应的线性近似系统的平衡点不是中心，则原非线性系统的平衡点类别及稳定性与其一致；当线性近似系统的平衡点是中心时，非线性系统的平衡点既可能是中心，也可能是稳定焦点或不稳定焦点(称之为假中心)。对于二维系统，有几种方法用于判别真假中心，如后继函数法、形式级数法、直接求周期解等。

在不可压缩流中的二元机翼是一个典型的自激振动的例子。由于在该系统中存在非线性项，它会产生诸如霍普夫分岔、极限环颤振、周期倍化及混沌等现象。在本节中首先应用

中心流形理论并借助于 Mathematica 程序将含立方非线性俯仰刚度的四维机翼颤振系统降为二维系统，该二维系统的近似线性系统的分岔点恰好是中心；而应用后继函数法(陆启韶，1989)判断出原非线性系统的分岔点不是中心，而是稳定或不稳定焦点。

13.2.1 系统的霍普夫分岔

从图 13-2 和图 13-3 中，可以看出当 k_0 取不同的值而在 Q 的各个区域内，颤振系统的动力学特性是有明显不同的，下面取 $k_0=0.5$ 进行深入的研究。

引入状态空间，将式(13.1.2)改写成一阶常微分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+f(x) \tag{13.2.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 是广义坐标列阵，$\boldsymbol{A}$ 是线性化矩阵，且

$$\boldsymbol{x}=[\alpha \quad \dot{\alpha} \quad h \quad \dot{h}]^{\mathrm{T}}\Rightarrow[x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{f}(x)=20\times\left[0 \quad -\frac{16}{7} \quad 0 \quad \frac{4}{7}\right]^{\mathrm{T}}x_1^3 \tag{13.2.2}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4(0.26Q-4k)/7 & -1.6/7 & 0.8/7 & 0.4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4(k-0.24Q)/7 & 0.4/7 & -1.6/7 & -0.8/7 \end{bmatrix} \tag{13.2.3}$$

下面应用 Routh-Hurwitz 准则来判断系统(13.2.1)平衡点的稳定性变化，从而确定分岔点。经过计算得到，当 $Q<4.080\ 151\ 2$ 时，系统(13.1.2)的平衡点 O 稳定；当 $4.080\ 151\ 2<Q<12.5$ 时，平衡点 O 不稳定，所以 $Q=4.080\ 151\ 2\Rightarrow Q_{O1}$ 为分岔点。而 $Q_{O2}=15.404\ 2$ 为平衡点 O 的另一个分岔点，当 $12.5<Q<15.404\ 2$ 时，平衡点 O 不稳定；当 $Q>15.404\ 2$ 时，平衡点 O 稳定。由前一节的分析知道，当 $Q>12.5$ 时，二元机翼颤振系统还存在两个非零的平衡点 $x_{\pm}$，即 $\left(\sqrt{\frac{1.12Q-14}{560}},0,-\frac{1}{2}Q\sqrt{\frac{1.12Q-14}{560}},0\right)$，$\left(-\sqrt{\frac{1.12Q-14}{560}},0,\frac{1}{2}Q\sqrt{\frac{1.12Q-14}{560}},0\right)$。这两个非零平衡点 $x_{\pm}$，当 $12.5<Q<28.961\ 455$ 时，都不稳定，当 $Q>28.961\ 455$ 时，两个平衡点都稳定，所以 $Q=28.961\ 455\Rightarrow Q_2=Q_3$ 为相应的两个分岔点。而平衡点在分岔点处的稳定性可以通过后继函数法进行研究。

对于不同的线性俯仰刚度值 k_0，系统(13.2.1)分岔点的位置将发生变化。取 $k_0=0.5$ 进行分析，只是用于说明方法，事实上 k_0 取其他值时，也可以进行完全类似的分析。

13.2.2 用中心流形理论降维

为了对机翼模型进行更深入的理论分析，用中心流形定理对系统(13.2.1)进行降维。

对于平衡点 O 和 $x_{\pm}$，通过借助于计算中心流形的 Mathematica 程序，得到系统在三个平衡位置处的中心流形以及中心流形上的约化方程，下面分两种情形进行讨论。

情形一

当 $k_0=0.5$, $Q_{01}=4.080\ 151\ 2$ 时，选 $\mu=Q-Q_{01}$ 为分岔参数，其雅可比矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在分岔点(即 $\mu=0$)处的 4 个特征根分别为

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1&=\bar{\lambda}_2=0.598\ 216\ 2\mathrm{i}\\ \lambda_3&=\bar{\lambda}_4=-0.171\ 428\ 6+0.633\ 120\ 4\mathrm{i}\end{aligned}\right\}\tag{13.2.4}$$

引入非奇异线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{py}$，其中 $\boldsymbol{y}=[y_1\quad y_2\quad y_3\quad y_4]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}$ 为相应于式(13.2.3)的第 2、第 4 个特征根所对应的特征向量的实部和虚部构成的方阵，代入式(13.2.1)，系统化成

$$\dot{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{y}+\mu\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\tag{13.2.5}$$

其中

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})=20\times[-6.959\ 71\quad -2.455\ 6\quad 7.930\ 59\quad -0.859\ 792]^{\mathrm{T}}(0.375\ 772y_1+0.142\ 398y_2+0.332\ 457y_3-0.381\ 905y_4)^3$$

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}0 & -0.598\ 216\ 2 & 0 & 0\\ 0.598\ 216\ 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -0.171\ 428\ 6 & -0.633\ 120\ 4\\ 0 & 0 & 0.633\ 120\ 4 & -0.171\ 428\ 6\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}0.216\ 886 & 0.082\ 188\ 5 & 0.191\ 886 & -0.220\ 426\\ 0.131\ 751 & 0.049\ 926\ 8 & 0.116\ 564 & -0.133\ 902\\ -0.247\ 142 & -0.093\ 653\ 7 & -0.218\ 654 & 0.251\ 175\\ 0.047\ 385\ 9 & 0.017\ 956\ 7 & 0.041\ 923\ 7 & -0.048\ 159\ 2\end{bmatrix}$$

根据中心流形定理，计算出其中心流形：

$$y_3=h_1(y_1,y_2,\mu)=-0.718\ 541y_1\mu-0.372\ 473y_2\mu+O(3)$$
$$y_4=h_2(y_1,y_2,\mu)=0.156\ 141y_1\mu-0.725\ 998y_2\mu+O(3)$$

其中 $O(3)$表示三阶小量，中心流形上的流即约化方程为

$$\left.\begin{aligned}\dot{y}_1=&-0.598\ 216\ 2y_2+0.216\ 886y_1\mu+0.082\ 188\ 5y_2\mu-7.385\ 75y_1^3-0.401\ 914y_2^3\\&-8.396\ 44y_1^2y_2-3.181\ 81y_1y_2^2-0.172\ 295y_1\mu^2+0.088\ 556\ 6y_2\mu^2\\ \dot{y}_2=&0.589\ 216\ 2y_1+0.131\ 752\ 1y_2\mu+0.049\ 926\ 8y_2\mu-2.605\ 92y_1^3-0.141\ 808y_2^3\\&-2.962\ 52y_1^2y_2-1.122\ 64y_1y_2^2-0.104\ 664y_1\mu^2+0.053\ 795\ 7y_2\mu^2\end{aligned}\right\}\tag{13.2.6}$$

这样就利用中心流形理论将原四维系统约化成了二维系统。

而当 $Q_{02}=15.404\ 2$ 时，选 $\mu=Q-Q_{02}$ 为分岔参数，其雅可比矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在分岔点(即 $\mu=0$)处的 4 个特征根分别为：

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1&=\bar{\lambda}_2=0.236\ 405\ \mathrm{i}\\ \lambda_3&=-1.161\ 18\\ \lambda_4&=0.818\ 325\end{aligned}\right\}\tag{13.2.7}$$

若颤振系统的雅可比矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的特征值 $\lambda_i > 0(i=1,2,3,4)$，则系统的平衡点在该分岔点处是不稳定的焦点。

情形二

当 $Q_i = 28.961\ 455(i=2,3)$ 时，选 $\mu = Q - Q_i$ 为分岔参数，其雅可比矩阵在分岔点（即 $\mu=0$）的 4 个特征根分别为：

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= \bar{\lambda}_2 = 1.005\ 62\ \mathrm{i}\\ \lambda_3 &= \bar{\lambda}_4 = -0.171\ 428\ 6 + 0.752\ 275\ \mathrm{i}\end{aligned}\right\} \tag{13.2.8}$$

同理，得到中心流形为：

$$y_3 = h_1(y_1, y_2, \mu) = -0.047\ 11 y_1\mu + 0{\cdot}069\ 055 y_2\mu + O(3)$$

$$y_4 = h_2(y_1, y_2, \mu) = 0.095\ 371\ 6 y_1\mu - 0.032\ 585\ 5 y_2\mu + O(3)$$

中心流形上的流即约化方程为：

$$\left.\begin{aligned}\dot{y}_1 = &-1.005\ 62 y_2 + 0.017\ 088 y_1\mu - 0.137\ 853 y_2\mu + 0.004\ 279 y_1^3 - 2.246\ 456 y_2^3\\ &- 0.103\ 55 y_1^2 y_2 + 0.835\ 380\ 9 y_1 y_2^2 + 0.006\ 555 y_1\mu^2 - 0.005\ 738\ 4 y_2\mu^2\\ \dot{y}_2 = &\ 1.005\ 62 y_1 + 0.012\ 073 y_1\mu - 0.097\ 397 y_2\mu + 0.003\ 546\ 33 y_1^3 - 1.862\ 01 y_2^3\\ &- 0.085\ 83 y_1^2 y_2 + 0.692\ 42 y_1 y_2^2 + 0.004\ 632 y_1\mu^2 - 0.004\ 054 y_2\mu^2\end{aligned}\right\} \tag{13.2.9}$$

在上述的三个分岔点处（即 $\mu=0$），所求得的三组中心流形都等于零，即 $y_3 = y_4 = 0$，且中心流形上的约化方程可写成统一形式：

$$\left.\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -a y_2 + 20 b y_i^3\\ \dot{y}_2 &= a y_1 + 20 c y_i^3\end{aligned}\right\} \quad (i=1,2) \tag{13.2.10}$$

其中在 Q_{01} 处，$a = 0.598\ 216\ 2$，$b = -0.369\ 29$，$c = -0.130\ 3(i=1)$；在 Q_2、Q_3 处，$a = 1.005\ 62$，$b = -0.112\ 323$，$c = -0.093\ 1(i=2)$；而其他三阶项对振动系统性态的影响可以忽略。

13.2.3 后继函数法判定分岔点的类别

对系统方程(13.2.10)，平衡点显然是它们相应的线性近似方程的中心。下面通过后继函数法来判别它到底是系统(13.2.10)的中心还是焦点，并确定其稳定性。令

$$\left.\begin{aligned}y_1 &= r\cos\theta\\ y_2 &= r\sin\theta\end{aligned}\right\} \tag{13.2.11}$$

将 r、θ 分别对时间 t 求导，再消去 t，则式(13.2.10)可化成

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = 20\cos^3\theta\left(\frac{c}{a}\sin\theta + \frac{b}{a}\cos\theta\right)r^3 + 400\cos^6\theta\left(\frac{c}{a}\sin\theta + \frac{b}{a}\cos\theta\right)\left(\frac{b}{a}\sin\theta - \frac{c}{a}\cos\theta\right)r^5$$

$$+ 8\ 000\cos^9\theta\left(\frac{c}{a}\sin\theta + \frac{b}{a}\cos\theta\right)\left(\frac{b}{a}\sin\theta - \frac{c}{a}\cos\theta\right)^2 r^7 + \cdots \tag{13.2.12}$$

对充分小的 ε，$r(\theta,\varepsilon)$对 ε 是解析的。可将 $r(\theta,\varepsilon)$展开成 ε 的幂级数

$$r(\theta,\varepsilon)=r_1(\theta)\varepsilon+r_2(\theta)\varepsilon^2+r_3(\theta)\varepsilon^3+\cdots \tag{13.2.13}$$

相应的初始条件是

$$\left.\begin{aligned} r_1(0)&=1,\\ r_2(0)&=r_3(0)=\cdots=0 \end{aligned}\right\} \tag{13.2.14}$$

将式(13.2.13)代入式(13.2.14)，比较 ε 的各次幂系数，可得

$$\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}\theta}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}r_3}{\mathrm{d}\theta}=20\cos^3\theta\left(\frac{c}{a}\sin\theta+\frac{b}{a}\cos\theta\right)$$

由(13.2.14)式即得

$$r_1(\theta)=1$$

$$r_2(\theta)=0$$

和系统稳定极限环颤振幅值的影响。

13.3.1 极限环颤振

通过借助于计算规范形的 Mathematica 程序 Leung, 2003; Zhang, 2001)得到约化方程(13.2.5)和(13.2.8)的在极坐标下的霍普夫分岔直到五阶的 A-规范形:

$$\left.\begin{aligned}\dot{r} &= (0.133\,064\varepsilon\mu - 0.059\,249\,7\varepsilon^2\mu^2 - 0.033\,8\varepsilon^3\mu^3 + 0.325\,3\mu^4)r \\ &\quad - (3.572\,15\varepsilon^2 - 7.616\varepsilon^3\mu + 6.684\varepsilon^4\mu^2)r^3 - 179.35\varepsilon^4 r^5 + \text{h.o.t} \\ \dot{\theta} &= 0.598\,216 + (0.024\,81\varepsilon\mu - 0.112\,04\varepsilon^2\mu^2 + 0.209\,6\varepsilon^3\mu^3 - 0.310\,53\varepsilon^4\mu^4) \\ &\quad + (0.082\,67\varepsilon^2 + 5.826\,71\varepsilon^3\mu)r^2 - 90.44\varepsilon r^4 + \text{h.o.t}\end{aligned}\right\} \tag{13.3.1}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{r} &= (-0.040\,15\varepsilon\mu + 0.001\,25\varepsilon^2\mu^2 + 0.000\,1\varepsilon^3\mu^3)r - (0.602\,937\,5\varepsilon^2 \\ &\quad + 0.081\,91\varepsilon^3\mu - 0.006\,78\varepsilon^4\mu^2)r^3 + 0.377\,115\varepsilon^4 r^5 + \text{h.o.t} \\ \dot{\theta} &= 1.005\,62 + 0.075\varepsilon\mu + 0.001\,553\varepsilon^2\mu^2 + (0.943\,463\varepsilon^2 - 0.088\,05\varepsilon^3\mu)r^2 \\ &\quad + 0.081\,5\varepsilon^4 r^4 + \text{h.o.t}\end{aligned}\right\} \tag{13.3.2}$$

其中无量纲符号 ε 表示齐次多项式的阶。

令方程(13.3.1)和(13.2.2)中的第一式为

$$\dot{r} = F(r) = (d\mu + a_1 r^2 + a_2 r^4)r + \text{h.o.t} \tag{13.3.3}$$

由此得到系统的近似平衡方程。系统的分岔图如图 13-6 所示。图中横坐标 μ 为系统分岔参数,纵坐标 r 表示霍普夫分岔分支。

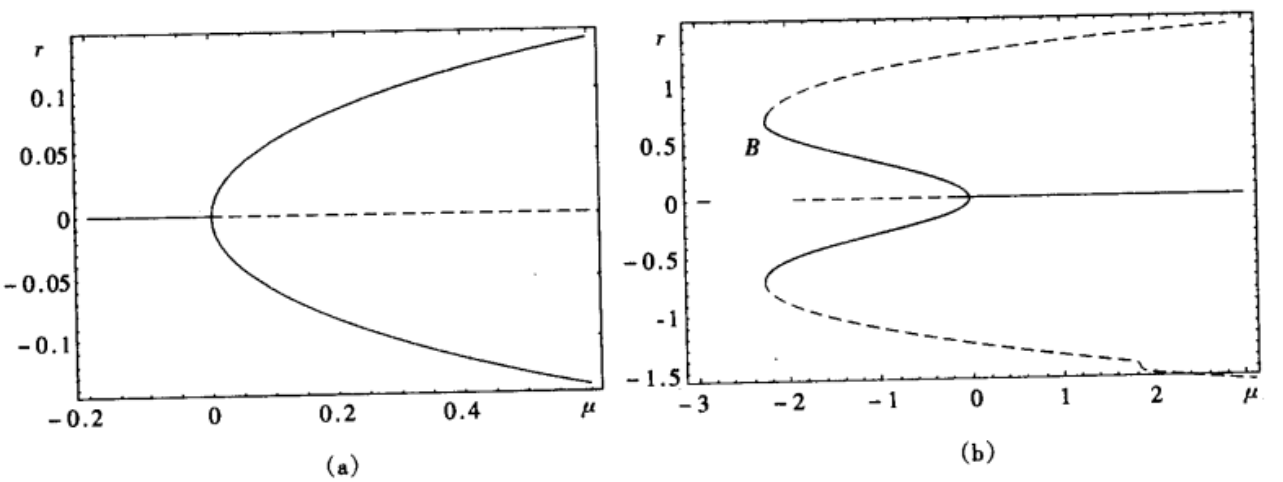


图 13-6 $k_0 = 0.5$ 系统霍普夫分岔图

(a)平衡点 O 在 Q_{01} 的分岔图;(b)平衡点 x_* 的分岔图

若稳定平衡点与分岔解在分岔点的异侧,则为超临界霍普夫分岔;若稳定平衡点与分岔解在分岔点的同侧,则为亚临界霍普夫分岔。因此,在上述的三个分岔点处都发生超临界霍普夫分岔。在图 13-6 (b)中,当 $Q_B = 26.688$(B 点对应的广义气流速度)时,系统在该点处

存在一个半稳定的极限环，当广义气流速度大于 Q_B 时，这个半稳定的极限环变成两个极限环(一个稳定极限环和一个不稳定极限环)。当广义气流速度大于霍普夫分岔点时，平衡点 x_e 变成稳定的焦点。

对应平衡点 O，在 $Q_{O2}=15.404\ 2$ 处还存在一个霍普夫分岔，其直到三阶的近似平衡方程：

$$\dot{r}=0.021\ 685\ 2r^3-(0.006\ 194\mu-0.001\ 317\mu^2)r+\text{h.o.t} \tag{13.3.4}$$

由分析知，在该分岔点发生亚临界霍普夫分岔，其分岔图如图 13-7 所示，图中横、纵坐标同图 13-6。

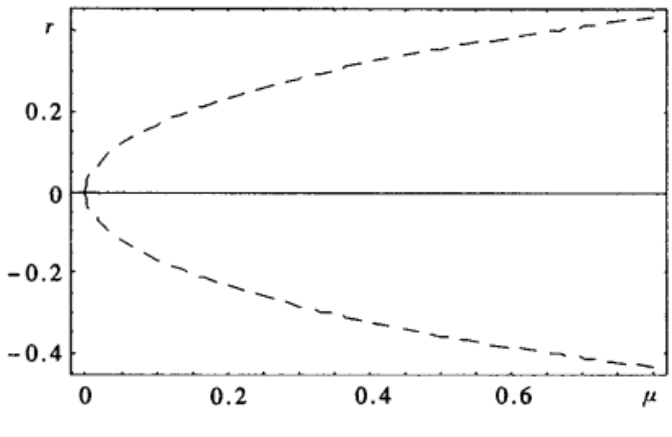


图 13-7　平衡点 O 在 Q_{O2} 的分岔图

当广义气流速度大于 $Q_{O2}=15.404\ 2$ 而小于在图 13-6(b)中的发生 2-重半稳极限环颤振的点 $Q_B=26.688$(B 点对应的广义气流速度)时，平衡点 O 是稳定的焦点；当广义气流速度大于 $Q_B=26.688$ 时，平衡点 x_e 是不稳定焦点且在不稳定焦点的周围存在一个稳定的极限环和一个不稳定的极限环。这种由一个稳定焦点突然变成一个稳定极限环的现象叫做极限环硬产生(或稳定性的硬损失)。

当 $k_0=0.081\ 6$ 时，$Q_P=2.04$。当 $0<Q<2.04$ 时，平衡点 O 有两个分岔点，$Q_{B1}=1.556\ 862\ 3$，$Q_{B2}=1.191\ 063\ 78$。计算得到分岔点处的静态分岔方程如下。

在分岔点 $Q_{B1}=1.556\ 862\ 3$、$Q_{B2}=1.191\ 063\ 78$ 处分别为：

$$\left.\begin{aligned}\dot{r}&=(0.008\ 035\varepsilon\mu-0.026\ 65\varepsilon^2\mu^2+0.055\varepsilon^3\mu^3+0.003\ 1\varepsilon^4\mu^4)r+(3.863\ 75\varepsilon^2\\&\quad+1.212\ 9\varepsilon^3\mu)r^3+200.113\varepsilon^4r^5+\text{h.o.t}\\\dot{\theta}&=0.382\ 383-0.040\ 18\varepsilon\mu+0.010\ 26\varepsilon^2\mu^2+0.009\ 14\varepsilon^3\mu^3-0.006\ 78\varepsilon^4\mu^4\\&\quad+(0.149\ 4\varepsilon^2-2.692\varepsilon^3\mu+2.067\ 06\varepsilon^4\mu^2)r^2+227.08\varepsilon^4r^4+\text{h.o.t}\end{aligned}\right\}\tag{13.3.5}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{r} &= (-0.006\,5\varepsilon\mu - 0.013\,715\varepsilon^2\mu^2)r + (3.033\,4\varepsilon^2 + 0.245\,176\varepsilon^3\mu \\ &\quad - 0.065\,367\,4\varepsilon^4\mu^2)r^3 + 3.872\,04\varepsilon^4 r^5 + \text{h.o.t} \\ \dot{\theta} &= 0.369\,842 - 0.029\,94\varepsilon\mu + 0.017\,23\varepsilon^2\mu^2 + 0.001\,153\varepsilon^3\mu^3 - (0.708\,14\varepsilon^2 \\ &\quad + 0.059\,74\varepsilon^3\mu + 0.13\varepsilon^4\mu^2)r^2 - 20.58\varepsilon^4 r^4 + \text{h.o.t}\end{aligned}\right\} \tag{13.3.6}$$

经分析知，在这两个分岔点处都发生了亚临界霍普夫分岔，其分岔图如图 13-8 所示，其中，横坐标 μ 为系统分岔参数，纵坐标 r 表示霍普夫分岔分支。

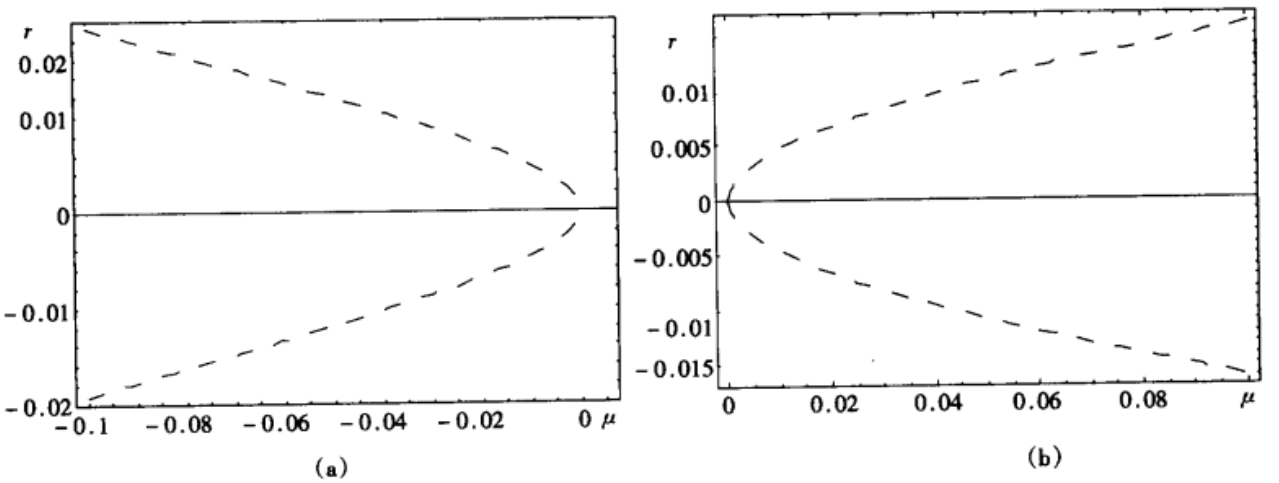


图 13-8 $k_0 = 0.081\,6$ 时平衡点 O 的分岔图

(a) $Q_{B1} = 1.556\,862\,3$；(b) $Q_{B2} = 1.191\,063\,78$

相应于平衡点 $O(0,0,0,0)$，还可以进行下面情况的分析，以确定系统的整体的动力特性。当线性刚度 k_0 取值改变时，可以根据应用谐波平衡法得到的方程(13.1.9)中极限环颤振幅值 A 和广义气流速度 Q 之间的隐函数关系画出 A—Q 曲线图(见图 13-9)，其中图(a) $k_0 = 0.5$、图(b) $k_0 = 0.06$ 、图(c) $k_0 = 0.0816$ 。

经分析知，当 $k_0 < 0.081\,1$ 时，系统不存在霍普夫分岔，亦不会有稳定的极限环来自于霍普夫分岔，但在 B 点处发生全局分岔，如图 13-9(b)所示，其中 $k_0 = 0.06$，$Q_B = 0.892\,422\,5$；当 $0.081\,1 \leqslant k_0 < 0.126\,7$ 时，系统在两个分岔点处发生亚临界霍普夫分岔，在 B 处发生二重半稳极限环颤振，如图 13-9 (c)示，其中 $k_0 = 0.081\,6$，$Q_B = 0.892\,422\,5$；当 $k_0 > 0.126\,7$ 时，系统有很丰富的动力学特性，如 $k_0 = 0.5$ 的情况，在前面已经作了深入的分析。

13.3.2 系统参数对极限环颤振的影响

影响系统极限环颤振幅值的因素很多，这里主要研究系统的物理参数的改变对极限环颤振幅值的影响。下面分别研究在 $k_0 = 0.5$ 时，各个物理参数对平衡点 O 和 $x_\pm$ 附近稳定极限环颤振幅值的影响。

1. 系统参数对零平衡点附近极限环颤振的影响

在分岔点 $Q_1 = 4.080\,151\,2$ 处，转换回原物理坐标，得到

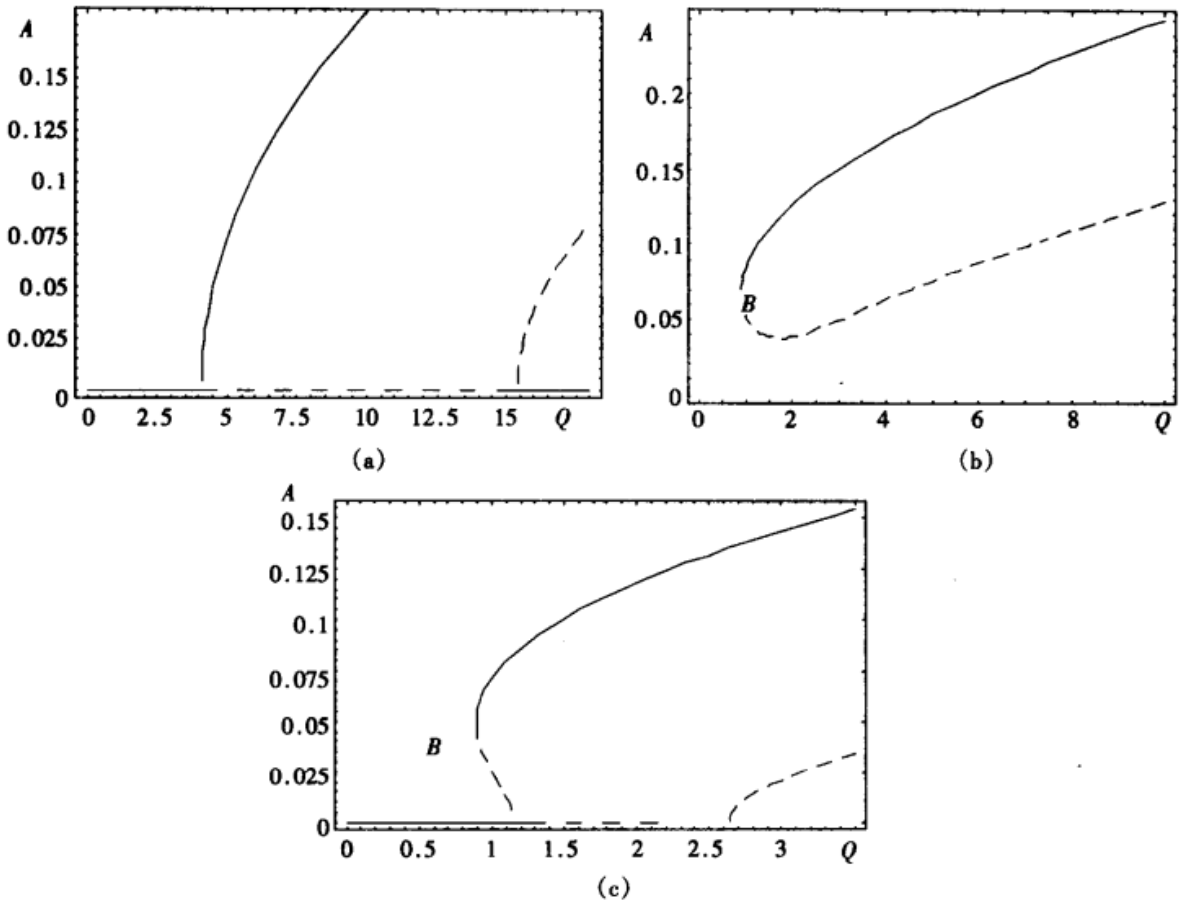


图 13-9　A—Q 曲线图

(a) $k_0 = 0.5$; (b) $k_0 = 0.06$; (c) $k_0 = 0.0816$

$$\begin{aligned}\alpha = x_1 &= 0.375\,772y_1 + 0.142\,398y_2 + 0.332\,457y_3 - 0.381\,905y_4 \\ &= r_1[(0.375\,772 - 0.298\,515\mu)\cos\varphi + (0.142\,398 + 0.153\,431\mu)\sin\varphi]\end{aligned}$$

因此，在极限环颤振中俯仰角 α 的幅值

$$|\alpha| = r_1\sqrt{(0.375\,772 - 0.298\,515\mu)^2 + (0.142\,398 + 0.153\,431\mu)^2} \qquad (13.3.7)$$

方程(13.3.7)中 r_1 同方程(13.2.15)中第一式非零平衡点 r_1，它是系统(13.2.10)在极坐标下极限环的幅值。

应用数学学习软件 Mathematica 中的绘图函数命令，得到了在一定的初始条件($\alpha(0,0,0,0) = 0.03$, $\dot{\alpha}(0,0,0,0) = h(0,0,0,0) = \dot{h}(0,0,0,0) = 0$)下，各个物理参数取不同值(其他的三个参数值不变)时的极限环颤振相平面图。

在不可压缩流中的一个具有线性加立方俯仰刚度的机翼，对于某个特定的线性刚度值经历分岔，分岔也许是稳定(不稳定)的超临界或亚临界霍普夫分岔。通过大量的数值计算分析可知，随着线性俯仰刚度 k 的增大，近似线性系统的临界颤振速度增大、分岔点附近极

限环颤振的幅值减小、系统的颤振频率有所增大，如图 13-10 所示。

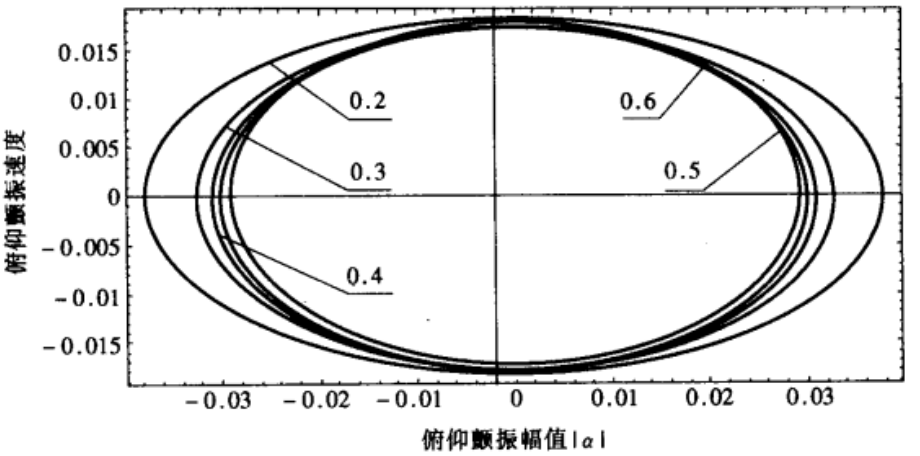


图 13-10 当线性俯仰刚度 k 变化时，系统在分岔点附近极限环颤振的相平面图

在对不同机翼参数进行的研究中得出定性结论：在小阻尼时，阻尼对分岔点附近的极限环颤振的幅值影响不大(图 13-11)，当阻尼增大时，幅值略有减小而频率增大；当非耦合沉浮和俯仰模态固有频率的比值增大，且随着比值接近或超出 1 时，在俯仰运动中分岔点附近稳定极限环颤振的幅值和频率都会明显地增大(图 13-12)；增大质心到弹性轴之间的距离，在分岔点附近稳定极限环颤振幅值和频率会随着距离增加而增大(图 13-13)。

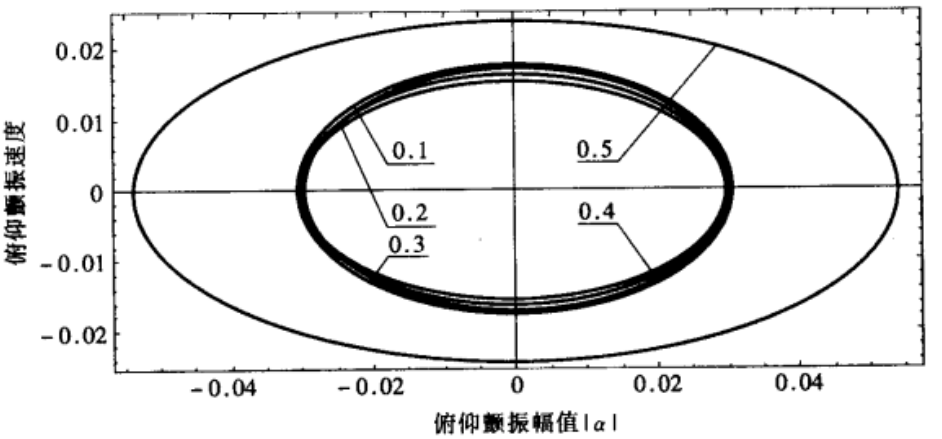


图 13-11 当组尼系数变化时，在分岔点附近极限环颤振的相平面图

而各个系统参数对相应的线性系统的临界颤振速度的影响见图 13-14，图中的 4 条曲线分别表示当某一个物理参数改变而其他的三个物理参数不变(与系统数学模型方程(13.1.2)中的取值相同)时，相应的线性颤振速度的变化趋势。

以上对平衡点 O 作了比较深入的分析，可以应用同样的方法对平衡点 $x_{\pm}$ 作分析。

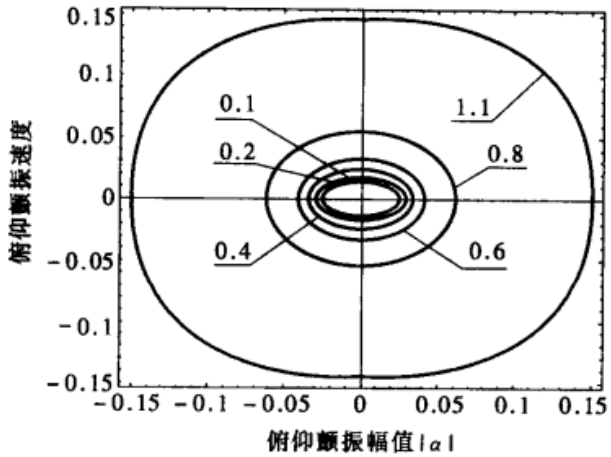


图 13-12　非耦合固有频率比值($\bar{\omega} = \omega_h / \omega_\alpha$)变化时，在分岔点附近极限环颤振的相平面图

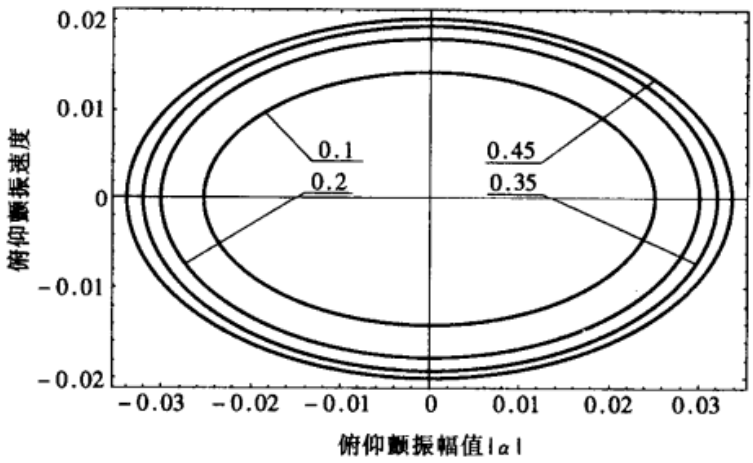


图 13-13　质心到弹性轴间距离变化时，在分岔点附近极限环颤振的相平面图

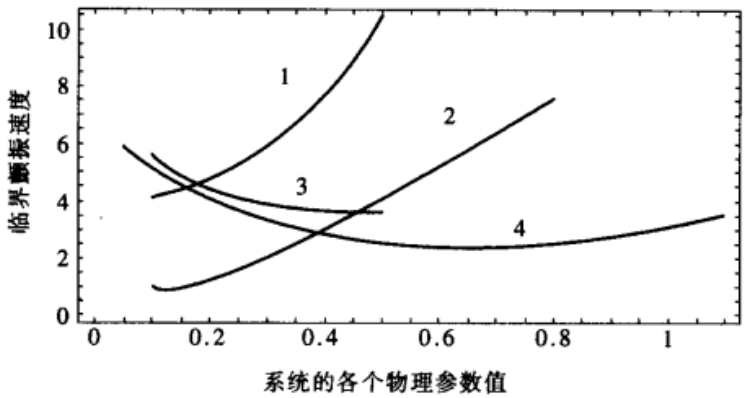


图 13-14　各个系统参数对机翼颤振临界速度的影响

1—阻尼；2—线性俯仰刚度；3—质心到弹性轴的距离；4—非耦合固有频率的比值

2. 系统参数对非零平衡点附近极限环颤振的影响

当 $Q_{2,3}=28.961\ 455$ 时，转换回原物理坐标，得到 α 如下：

$$\begin{aligned}\alpha = x_1 &= -0.025\ 628y_1 + 0.206\ 75y_2 + 0.099\ 08y_3 - 0.054\ 148y_4 \\ &= r_2[(-0.025\ 628 - 0.009\ 832\mu)\cos\varphi + (0.206\ 75 + 0.008\ 61\mu)\sin\varphi]\end{aligned}$$

因此，在极限环颤振中俯仰角 α 的幅值

$$|\alpha| = r_2\sqrt{(-0.025\ 628 - 0.009\ 832\mu)^2 + (0.206\ 75 + 0.008\ 61\mu)^2} \tag{13.3.8}$$

方程(13.3.8)中 r_2 是平衡点 $x_\pm$ 发生稳定极限环颤振的幅值。

取初始条件为 $\alpha(0,0,0,0)=0.02$，$\dot{\alpha}(0,0,0,0)=h(0,0,0,0)=\dot{h}(0,0,0,0)=0$，各个物理参数(其他的物理参数值不变)取不同值时的极限环颤振相平面图，如图 13-15 所示。

在不可压缩流中的一个具有线性加立方俯仰刚度的机翼，对于某个特定的系统参数值经历分岔，分岔也许是稳定的或不稳定的超临界以及亚临界霍普夫分岔。当系统的参数值改变时，霍普夫分岔点附近极限环颤振幅值的大小也会随着变化。各个参数对极限环颤振幅值的影响见图 13-15。

在对不同机翼参数进行的研究中得出定性结论：分岔点附近极限环颤振的幅值随着阻尼的增大而略有增大(图 13-15(a))；随着线性俯仰刚度、非耦合固有频率比值、质心到弹性轴间距离的增大，在分岔点附近稳定极限环的幅值会减小(图 13-15(b)、(c)、(d))。各系统参数对相应的线性系统的颤振速度的影响见图 13-16。

13.4 立方非线性颤振系统的分岔行为分析

在前几节的基础上，得到了在极坐标下系统的三个平衡点的直到五阶的颤振系统分岔方程。应用奇异性理论对简化的方程进行分析，得到系统的转迁集和多种分岔模式。本节不研究所得分岔方程的普适开折问题，只针对前文中得到的系统发生霍普夫分岔时的直到五阶的近似分岔方程在受到微小扰动后的各类转迁集和保持性的分岔图作深入的分析。

13.4.1 分岔方程

根据方程(13.2.15)和(13.2.16)，在平衡点 O 和 $x_\pm$ 处系统发生霍普夫分岔，其分岔方程为

$$b_1 r^5 + b_2 r^3 + b_3 r^3\mu + b_4 r^3\mu^2 + b_5 r\mu + b_6 r\mu^2 + b_7 r\mu^3 + b_8 r\mu^4 = 0 \tag{13.4.1}$$

其中 $b_i(i=1,\cdots,7)$ 为正或负的实数，即

$$b_1 r^5 + (b_2 + b_3\mu + b_4\mu^2)r^3 + (b_5\mu + b_6\mu^2 + b_7\mu^3 + b_8\mu^4)r = 0 \tag{13.4.2}$$

略去方程(13.4.2)的高次项得到简化的分岔方程

$$g(r,\mu) = b_1 r^5 + b_2 r^3 + b_5 r\mu = 0 \tag{13.4.3}$$

分岔方程(13.4.3)的普适开折为

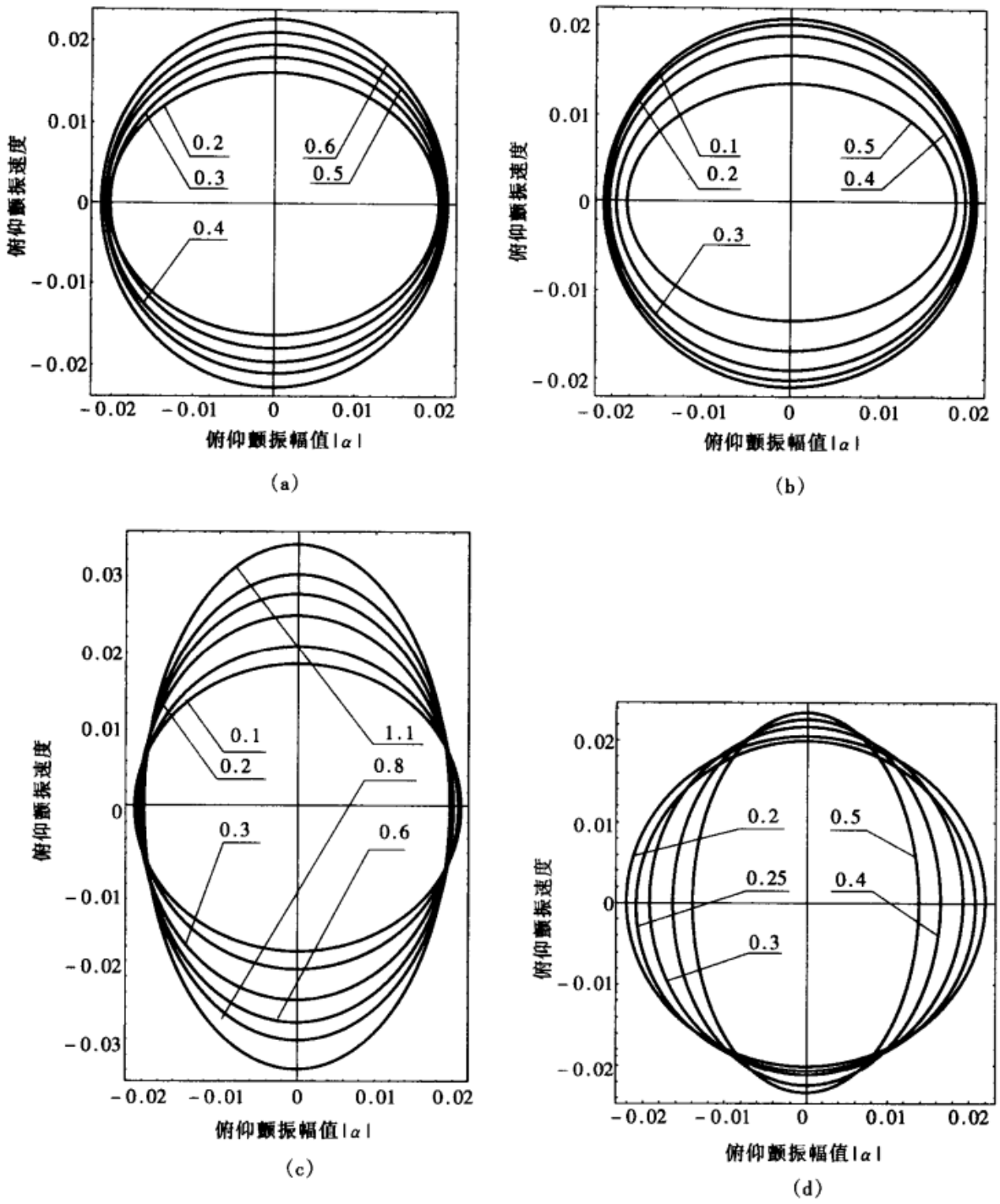


图 13-15　系统各个参数变化时，在分岔点附近极限环颤振的相平面图

(a)阻尼；(b)线性俯仰刚度；(c)非耦合固有频率比值；(d)质心到弹性轴间距离

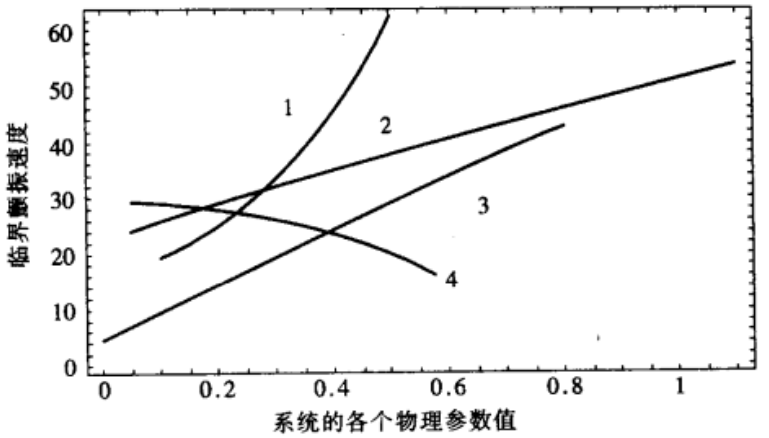


图 13-16 各个系统参数对机翼颤振临界速度的影响

1—质心到弹性轴的距离;2—非耦合固有频率的比值;

3—线性俯仰刚度;4—阻尼

$$G(X,\mu,\alpha)=X^5+\alpha_4X^3+\alpha_3X^2+\alpha_2X\mu+\alpha_1\mu+\alpha_0=0 \tag{13.4.4}$$

其中

$$\alpha_4=b_2/b_1,\alpha_2=b_5/b_1$$

$$G_x=5x^4+3\alpha_4x^2+2\alpha_3x+\alpha_2\mu,G_\mu=\alpha_2x+\alpha_1,G_{xx}=20x^3+6\alpha_4x+2\alpha_3$$

对于在本章前几节所研究的相应于 $k_0=0.5$ 的情况,平衡点 O 和平衡点 $x_\pm$,在相应的分岔点上分别有 $\alpha_2=-0.000\,74$、$\alpha_4=0.02$ 和 $\alpha_2=-0.106$、$\alpha_4=-1.6$ 两种情况。此时系统分岔方程的普适开折是有 α_0、α_1、α_3 三个分岔参数的方程。

13.4.2 奇异性分析

对方程(13.4.4)作奇异性分析,得转迁集如下。

分岔集:$B=\{\alpha\in\mathbf{R}^k$:存在$(x,\mu)$使得在$(x,\mu,\alpha)$处有 $G=G_x=G_\mu=0\}$

几个分岔参数之间的隐函数关系式为

$$\alpha_0-\frac{\alpha_1^5}{\alpha_2^5}+\frac{\alpha_1^2\alpha_3}{\alpha_2^2}-\frac{\alpha_1^3\alpha_4}{\alpha_2^3}=0 \tag{13.4.5}$$

滞后点集:

$$H=\{\alpha\in\mathbf{R}^k:\text{存在}(x,\mu)\text{使得在}(x,\mu,\alpha)\text{处有 }G=G_x=G_{xx}=0\}$$

几个分岔参数之间的近似隐函数关系式为

$$\begin{aligned}0=1/c_4\times(&-2\,893\,110\alpha_1\alpha_3^3+578\,621\alpha_2\alpha_3^2\alpha_4^2-289\,311\alpha_1\alpha_3\alpha_4^3+92\,579\alpha_2\alpha_4^5\\&+207\,014\alpha_1\alpha_3^2C_1-258\,767\alpha_2\alpha_3\alpha_4^2C_1-20\,701\alpha_1\alpha_4^3C_1-24\,9301\alpha_2\alpha_3^3C_2\\&-1\,246\,500\alpha_1\alpha_3^2\alpha_4C_2+49\,860\alpha_2\alpha_4^3C_2-124\,650\alpha_1\alpha_4^4C_2+557\,484\alpha_1\alpha_3\alpha_4C_1C_2\\&-895\,224\alpha_0\alpha_2\alpha_3C_3-179\,045\alpha_2\alpha_3^2\alpha_4C_3-268\,567\alpha_1\alpha_3\alpha_4^2C_3+400\,355\alpha_0\alpha_2C_1C_3\end{aligned}$$

$$+80\,071\alpha_2\alpha_3\alpha_4 C_1 C_3 + 120\,106\alpha_1\alpha_4^2 C_1 C_3) \tag{13.4.6}$$

其中

$$C_1 = \sqrt{5\alpha_3^2 + 2\alpha_4^3},\ C_2 = (-5\alpha_3 + \sqrt{5}\sqrt{5\alpha_3^2 + 2\alpha_4^3})^{1/3}$$

$$C_3 = (-5\alpha_3 + \sqrt{5}\sqrt{5\alpha_3^2 + 2\alpha_4^3})^{2/3}$$

$$C_4 = ((5\alpha_2(-2\,700\alpha_3 + \sqrt{7\,290\,000\alpha_3^2 + 2\,916\,000\alpha_4^3}))^{5/3}$$

双极限集：

$$D = \{\alpha \in \mathbf{R}^k : \text{存在}(x,\mu)(i=1,2)\, x_1 \neq x_2 \text{ 使得在}(x,\mu,\alpha)\text{处有 } G = G_x = 0\}$$

求得 $D = \varnothing$，所以开折参数空间上的转迁集为：$\sum = B \cup H$。

由于参数空间是三维空间，难以在该空间直观地表示其转迁集，故主要讨论相应于平衡点 O 和 $x_\pm$ 的发生霍普夫分岔所对应的近似平衡方程时的情况。在该两种情况下，分岔参数 a_2、a_4 分别取定值。在参数空间，关于平衡点 O 的三种情况，如图 13-17、图 13-18、图 13-19 所示；关于平衡点 $x_\pm$ 的三种情况，如图 13-20、图 13-21、图 13-22 所示。下面为在 6 种主要投影平面上的分析结果。其中：在图 13-17 至图 13-22 的各(a)图中，Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ为连通分支的区域，而曲线为各类转迁集的分支；在图 13-17 至图 13-22 的各(b)图中，Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ为在各个区域中的保持分岔图；图 13-17 至图 13-22 的各(c)图表示各类转迁集(分岔点集和滞后点集)上的分岔图。

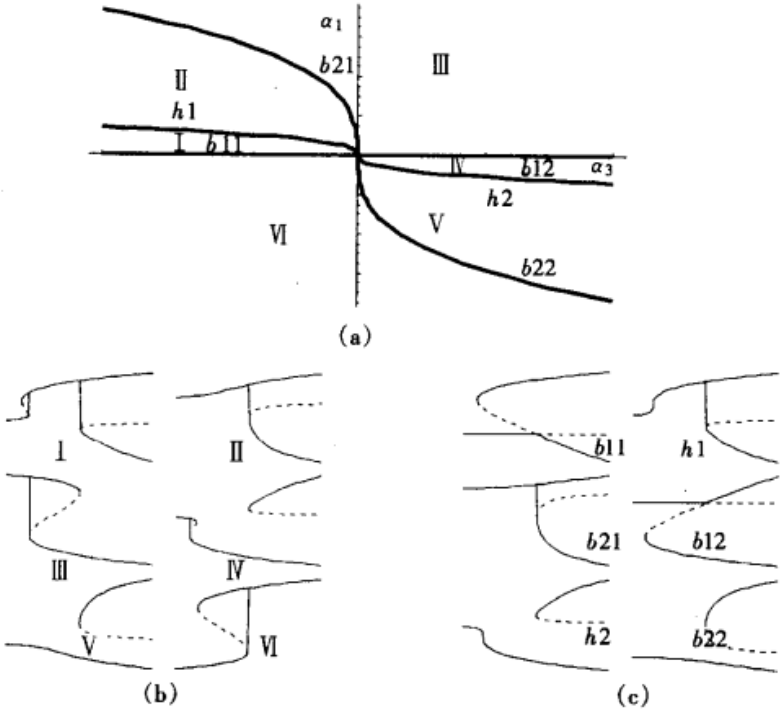


图 13-17　分岔图 $a_2 = -0.000\,74$，$a_4 = 0.02$，$a_0 = 0$

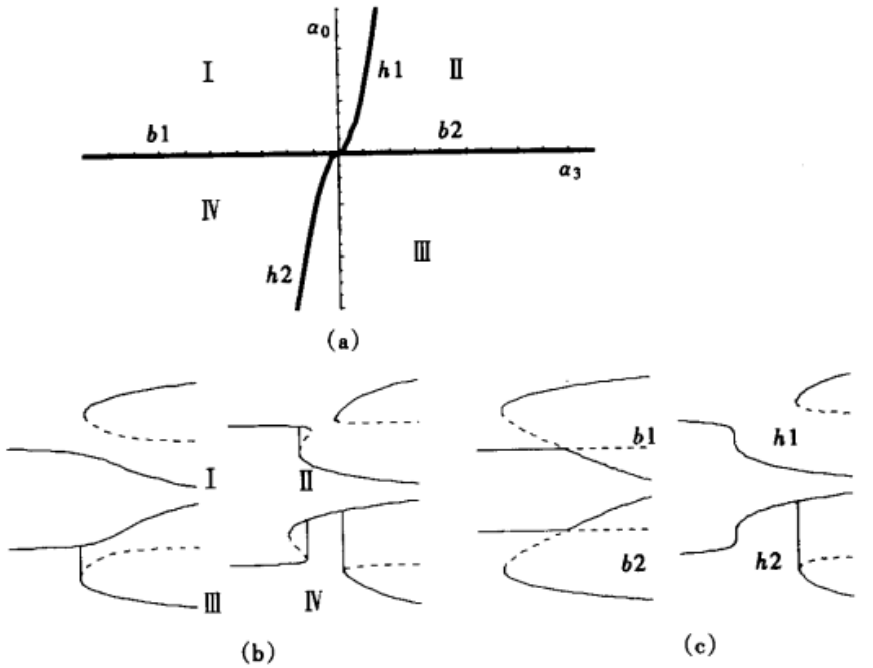


图 13-18 分岔图 $a_2 = -0.000\,74, a_4 = 0.02, a_1 = 0$

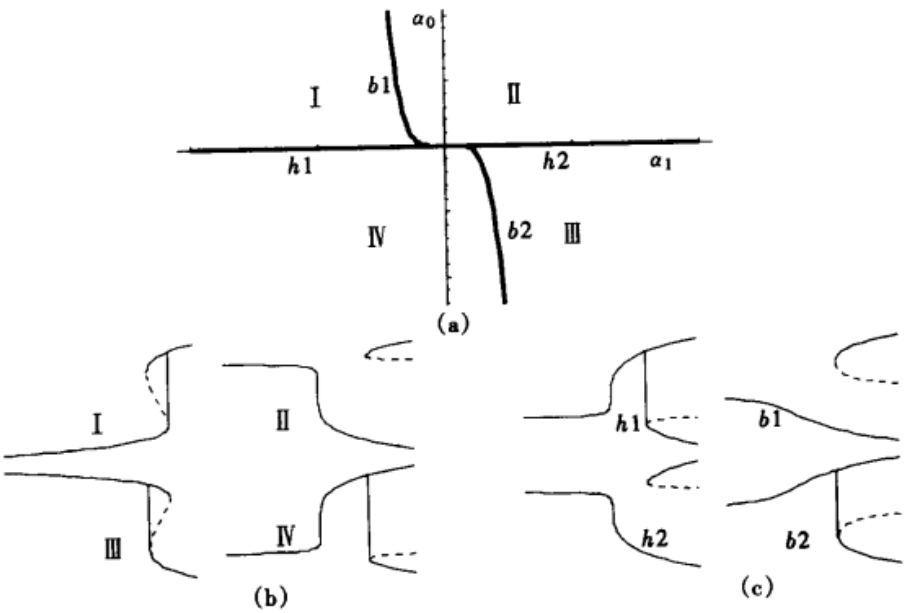


图 13-19 分岔图 $a_2 = -0.000\,74, a_4 = 0.02, a_3 = 0$

上述各图为在各参数投影平面内的转迁集和在各领域的分岔图，从而得到系统在不同域中的多种保持性分岔图。从以上的图中可以看到该动力系统有十分丰富的分岔行为。转迁集把参数$(a_i, a_j)(i, j = 0,1,3)$平面分成 3 个、4 个或 6 个连通分支，在上面的 6 个图上给出普适开折 G 在不同$(a_i, a_j)(i, j = 0,1,3)$数值下的分岔图。如图 13-17(a)，在 6 个子区域

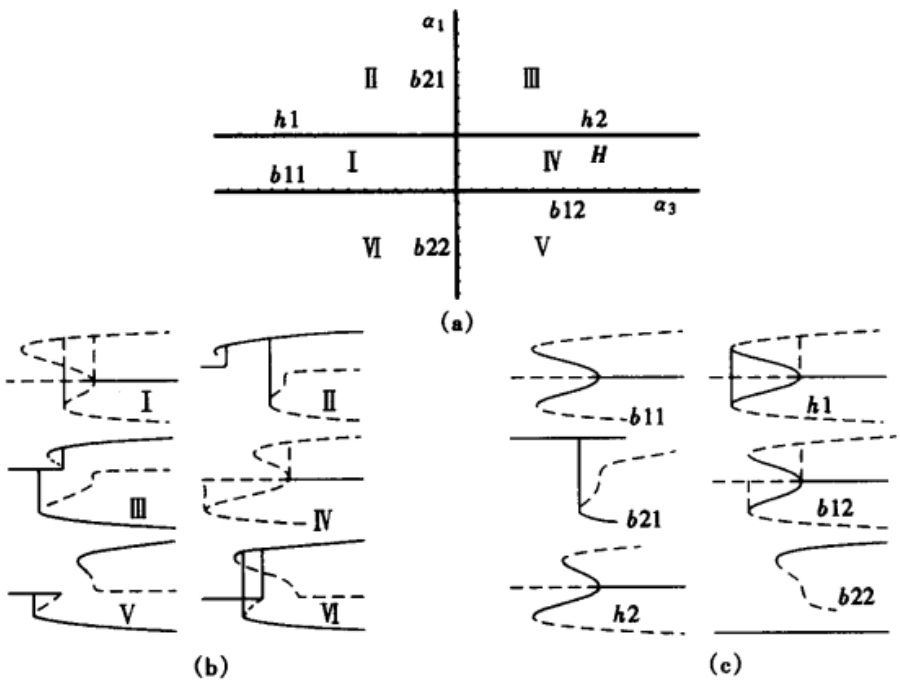


图 13-20　分岔图 $\alpha_2 = -0.106, \alpha_4 = -1.6, \alpha_0 = 0$

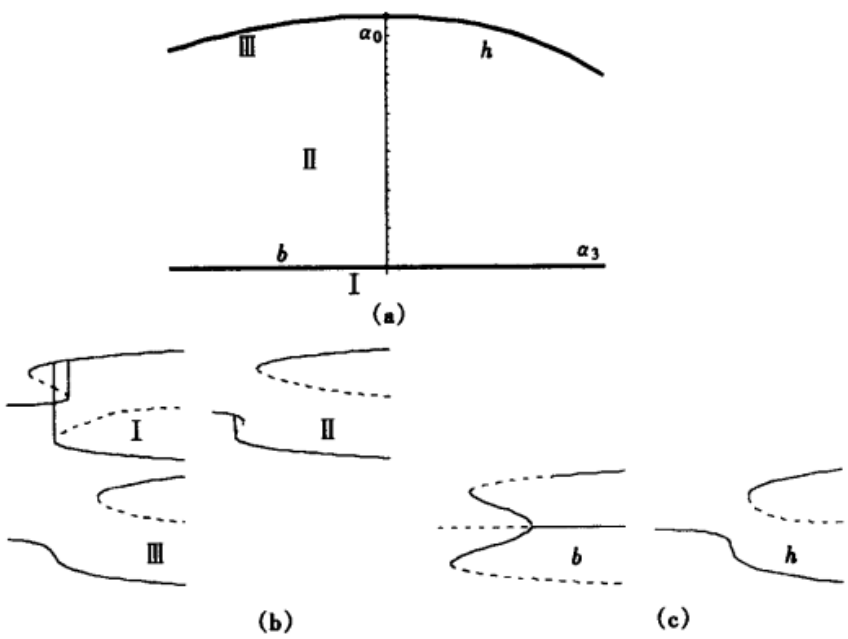


图 13-21　分岔图 $\alpha_2 = -0.106, \alpha_4 = -1.6, \alpha_1 = 0$

Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ和Ⅵ中，G 的分岔图上的奇异点都是极限点；集 B 上，G 的分岔图上有跨临界点(它是分岔点)；在集 H 上，G 的分岔图上有滞后点；在原点处，G 的分岔图上有叉形点(它既是分岔点，又是滞后点)，如图 13-17(a)所示，而在图 13-20(a)中所对应的原点处，G 的

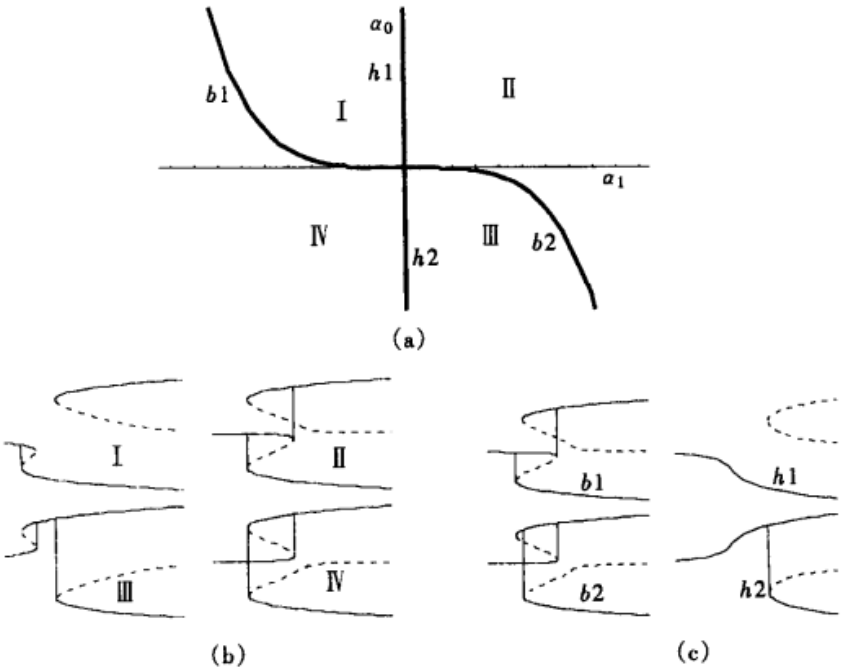


图 13-22 分岔图 $\alpha_2 = -0.106, \alpha_4 = -1.6, \alpha_3 = 0$

(a) $i = 17, 18 \cdots 22$; (b) $i = 17, 18, \cdots, 22$; (c) $i = 17, 18 \cdots 22$

分岔图上有叉形点，如图 13-17(b)所示。由于 $D = \varnothing$，因而其分岔图上没有双极限点。

通过上述分析，可得以下结论。

①以二元机翼颤振系统的数学模型为研究对象，应用谐波平衡法得到了当线性俯仰刚度 k_0 取不同值时，广义气流速度 Q 和稳定极限环颤振幅值 A 的关系曲线图。

②给定系统的线性俯仰刚度 $k_0 = 0.5$，采用后继函数法对降维后求得的系统分岔点的类别进行定性分析，发现系统的三个分岔点都是稳定焦点，以此来判定系统平衡点的稳定性和类型。应用规范形理论并借助于 Mathematica 程序，对分岔点处中心流形约化方程进行化简，得到霍普夫分岔的 A-规范形。

③分析了系统的各个物理参数对近似线性系统的颤振临界速度及稳定极限环颤振幅值的影响，从而可以通过改变系统参数来抑制极限环颤振。

④根据立方非线性系统在极坐标下的在三个平衡点的直到五阶的颤振系统分岔方程，建立了该类系统的拓扑分岔解与系统各参数之间的联系。对各类保持分岔图作初步分析，得到了近似分岔方程在受到微小扰动后的各类转迁集和保持性的分岔图。

附录 1

4.4 中心流形定理的电算程序①

```
THIS PROGRAM IS TO COMPUTE THE CENTERMANIFORD
ReadList["center.txt"]
remainder = total-centerdimension
"************************************************
************************"
" To compute the zero space of the stable manifold and y[i]  "
"************************************************
************************"
If[centerdimension = = 1,
   aa = Table[a[i,j],{i,remainder},{j,2,korder}];
   hx = Table[0,{remainder}];
   Do[
      hx[[i]] = Sum[a[i,j] x[1]^j,{j,2,korder}] + O[x[1]]^(korder + 1)
   ,{i,1,remainder}];
   my = Table[0,{remainder}];
   Do[
      y[i] = hx[[i]]
   ,{i,1,remainder}];
   Do[
      nx = D[hx[[i]],x[1]] dx[1] - dy[i] = = 0;
      my[[i]] = LogicalExpand[nx]
   ,{i,1,remainder}];
   myok = Flatten[my];
   aij1 = Flatten[aa];
   my2 = Solve[myok,aij1];
```

① 本附录与 4.1 节对应

```
    my2 = Flatten[my2];

    dx[1] = Simplify[dx[1]/.my2];
    dx[1] = Normal[dx[1]];
]


If[centerdimension = = 2,
    ahij2 = {};
    Do[
        Do[
            Do[
                i = l-j;ahij2 = Join[{a[h,i,j]},ahij2]
            ,{j,0,l}]
        ,{l,2,korder}]
    ,{h,1,remainder}];
    Do[
        hyx = 0;
        Sum[Do[i = l-j;hyx = hyx + a[h,i,j] x[1]^i x[2]^j,{j,0,l}],{l,2,korder}];
        y[h] = hyx
    ,{h,1,remainder}];
    nx = Table[0,{remainder}];
    coe = {};
    Do[
        nx[[h]] = Sum[D[y[h],x[ii]] dx[ii],{ii,1,centerdimension}] - dy[h]
    ,{h,1,remainder}];
    Do[
        Do[
            Do[
                i = ip-j;
                mycoe = Coefficient[nx[[h]],x[1],i];
                mycoe = Coefficient[mycoe,x[2],j]/.{x[1] - >0,x[2] - >0};
                coe = Join[{mycoe = = 0},coe]
            ,{j,0,ip}]
        ,{ip,2,korder}]
```

```
    ,{h,1,remainder}];
    me = Solve[coe,ahij2];
    me = Flatten[me];
    Do[
        y[i] = y[i]/.me
    ,{i,1,remainder}];
]



If[centerdimension = = 3,
  ahijp3 = {};
  Do[
    Do[
      Do[
        Do[
            p = ip-i-j;
            ahijp3 = Join[{a[h,i,j,p]},ahijp3]
        ,{j,0,ip-i}]
      ,{i,0,ip}]
    ,{ip,2,korder}]
  ,{h,1,remainder}];

  Do[
    hyx = 0;
      Do[
       Do[
        Do[
            p = ip-i-j;
            hyx = hyx + a[h,i,j,p] x[1]^i x[2]^j x[3]^p
        ,{j,0,ip-i}]
       ,{i,0,ip}]
      ,{ip,2,korder}];
    y[h] = hyx;
  ,{h,1,remainder}];
```

```
  nx = Table[0, {remainder}];
  coe = {};
  Do[
      nx[[h]] = Sum[D[y[h], x[ii]] dx[ii], {ii, 1, centerdimension}] - dy[h]
  , {h, 1, remainder}];
  Do[
   Do[
    Do[
     Do[
         p = ip-i-j;
         mycoe = Coefficient[nx[[h]], x[1], i];
         mycoe = Coefficient[mycoe, x[2], j];
         mycoe = Coefficient[mycoe, x[3], p]/. {x[1] - >0, x[2] - >0, x[3] - >0};
         coe = Join[{mycoe = =0}, coe]
      , {j, 0, ip-i}]
    , {i, 0, ip}]
   , {ip, 2, korder}]
  , {h, 1, remainder}];

  me = Solve[coe, ahijp3];
  me = Flatten[me];
  Do[y[i] = y[i]/. me, {i, 1, remainder}];
]



If[centerdimension = =4,
    ahijpl4 = {};
    Do[
      Do[
        Do[
          Do[
            Do[
                l = ip-i-j-p;
```

```
                ahijpl4 = Join[{a[h,i,j,p,l]},ahijpl4];
            ,{p,0,ip-i-j}]
          ,{j,0,ip-i}]
        ,{i,0,ip}]
      ,{ip,2,korder}]
    ,{h,1,remainder}];
    Do[
      hyx = 0;
      Do[
        Do[
          Do[
            Do[
              l = ip-i-j-p;
              hyx = hyx + a[h,i,j,p,l] x[1]^i x[2]^j x[3]^p x[4]^l;
            ,{p,0,ip-i-j}]
          ,{j,0,ip-i}]
        ,{i,0,ip}]
      ,{ip,2,korder}];
      y[h] = hyx;
    ,{h,1,remainder}];
    nx = Table[0,{remainder}];
    coe = {};
    Do[
      nx[[h]] = Sum[D[y[h],x[ii]] dx[ii],{ii,1,centerdimension}] - dy[h]
    ,{h,1,remainder}];
    Do[
      Do[
        Do[
          Do[
            Do[
              l = ip-i-j-p;
              mycoe = Coefficient[nx[[h]],x[1],i];
              mycoe = Coefficient[mycoe,x[2],j];
              mycoe = Coefficient[mycoe,x[3],p];
```

```
                mycoe = Coefficient[mycoe,x[4],1]/.{x[1]->0,x[2]->0,x[3]->0,
                        x[4]->0};
                coe = Join[{mycoe==0},coe]
              ,{p,0,ip-i-j}]
            ,{j,0,ip-i}]
          ,{i,0,ip}]
        ,{ip,2,korder}]
      ,{h,1,remainder}];
      me = Solve[coe,ahijpl4];
      me = Flatten[me];
      Do[
        y[i] = y[i]/.me
      ,{i,1,remainder}];
]

If[centerdimension==5,
      ahijplm5 = {};
      Do[
        Do[
          Do[
            Do[
              Do[
                Do[
                  Do[
                        m = ip-i-j-p-l;
                        ahijplm5 = Join[{a[h,i,j,p,l,m]},ahijplm5];
                ,{l,0, ip-i-j-p}]
                  ,{p,0,ip-i-j}]
                ,{j,0,ip-i}]
              ,{i,0,ip}]
            ,{ip,2,korder}]
          ,{h,1,remainder}];
          Do[
            hyx = 0;
            Do[
              Do[
```

```
        Do[
          Do[
    Do[
                m = ip-i-j-p-l;
                hyx = hyx + a[h,i,j,p,l,m] x[1]^i x[2]^j x[3]^p x[4]^l x[5]^m;
    ,{l,0,ip-i-j-p}]
          ,{p,0,ip-i-j}]
        ,{j,0,ip-i}]
      ,{i,0,ip}]
     ,{ip,2,korder}];
     y[h] = hyx;
  ,{h,1,remainder}];
  nx = Table[0,{remainder}];
  coe = {};
  Do[
    nx[[h]] = Sum[D[y[h],x[ii]] dx[ii],{ii,1,centerdimension}] - dy[h]
  ,{h,1,remainder}];
  Do[
    Do[
      Do[
        Do[
          Do[
   Do[
                m = ip-i-j-p-l;
                mycoe = Coefficient[nx[[h]],x[1],i];
                mycoe = Coefficient[mycoe,x[2],j];
                mycoe = Coefficient[mycoe,x[3],p];
                mycoe = Coefficient[mycoe,x[4],l];
        mycoe = Coefficient[mycoe,x[5],m]/.{x[1]->0,x[2]->0,x[3]->0,x[4]->
0,x[5]->0};
                coe = Join[{mycoe==0},coe]
    ,{l,0,ip-i-j-p}]
          ,{p,0,ip-i-j}]
        ,{j,0,ip-i}]
      ,{i,0,ip}]
```

```
      ,{ip,2,korder}]
    ,{h,1,remainder}];
Print["To solve the equation"];
    me = Solve[coe,ahijplm5];
    me = Flatten[me];
Print[me];
    Do[
      y[i] = y[i]/.me
    ,{i,1,remainder}];
]

If[centerdimension = = 6,
    ahijplmn6 = {};
    Do[
      Do[
        Do[
          Do[
            Do[
      Do[
        Do[
                    n = ip-i-j-p-l-m;
                    ahijplm5 = Join[{a[h,i,j,p,l,m,n]},ahijplmn6];
        ,{m,0,ip-i-j-p-l}]
       ,{l,0, ip-i-j-p}]
              ,{p,0,ip-i-j}]
            ,{j,0,ip-i}]
          ,{i,0,ip}]
        ,{ip,2,korder}]
      ,{h,1,remainder}];
      Do[
        hyx = 0;
        Do[
          Do[
            Do[
              Do[
```

```
Do[
 Do[
                n = ip-i-j-p-l-m;
                hyx = hyx + a[h,i,j,p,l,m,n] x[1]^i x[2]^j x[3]^p x[4]^l x[5]^m x[6]^n;
   ,{m,0,ip-i-j-p-l}]
 ,{l,0,ip-i-j-p}]
       ,{p,0,ip-i-j}]
     ,{j,0,ip-i}]
   ,{i,0,ip}]
  ,{ip,2,korder}];
  y[h] = hyx;
,{h,1,remainder}];
nx = Table[0,{remainder}];
coe = {};
Do[
  nx[[h]] = Sum[D[y[h],x[ii]] dx[ii],{ii,1,centerdimension}] - dy[h]
,{h,1,remainder}];
Do[
  Do[
    Do[
      Do[
        Do[
 Do[
  Do[
                n = ip-i-j-p-l-m;
                mycoe = Coefficient[nx[[h]],x[1],i];
                mycoe = Coefficient[mycoe,x[2],j];
                mycoe = Coefficient[mycoe,x[3],p];
                mycoe = Coefficient[mycoe,x[4],l];
mycoe = Coefficient[mycoe,x[5],m];
mycoe = Coefficient[mycoe,x[6],n]/.{x[1]->0,x[2]->0,x[3]->0,x[4]->0,x[5]->
0,x[6]->0};
                coe = Join[{mycoe==0},coe]
   ,{m,0,ip-i-j-p-l}]
 ,{l,0,ip-i-j-p}]
```

```
            ,{p,0,ip-i-j}]
          ,{j,0,ip-i}]
        ,{i,0,ip}]
      ,{ip,2,korder}]
    ,{h,1,remainder}];
    Print["To solve the equation"];
    me = Solve[coe, ahijplmn6];
    me = Flatten[me];
    Print[me];
    Do[
      y[i] = y[i]/.me
    ,{i,1,remainder}];
]
"*****************************************"
"To compute the centermaniford and crop the higher order items"
"*****************************************"
centermaniford = {}
Do[
    dx[jj] = dx[jj];
    dx[jj] = Expand[dx[jj]];
    len = Length[dx[jj]];
    eff = Table[0,{len}];
      Do[
          item = dx[jj][[i]];
          ee = 0;
          Do[
            eii = Exponent[item,x[ii]];
            ee = ee + eii;
          ,{ii,1,centerdimension}];
          If[ee > korder, eff[[i]] = eff[[i]], eff[[i]] = eff[[i]] + item];
      ,{i,1,len}];
      dx[jj] = 0;
      len1 = Length[eff];
      Do[
        dx[jj] = dx[jj] + eff[[i]];
```

```
        ,{i,1,len1}];
      centermaniford = Join[{dx[jj]},centermaniford];
,{jj,1,centerdimension}]

centermaniford = Reverse[centermaniford] > > center.out
centermaniford = Simplify[centermaniford]
Print["This is the end of the program"]
```

附录 2[①]

5.6 计算高阶规范形的周期平均法

The first three lines are the parameters and function determined

by the system. The last line is the resuts which is saved with the filename lf" in the current directory. The first part of olf is $\dot{r}$, and the second part of olf is $\dot{\theta}$, i.e. which is the high order averaging equations.

k = The order of the high order averaging equation

w = Natural frequency of the nonlinear oscillator

f = {0, The nonlinear function}

```
y = {y1, y2}
eta = {{Cos[w t], Sin[w t]}, {-Sin[w t], Cos[w t]}}
x = eta.y
x1 = x[[1]]
x2 = x[[2]]
enta = Simplify[Inverse[eta]]
g = enta.f>>og
ff = Table[0, {k}, {2}]
gg = Table[0, {k}, {2}]
hh = Table[0, {k}, {2}]
dh = Table[0, {k}, {2}, {2}]
dhf = {0,0}
lf = {0,0}
gg[[1]] = g/.ep->0>>ogl
tt = 2 Pi/w
fit = {{Cos[ct], Sin[ct]}, {-Sin[ct]/r, Cos[ct]/r}}
ff[[1]] = 1/tt Integrate[gg[[1]], {t,0,tt}];
lf = Simplify[Expand[fit.ff[[1]]/.{y1->r Cos[ct], y2->r Sin[ct]}]];
```

① 本附录序号均与相关章节对应。

```
Do[
yy1 = y1;
yy2 = y2;
hh[[i - 1]] = 1/tt Integrate[tao(gg[[i - 1]] - ff[[i - 1]])/.t - > (t + tao), {tao,0,tt}];
dh[[i - 1]] = Outer[D,hh[[i - 1]], {y1,y2}];
Do[yy1 = yy1 + ep^j hh[[j,1]], {j,1,i - 1}];
Do[yy2 = yy2 + ep^j hh[[j,2]], {j,1,i - 1}];
Do[dhf = dhf + dh[[i-j]].ff[[j]], {j,1,i - 1}];
gg[[i]] = (1/(i - 1)! D[g/.{y1 - > yy1,y2 - > yy2}, {ep,i - 1}]/.ep - > 0) - dhf;
ff[[i]] = 1/tt Integrate[gg[[i]], {t,0,tt}];
lf = lf + ep^(i - 1) Simplify[Expand[fit.ff[[i]]/.{y1 - > r Cos[ct],y2 - > r Sin[ct]}]],
{i,2,k}]
ep lf> >olf
```

5.9 计算半单系统规范形的通用程序方法

```
Print["* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *"];
Print["                Read the input functions"];
Print["* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *"];
SetDirectory["path"]
ReadList["file"];
Print["* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *"];
Print["Transform the real functions form to complex functions form"];
Print["* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *"];
epsilon = \[Epsilon];
FA = Table[0, {i,n}];
F = Table[f[i], {i,1,n}];
X = Table[x[i], {i,1,n}];
U = Table[u[i], {i,1,n}];
Jacobi[funs_List,vars_List]: = Outer[D,funs,vars]
A = Jacobi[F,X];
Do[A = A/.{x[k] - > 0};, {k,1,n}]
B = Eigenvalues[A]
Table[bb[k] = 0, {k,1,n}];
Do[
```

```
    If[Im[B[[k]]]!  =0,
        bb[k] = 1/2;,
        bb[k] = 1;];
    ,{k,1,n}];
BC = DiagonalMatrix[Table[bb[k],{k,1,n}]];
EV = Eigenvectors[A]
EV = Transpose[EV].BC;
IEV = Inverse[EV];
X = EV.U;
Do[x[i] = X[[i]],{i,n}]
F = IEV.F;
J0 = DiagonalMatrix[B];
F = F-J0.U;
Do[
    FFI[i] = CoefficientList[F[[i]], \[Epsilon]];
    le[i] = Length[FFI[i]];
    Do[
      fci[i,k1] = Part[FFI[i],k1];
      Do[
        fci[i,k1] = fci[i,k1]/.{u[k] - > v[k]};
        ,{k,1,n}];
      ,{k1,1,le[i]}];
    ,{i,1,n}];
Print["* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *"];
Print["Compute the normal form and nonlinear transformation"];
Print["* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *"];
Co3[i]_: = D[b[k,nn],{u[i],nk[i]}]/nk[i]!
ne[k]_: = j-Sum[nk[i],{i,1,k - 1}];
Table[ne[i] = 0,{i,n,8}];
Table[nk[i] = 0,{i,1,n}];
Do[TP[j] = Table[0,{i,1,n}],{j,0,norder - 1}];
Do[TNF[j] = Table[0,{i,1,n}],{j,0,norder - 1}];

Do[
  If[j > 2,
```

```
Do[
  Do[
    fc[k,k1] = fci[k,k1];
    If[k1 < j,
      Do[vv[k] = u[k] + Sum[ \ [Epsilon]^j1 *  TP[j1][[k]],{j1,1,j-k1}],{k,1,n}];
      Do[fc[k,k1] = fc[k,k1]/.{v[i] - > vv[i]};,{i,1,n}];,
      Do[fc[k,k1] = fc[k,k1]/.{v[i] - > u[i]};,{i,1,n}];
      ];
    ,{k1,2,le[k]}];
  FF[k] = Table[fc[k,k1],{k1,2,le[k]}];
  EE = Table[If[i < j, \ [Epsilon]^i,0],{i,1,le[k] - 1}];
  f[k] = FF[k].EE;
  ,{k,1,n}];
 F = Table[f[i],{i,1,n}];
 Do[FF[i] = CoefficientList[F[[i]], \ [Epsilon]],{i,1,n}];,
 Do[FF[i] = FFI[i],{i,1,n}]
 ];
Do[le1[k] = Length[FF[k]],{k,1,n}];
Do[If[j > le1[k],g[k] = 0;,g[k] = Part[FF[k],j]];,{k,1,n}];
FA = Sum[Jacobi[TP[j - 1 - j1],U].TNF[j1],{j1,1,j - 2}];
If[FA = = 0,FA = Table[0,{i,n}];];
Table[p[k] = 0,{k,n}];
Table[nf[k] = 0,{k,n}];
Do[
  Do[
    Do[
      Do[
        Do[
          Do[
            Do[
              Do[
              nk[n] = j-Sum[nk[i],{i,1,n - 1}];
              Do[
            nn = Sum[nk[i] * 10^(n-i),{i,1,n}] + 10^n;
            b[k,nn] = g[k] - FA[[k]];
```

```
            Do[b[k,nn] = Co3[i],{i,1,n}];
            \[Lambda] = Sum[B[[i]] * nk[i],{i,1,n}] - B[[k]];
            If[
                \[Lambda] = = 0,
                un = b[k,nn];
                hp = 0;,
                hp = b[k,nn]/\[Lambda];
                un = 0
                    ];
                xs = Product[u[i]^nk[i],{i,1,n}];
                p[k] = p[k] + hp * xs;
                nf[k] = nf[k] + un * xs;
                ,{k,1,n}];
               ,{nk[8],0,ne[8]}];
              ,{nk[7],0,ne[7]}];
             ,{nk[6],0,ne[6]}];
            ,{nk[5],0,ne[5]}];
           ,{nk[4],0,ne[4]}];
          ,{nk[3],0,ne[3]}];
         ,{nk[2],0,ne[2]}];
,{nk[1],0,j}];
TP[j-1] = Table[p[k],{k,1,n}];
TNF[j-1] = Table[nf[k],{k,1,n}];
,{j,2,norder}];
"************************************"
"          The normal form in complex form          ";
"************************************";

"************************************">>d.txt;
"          The normal form in complex form          ">>>d.txt;
"************************************">>>d.txt;
Do[tf[k] = Sum[\[Epsilon]^j TNF[j],{j,1,norder-1}][[k]],{k,1,n}];
Do[
    "D[u["<>ToString[i]<>"],t] =">>>d.txt;
    tf[i] = B[[i]] * u[i] + tf[i]>>>d.txt;
```

```
,{i,1,n}];
"********************************">>>d.txt;
"        Transform back to system in real form         ">>>d.txt;
"********************************">>>d.txt;
Clear[F,f,X,x,Y,y,v];
X = Table[x[i],{i,1,n}];
F = Simplify[Table[tf[i],{i,1,n}]]
Do[F = F/.{u[k] -> y[k]};,{k,1,n}];
Y = IEV.X;
Do[y[k] = Y[[k]],{k,1,n}];
"D[Y,t] =">>>d.txt
F1 = Simplify[EV.F]>>>d.txt

"********************************">>>d.txt;
"        Transform back to system in Polar form         ">>>d.txt;
"********************************">>>d.txt;
conjug = Complex[a_,b]_:> Complex[a,-b];
nz = 0;ni = 0;cnz = 0;cni = 0;cm = 0;
Do[
    If[Re[B[[k]]]! =0,
        If[Im[B[[k]]] = =0,cnz = cnz + 1;];,
        cm = cm + 1;
        If[Im[B[[k]]] = =0,nz = nz + 1;];];
    ,{k,n}];
sm = n-cm;
ni = (cm-nz)/2;
cni = (cm-cnz)/2;
k2 = 0;k1 = 0;
Do[
    If[Im[B[[k]]]>0,
        k2 = k2 + 1;
        v[k] = r[k2] Exp[I \[Theta][k2]];,
        If[Im[B[[k]]] = =0,
            v[k] = u[k];,
            k1 = k1 + 1;
```

```
            v[k] = r[k1] Exp[ - I \[Theta][k1]];];];
    ,{k,n}];
k1 = 0;k2 = 0;nzn = nz + cnz;
Do[
  If[Im[B[[k]]] = = 0,
      ga = tf[k];
      Do[ga = ga/.{u[i] - > v[i]};,{i,1,n}];
      k2 = k2 + 1;
      "D[u[" < > ToString[k2] < > "],t] = " > > > d.txt;
      g[k2] = Expand[TrigReduce[ComplexExpand[ga]]] > > > d.txt;,
      If[Im[B[[k]]] < 0,
          ga = tf[k];
          Do[ga = ga/.{u[i] - > v[i]};,{i,1,n}];
          k1 = k1 + 1;
          gc = ga Exp[I \[Theta][k1]];
          gd = gc/.conjug;
          "D[r[" < > ToString[k1] < > "],t] = " > > > d.txt;
          g[nzn + 2
k1 - 1] = Expand[TrigReduce[ComplexExpand[Simplify[(gc + gd)/2]]]] > > > d.txt;
          "D[\[Theta][" < > ToString[k1] < > "],t] = " > > > d.txt;
          g[nzn + 2
k1] = Expand[TrigReduce[ComplexExpand[Simplify[ - (gc-gd)/(2 * I * r[k1])]]]] > > > d.txt;
          ];
      ];
  ,{k,n}]
```

5.10 用规范形理论研究 Hopf 分叉系统的焦点量问题

```
a20 = la1;a11 = la2 + 2 lb1;a02 = la3 - la1;b20 = lb1;b11 = lb2 - 2 la1;b02 = - lb1
a30 = la4;a21 = la5;a12 = la6 - 3 lb7;a03 = la7
b30 = lb4;b21 = lb5 - la6 - 3 la4;b12 = lb6 - la5;b03 = lb7
x = {x1,x2};a = {{0, - 1},{1,0}}; > > ox
f2 = {a20 * x1^2 + a11 * x1 * x2 + a02 * x2^2,b20 * x1^2 + b11 * x1 * x2 + b02 * x2^2} > > of2
```

```
lb2 = 4la1; la2 = -4lb1; la4 = 0; la6 = 0; lb7 = 0
f2 = {a20 * x1^2 + a11 * x1 * x2 + a02 * x2^2, b20 * x1^2 + b11 * x1 * x2 + b02 * x2^2} > > of20
f3 = {a30 * x1^3 + a21 * x1^2 * x2 + a12 * x1 * x2^2 + a03 * x2^3, b30 * x1^3 + b21 * x1^2 * x2 + b12
* x1 * x2^2 + b03 * x2^3} > > of3
f4 = {0,0} > > of4
f5 = {0,0} > > of5
f6 = {0,0} > > of6
f7 = {0,0} > > of7
f8 = {0,0} > > of8
f9 = {0,0} > > of9
p2 = {c20 * x1^2 + c11 * x1 * x2 + c02 * x2^2, d20 * x1^2 + d11 * x1 * x2 + d02 * x2^2} > > op2
d20 = (a20 - b11 + 2 * a02)/3; d11 = (2b20 - a11 - 2 * b02)/3; d02 = (2a20 + b11 + a02)/3 > >
od20
c20 = ( - b20 - a11 - 2 * b02)/3; c11 = (2a20 + b11 - 2 * a02)/3; c02 = ( - 2b20 + a11 - b02)/3 >
> oc20
df2 = {{D[f2[[1]], x1], D[f2[[1]], x2]}, {D[f2[[2]], x1], D[f2[[2]], x2]}} > > odf2
dp2 = {{D[p2[[1]], x1], D[p2[[1]], x2]}, {D[p2[[2]], x1], D[p2[[2]], x2]}} > > odp2
f21 = Simplify[f2 + a.p2 - dp2.a.x] > > of21
f31 = Simplify[f3 + df2.p2] > > of31
a1 = CoefficientList[f31[[1]], x2] > > oa1
b1 = CoefficientList[f31[[2]], x2] > > ob1
a130 = Simplify[a1[[1]]/x1^3] > > oa130
a121 = Simplify[a1[[2]]/x1^2] > > oa121
a112 = Simplify[a1[[3]]/x1] > > oa112
a103 = a1[[4]] > > oa103
b130 = Simplify[b1[[1]]/x1^3] > > ob130
b121 = Simplify[b1[[2]]/x1^2] > > ob121
b112 = Simplify[b1[[3]]/x1] > > ob112
b103 = b1[[4]] > > ob103
na1 = Simplify[(b121 + 3 * a130 + 3 * b103 + a112)/8] > > ona1
nb1 = Simplify[( - a121 + 3 * b130 - 3 * a103 + b112)/8] > > onb1
lb5 = 4 la3 lb1
c30 = 0 > > oc30
c03 = 0 > > oc03
c12 = Simplify[(8 * c30 - b130 + b112 + 3 * a121 - 3 * a103)/8] > > oc12
```

```
c21 = Simplify[(8 * c03 + b121 - b103 + 3 * a130 - 3 * a112)/8] > > oc21
d21 = Simplify[(8 * c30 + 5 * b130 - b112 + a121 + 3 * a103)/8] > > od21
d12 = Simplify[( - 8 * c03 + b121 - 5 * b103 + 3 * a130 + a112)/8] > > od12
d30 = Simplify[( - 4 * c03 - b121 - b103 + a130 + a112)/4] > > od30
d03 = Simplify[(4 * c30 + b130 + b112 + a121 + a103)/4] > > od03
p3 = {c30 * x1^3 + c21 * x1^2 * x2 + c12 * x1 * x2^2 + c03 * x2^3, d30 * x1^3 + d21 * x1^2 * x2 +
d12 * x1 * x2^2 + d03 * x2^3} > > op3
dp3 = {{D[p3[[1]], x1], D[p3[[1]], x2]}, {D[p3[[2]], x1], D[p3[[2]], x2]}} > > odp3
f32 = Simplify[f31 + a.p3 - dp3.a.x] > > of32
p22 = {p2[[1]]^2, 2 * p2[[1]] * p2[[2]], p2[[2]]^2} > > op22
d2f2 = {{D[f2[[1]], {x1, 2}], D[f2[[1]], x1, x2], D[f2[[1]], {x2, 2}]}, {D[f2[[2]], {x1, 2}],
D[f2[[2]], x1, x2], D[f2[[2]], {x2, 2}]}} > > od2f2
df3 = {{D[f3[[1]], x1], D[f3[[1]], x2]}, {D[f3[[2]], x1], D[f3[[2]], x2]}} > > odf3
f41 = Simplify[f4 + 1/2 * d2f2.p22 + df3.p2 - dp2.f31] > > of41
a2 = CoefficientList[f41[[1]], x2] > > oa2
b2 = CoefficientList[f41[[2]], x2] > > ob2
a240 = Simplify[a2[[1]]/x1^4] > > oa240
a231 = Simplify[a2[[2]]/x1^3] > > oa231
a222 = Simplify[a2[[3]]/x1^2] > > oa222
a213 = Simplify[a2[[4]]/x1] > > oa213
a204 = a2[[5]] > > oa204
b240 = Simplify[b2[[1]]/x1^4] > > ob240
b231 = Simplify[b2[[2]]/x1^3] > > ob231
b222 = Simplify[b2[[3]]/x1^2] > > ob222
b213 = Simplify[b2[[4]]/x1] > > ob213
b204 = b2[[5]] > > ob204
d40 = Simplify[( - 3 * b231 - 2 * b213 + 3 * a240 + 2 * a222 + 8 * a204)/15] > > od40
d31 = Simplify[(12 * b240 - 2 * b222 - 8 * b204 - 3 * a231 - 2 * a213)/15] > > od31
d22 = Simplify[(b231 - b213 + 4 * a240 + a222 + 4 * a204)/5] > > od22
d13 = Simplify[(8 * b240 + 2 * b222 - 12 * b204 - 2 * a231 - 3 * a213)/15] > > od13
d04 = Simplify[(2 * b231 + 3 * b213 + 8 * a240 + 2 * a222 + 3 * a204)/15] > > od04
c40 = Simplify[( - 3 * b240 - 2 * b222 - 8 * b204 - 3 * a231 - 2 * a213)/15] > > oc40
c31 = Simplify[(3 * b231 + 2 * b213 + 12 * a240 - 2 * a222 - 8 * a204)/15] > > oc31
c22 = Simplify[( - 4 * b240 - b222 - 4 * b204 + a231 - a213)/5] > > oc22
c13 = Simplify[(2 * b231 + 3 * b213 + 8 * a240 + 2 * a222 - 12 * a204)/15] > > oc13
```

```
c04 = Simplify[( - 8 * b240 - 2 * b222 - 3 * b204 + 2 * a231 + 3 * a213)/15] > > oc04
p4 = {c40 * x1^4 + c31 * x1^3 * x2 + c22 * x1^2 * x2^2 + c13 * x1 * x2^3 + c04 * x2^4, d40 * x1^4 +
d31 * x1^3 * x2 + d22 * x1^2 * x2^2 + d13 * x1 * x2^3 + d04 * x2^4} > > op4
f42 = f41 > > of42
dp4 = {{D[p4[[1]], x1], D[p4[[1]], x2]}, {D[p4[[2]], x1], D[p4[[2]], x2]}} > > odp4
f43 = Simplify[f42 + a. p4 - dp4. a. x] > > of43
d2f3 = {{D[f3[[1]], {x1, 2}], D[f3[[1]], x1, x2], D[f3[[1]], {x2, 2}]}, {D[f3[[2]], {x1, 2}],
D[f3[[2]], x1, x2], D[f3[[2]], {x2, 2}]}} > > od2f3
df4 = {{D[f4[[1]], x1], D[f4[[1]], x2]}, {D[f4[[2]], x1], D[f4[[2]], x2]}} > > odf4
f51 = Simplify[f5 + 1/2 * d2f3. p22 + df4. p2 - dp2. f41] > > of51
df31 = {{D[f31[[1]], x1], D[f31[[1]], x2]}, {D[f31[[2]], x1], D[f31[[2]], x2]}} > > odf31
f52 = Simplify[f51 + df31. p3 - dp3. f32] > > of52
a3 = CoefficientList[f52[[1]], x2] > > oa3
b3 = CoefficientList[f52[[2]], x2] > > ob3
a350 = Simplify[a3[[1]]/x1^5] > > oa350
a341 = Simplify[a3[[2]]/x1^4] > > oa341
a332 = Simplify[a3[[3]]/x1^3] > > oa332
a323 = Simplify[a3[[4]]/x1^2] > > oa323
a314 = Simplify[a3[[5]]/x1] > > oa314
a305 = a3[[6]] > > oa305
b350 = Simplify[b3[[1]]/x1^5] > > ob350
b341 = Simplify[b3[[2]]/x1^4] > > ob341
b332 = Simplify[b3[[3]]/x1^3] > > ob332
b323 = Simplify[b3[[4]]/x1^2] > > ob323
b314 = Simplify[b3[[5]]/x1] > > ob314
b305 = b3[[6]] > > ob305
na2 = Simplify[ - ( - b341 - b323 - 5 * b305 - 5 * a350 - a332 - a314)/16] > > ona2
nb2 = Simplify[ - ( - 5 * b350 - b332 - b314 + a341 + a323 + 5 * a305)/16] > > onb2
la3 = 0
c50 = 0 > > oc50
c05 = 0 > > oc05
c32 = Simplify[(32 * c50 - 3 * b350 + b332 + b314 + 7 * a341 - a323 - 5 * a305)/16] > > oc32
c23 = Simplify[(32 * c05 + b341 + b323 - 3 * b305 + 5 * a350 + a332 - 7 * a314)/16] > > oc23
c41 = Simplify[(48 * c05 + 5 * b341 + b323 - 7 * b305 + 25 * a350 - 7 * a332 - 11 * a314)/48] >
> oc41
```

```
c14 = Simplify[(48 * c50 - 7 * b350 + b332 + 5 * b314 + 11 * a341 + 7 * a323 - 25 * a305)/48] >
> oc14
d41 = Simplify[(16 * c50 + 11 * b350 - b332 - b314 + a341 + a323 + 5 * a305)/16] > > od41
d50 = Simplify[( - 12 * c05 - 2 * b341 - b323 - 2 * b305 + 2 * a350 + a332 + 2 * a314)/12] > >
od50
d05 = Simplify[(12 * c50 + 2 * b350 + b332 + 2 * b314 + 2 * a341 + a323 + 2 * a305)/12] > > od05
d14 = Simplify[( - 16 * c05 + b341 + b323 - 11 * b305 + 5 * a350 + a332 + a314)/16] > > od14
d32 = Simplify[( - 96 * c05 + 5 * b341 - 11 * b323 - 31 * b305 + 25 * a350 + 5 * a332 + 13 *
a314)/48] > > od32
d23 = Simplify[(96 * c50 + 31 * b350 + 11 * b332 - 5 * b314 + 13 * a341 + 5 * a323 + 25 * a305)/
48] > > od23
p5 = {c50 * x1^5 + c41 * x1^4 * x2 + c32 * x1^3 * x2^2 + c23 * x1^2 * x2^3 + c14 * x1 * x2^4 + c05 *
x2^5, d50 * x1^5 + d41 * x1^4 * x2 + d32 * x1^3 * x2^2 + d23 * x1^2 * x2^3 + d14 * x1 * x2^4 + d05 *
x2^5} > > op5
f53 = f52 > > of53
dp5 = {{D[p5[[1]], x1], D[p5[[1]], x2]}, {D[p5[[2]], x1], D[p5[[2]], x2]}} > > odp5
f54 = Simplify[f53 + a.p5 - dp5.a.x] > > of54
d3f3 = {{D[f3[[1]], {x1, 3}], D[f3[[1]], {x1, 2}, x2], D[f3[[1]], x1, {x2, 2}], D[f3[[1]],
{x2, 3}]}, {D[f3[[2]], {x1, 3}], D[f3[[2]], {x1, 2}, x2], D[f3[[2]], x1, {x2, 2}], D[f3[[2]],
{x2, 3}]}} > > od3f3
p23 = {p2[[1]]^3, 3 * p2[[1]]^2 * p2[[2]], 3 * p2[[1]] * p2[[2]]^2, p2[[2]]^3} > > op23
d2f4 = {{D[f4[[1]], {x1, 2}], D[f4[[1]], x1, x2], D[f4[[1]], {x2, 2}]}, {D[f4[[2]], {x1, 2}],
D[f4[[2]], x1, x2], D[f4[[2]], {x2, 2}]}} > > od2f4
df5 = {{D[f5[[1]], x1], D[f5[[1]], x2]}, {D[f5[[2]], x1], D[f5[[2]], x2]}} > > odf5
f61 = Simplify[f6 + d3f3.p23/6 + d2f4.p22/2 + df5.p2 - dp2.f51] > > of61
df41 = {{D[f41[[1]], x1], D[f41[[1]], x2]}, {D[f41[[2]], x1], D[f41[[2]], x2]}} > > odf41
f62 = Simplify[f61 + df41.p3 - dp3.f41] > > of62
df32 = {{D[f32[[1]], x1], D[f32[[1]], x2]}, {D[f32[[2]], x1], D[f32[[2]], x2]}} > > odf32
f63 = f62 + df32.p4 - dp4.f32 > > of63
d3f4 = {{D[f4[[1]], {x1, 3}], D[f4[[1]], {x1, 2}, x2], D[f4[[1]], x1, {x2, 2}], D[f4[[1]],
{x2, 3}]}, {D[f4[[2]], {x1, 3}], D[f4[[2]], {x1, 2}, x2], D[f4[[2]], x1, {x2, 2}], D[f4[[2]],
{x2, 3}]}} > > od3f4
d2f5 = {{D[f5[[1]], {x1, 2}], D[f5[[1]], x1, x2], D[f5[[1]], {x2, 2}]}, {D[f5[[2]], {x1, 2}],
D[f5[[2]], x1, x2], D[f5[[2]], {x2, 2}]}} > > od2f5
df6 = {{D[f6[[1]], x1], D[f6[[1]], x2]}, {D[f6[[2]], x1], D[f6[[2]], x2]}} > > odf6
```

```
f71 = Simplify[f7 + d3f4.p23/6 + d2f5.p22/2 + df6.p2 - dp2.f61] >> of71
d2f31 = {{D[f31[[1]],{x1,2}],D[f31[[1]],x1,x2],D[f31[[1]],{x2,2}]},{D[f31[[2]],
{x1,2}],D[f31[[2]],x1,x2],D[f31[[2]],{x2,2}]}} >> od2f31
p32 = {p3[[1]]^2,2 * p3[[1]] * p3[[2]],p3[[2]]^2} >> op32
df51 = {{D[f51[[1]],x1],D[f51[[1]],x2]},{D[f51[[2]],x1],D[f51[[2]],x2]}} >> odf51
f72 = Simplify[f71 + 1/2 * d2f31.p32 + df51.p3 - dp3.f52] >> of72
df42 = {{D[f42[[1]],x1],D[f42[[1]],x2]},{D[f42[[2]],x1],D[f42[[2]],x2]}} >> odf42
f73 = Simplify[f72 + df42.p4 - dp4.f43] >> of73
a73 = CoefficientList[f73[[1]],x2] >> oa73
b73 = CoefficientList[f73[[2]],x2] >> ob73
a370 = Simplify[a73[[1]]/x1^7] >> oa370
a352 = Simplify[a73[[3]]/x1^5] >> oa352
a334 = Simplify[a73[[5]]/x1^3] >> oa334
a316 = Simplify[a73[[7]]/x1] >> oa316
b361 = Simplify[b73[[2]]/x1^6] >> ob361
b343 = Simplify[b73[[4]]/x1^4] >> ob343
b325 = Simplify[b73[[6]]/x1^2] >> ob325
b307 = b73[[8]] >> ob307
c3 = Simplify[(35 * a370 + 5 * a352 + 3 * a334 + 5 * a316 + 5 * b361 + 3 * b343 + 5 * b325 + 35 *
b307)/128] >> oc3
lb4 = - la7
f81 = Simplify[ - dp2.f71] >> of81
f91 = Simplify[ - dp2.f81] >> of91
d3f31 = {{D[f31[[1]],{x1,3}],D[f31[[1]],{x1,2},x2],D[f31[[1]],x1,{x2,2}],D[f31
[[1]],{x2,3}]},{D[f31[[2]],{x1,3}],D[f31[[2]],{x1,2},x2],D[f31[[2]],x1,{x2,2}],D
[f31[[2]],{x2,3}]}} >> od3f31
p33 = {p3[[1]]^3,3 * p3[[1]]^2 * p3[[2]],3 * p3[[1]] * p3[[2]]^2,p3[[2]]^3} >> op33
df71 = {{D[f71[[1]],x1],D[f71[[1]],x2]},{D[f71[[2]],x1],D[f71[[2]],x2]}} >> odf71
d2f51 = {{D[f51[[1]],{x1,2}],D[f51[[1]],x1,x2],D[f51[[1]],{x2,2}]},{D[f51[[2]],
{x1,2}],D[f51[[2]],x1,x2],D[f51[[2]],{x2,2}]}} >> od2f51
f92 = Simplify[f91 + 1/6 * d3f31.p33 + 1/2 * d2f51.p32 + df71.p3 - dp3.f72] >> of92
df62 = {{D[f62[[1]],x1],D[f62[[1]],x2]},{D[f62[[2]],x1],D[f62[[2]],x2]}} >> odf62
p42 = {p4[[1]]^2,2 * p4[[1]] * p4[[2]],p4[[2]]^2} >> op42
d2f32 = {{D[f32[[1]],{x1,2}],D[f32[[1]],x1,x2],D[f32[[1]],{x2,2}]},{D[f32[[2]],
{x1,2}],D[f32[[2]],x1,x2],D[f32[[2]],{x2,2}]}} >> od2f32
```

```
f93 = Simplify[f92 + d2f32.p42/2 + df62.p4 - dp4.f63] > > of93
df53 = {{D[f53[[1]],x1],D[f53[[1]],x2]},{D[f53[[2]],x1],D[f53[[2]],x2]}} > > odf53
f94 = Simplify[f93 + df53.p5 - dp5.f54] > > of94
a94 = CoefficientList[f94[[1]],x2] > > oa94
b94 = CoefficientList[f94[[2]],x2] > > ob94
a490 = Simplify[a94[[1]]/x1^9] > > oa490
a472 = Simplify[a94[[3]]/x1^7] > > oa472
a454 = Simplify[a94[[5]]/x1^5] > > oa454
a436 = Simplify[a94[[7]]/x1^3] > > oa436
a418 = Simplify[a94[[9]]/x1] > > oa418
b481 = Simplify[b94[[2]]/x1^8] > > ob481
b463 = Simplify[b94[[4]]/x1^6] > > ob463
b445 = Simplify[b94[[6]]/x1^4] > > ob445
b427 = Simplify[b94[[8]]/x1^2] > > ob427
b409 = b94[[10]] > > ob409
c4 = Simplify[(63 * a490 + 7 * a472 + 3 * a454 + 3 * a436 + 7 * a418 + 7 * b481 + 3 * b463 + 3 *
b445 + 7 * b427 + 63 * b409)/256] > > oc4
```

参考文献

1 阿诺尔德 B И.常微分方程续论.北京:科学出版社,1989

2 Bae J S, Yang S M. Linear and nonlinear aeroelastic analytical of fighter-type wing with Control Surface. Journal of Aircraft,2002,39(4):697 – 708

3 Bezruchko B P, Ivanov R N, Ponomarenko V I, Seleznev E P. Experimental study of bifurcations in systems with rapidly varying parameters. Technical Physics Letters,2002,28(6):471 – 474

4 Bi Q S, Yu P. Computation of normal forms of differential equations associated with non-semisimple zero eigenvalues. International Journal Bifurcation Chaos,1998,8 (12):2279 – 2319

5 Bi Q S, Yu P. Symbolic computation of normal forms for semi-simple cases. Journal of Computational and Applied Mathematics,1999,102(2):195 – 220

6 Bi Q S, Yu P. Symbolic software development for computing the normal form of double Hopf bifurcation. Mathematics Computer Model,1999,29 (9):49 – 70

7 Bi Q S, Yu P. Double Hopf bifurcations and chaos of a nonlinear vibration system. Nonlinear Dynamics,1999,19 (4):313 – 332

8 毕毅,杜度,张维康. 单点系泊系统的静态分岔特性研究. 船舶力学,2003,7(2):45 – 50

9 Breitbach E. Effect of structural nonlinearities on aircraft vibration and flutter. Advisory Group for Aerospace research and Development Report,1978

10 陈芳启. 奇异性理论. 天津:天津大学研究生讲义,2000

11 陈芳启,吴志强等. 黏弹性圆柱形壳动力学高余维分岔、普适开折问题. 力学学报,2001,33(5):661 – 668

12 Chen G, Jean D D. An algorithm for computing a new normal form for dynamical systems. Journal of Symbolic Computation,2000,29(3):393 – 418

13 陈予恕. 非线性振动. 天津:天津科技出版社,1983

14 陈予恕. 关于非线性振动. 力学进展,1989,19(2):59 – 66

15 陈予恕. 我国非线性振动研究的发展——十年回顾与今后展望(1979—1989). 全国第五届非线性会议论文集,甘肃敦煌,1989

16 陈予恕,梅林涛. 非线性参数振动系统的共振分叉解. 中国科学 A 辑,1990(9):938 – 945

17 陈予恕,张琪昌. 一种求解非线性振动系统渐近解的新方法. 力学学报,1990,22(4):413 – 419

18 陈予恕,唐云等.非线性动力学中的现代分析方法. 北京:科学出版社,1992

19 陈予恕. 非线性振动系统的分岔与混沌理论. 北京:高等教育出版社,1993
20 陈予恕,徐建学. 非线性动力学、非线性运动稳定性. 北京:中国科学技术出版社,1995
21 陈予恕,吴志强. 多重非内共振 Hopf 分岔的正规形. 力学学报,1997,29(6):669 - 675
22 Chen Y S, Leung A Y T. Bifurcation and chaos in engineering. Springer, 1998
23 Coullet P, Spiesel E. Amplitude equations for systems with competing instabilities. SIAM Journal of Appled Mathematics, 1983, 43(4): 776 - 821
24 Chow S Y, Li C Z, Wang D. Normal forms and bifurcation of planar vector fields. Cambridge University Press, Cambridge, 1994
25 Cushman R, Deprit A, Mosak R. Normal forms and representation theory. Journal of Mathematic and Physics, 1983, 24(5): 2103 - 2116
26 Cushman R. Notes on normal forms. Lecture Notes of MSU, USA, 1985
27 Cushman R, Sanders J. Nilpotent normal forms and representation theory of sl(2,R). Multi-parameter bifurcation theory, Contemporary Mathematics, 1985, 56: 31 - 51
28 Cushman R, Sanders J. Nilpotent normal forms in dimension 4, Dynamics of infinite dimensional systems. ed. S N. Chow and J Hale, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1987, 61 - 66
29 Dotson K W, Baker R L. Limit-Cycle Oscillation Induced by nonlinear Aerodynamic Forces. Aiaa Journal, 2002, 40(11): 2197 - 2205
30 杜乃林,曾宪武. 计算焦点量的一类递推式. 科学通报,1994,39(19):1742 - 1744
31 Elphick C, Tirapegue E, Brachet M E, Coullet P, Ioose G. A simple global characterization for normal forms of singular vector fields. Physica D, 1987, 29(1): 95 - 117
32 Edwards A M, et al. Generic dynamics of a simple plankton population model with a non-integer exponent of closure. Chaos, Solitons and Fractals. 2001, 12(2): 289 - 300
33 Fabio Sattin, Lyap. A Fortran 90 program to computer the Lyapunov exponent of a dynamical system from a time series. Computer Physics Communications, 1997, 107(3): 253 - 257
34 Farr W W, Li Chengzhi, Labouriau I S, Langford W F. Degenerate Hopf bifurcation formulas and Hibert 16th Problem . SISM J Math Anal, 1989, 20(1): 13 - 30
35 Feigenbaum M J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. J. Stat. Phys, 1978, 19(1): 25 - 52
36 Feigenbaum M J, Kadanoff L P, Shenker S J. Quasiperiodictiy in dissipative systems : A Renormalization Group Analysis. Physica D, 1982, 5(3): 270 - 386
37 冯登泰. 应用非线性振动力学,北京:中国铁道出版社,1982
38 Friedman P, Hammaond C E, Woo T H. Effect Numerical Treatment of Periodic System with Application to Stabillty Problen. Internatconal Journal for Numerical Methods in Engineering, 1977, 11
39 付卫平,蒋耀林,徐健学. 机床动力学中含时滞颤振系统的分岔问题的研究. 非线性动力学学报,1994,1(4):319 - 325

40 甘春标,陆启韶,黄克累. 耦合 van der Pol-Duffing 振子的强共振分叉解. 应用数学和力学,1999,20(1):63 – 69

41 葛新权. 混沌理论及其在我国经济学中应用的评价. 数量经济技术经济研究,1992,9(12):70 – 75

42 葛新权. 两个非线性混沌动力学模型. 数量经济技术经济研究,1998,15(8):30 – 33

43 Glibert. P, Pitcher G. Global ecology and oceanography of harmful algal blooms. Baltimore and Paris: SCOR and IOC, 2001

44 Golubitsky M, Stewart I, Schaeffer D G. Singularities and groups in bifurcation theory. Vol 1. New York: Springer-Verlag, 1985

45 Golubitsky M and Schaffer D G. Singularities and groups in bifurcation theory. Vol 2. New York: Springer-Verlag, 1988

46 Gong L, Wong Y S, Lee BHK. Dynamics of a coupled system of Duffing's equations. Dynamics of continuous, discrete and impulsive system. Waterloo: Watam Pres, 1998(4):99 – 119

47 宫心喜, 臧剑秋. 应用非线性振动力学习题与选解. 北京:中国铁道出版社,1986

48 关新平. 混沌控制及其在保密通信中的应用. 北京:国防工业出版社,2002

49 Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear oscillation, Dynamical systems and bifurcation of vector fields. New York: Springer-Verlag, 1983

50 韩景龙, 朱德懋. 非线性振动系统的规范形与平均法. 振动工程学报,1996,9(4):371 – 377

51 Hassard D, Wan Y H. Bifurcation formulae derived from center manifold theory. Journal of Mathematical Analysis and Application, 1978, 63(1):297 – 312

52 Hassard D, Kazarinoff N D, Wan Y H. Theory and applications of Hopf bifurcation. Cambridge: Cambridge University Press, 1981

53 Hayashi C. Nonlinear oscillations in physical systems. New York: MC Graw Hill, 1964

54 Healey T J. Global bifurcation and continuation in the presence of symmetry with an application to solid mechanics. SIAM J Math Anal, 1988, 19(4):824 – 840

55 侯祥林,虞和济. 确定性非线性动力系统周期的后继函数法. 振动与冲击,1999,18(3):81 – 84

56 侯振挺, 刘再明. 数学生态学随机模型. 生物数学学报,2000,15(3):301 – 307

57 胡海岩.应用非线性动力学.北京:航空工业出版社,2000

58 黄润生等. 混沌及其应用. 武汉:武汉大学出版社,2000

59 黄伟建,齐雨藻. 大鹏湾夜光藻种群密度变化率动态模型研究. 海洋与湖沼,1996,27(1):29 – 33

60 黄玉盈,邹时智等. 输液管的非线性振动. 分岔与混沌——现状与展望,1998,28(1):30 – 42

61 Huseyin K and Zhang W. On the normal forms associate with high dimensional systems. Journal of Vibration and Acoustics, 2001, 123(2): 157 – 169

62 James E M, Lloyd N G. A Cubic system with eight small-amplitude limit cycles. SIMA Journal of Applied Mathematics, 1991, 47(1): 163 – 171

63 Jezequel L, Lamarque C H. Analysis of non-linear dynamical system by the normal form theory. Journal of Sound and Vibration, 1991, 143(3): 425 – 459

64 Kern G, Maitz A. Normal form transformation and an application to a flutter-type of vibration. International Journal Nonlinear Mechanics, 1998, 33 (5): 741 – 751

65 Khajepour, M F Golnaraghi, K A MORRIS. Modal coupling controller design using a normal form method 1 Dynamics. Journal Sound Vibration, 1997, 205 (5): 657 – 670

66 Lai D, Chen G. Statistical Analysis of Lyapunov exponent from time series. Math Compute Modeling, 1998, 27(7): 1 – 9

67 Lansun Chen. The Research on ecological model. Beijing: Science Press, 1988

68 Lee B H K, LeBlanc P. Flutter analysis of a two-dimensional airfoil containing structural nonlinearities. Aeronautical Report LR – 618, NRC NO.27833, National Research Council of Canada, 1987

69 Lee B H K, Price S J, Wong Y S. Nonlinear aeroelastic analysis of airfoils: bifurcation and chaos. Progress in Aerospace Sciences 1999, 35(5): 205 – 334

70 Leung A Y T, Zhang Q C. Normal form analysis of hopf bifurcation exemplified by duffing's equation. Journal of Shock and Vibration, 1994(1): 233 – 240

71 Leung A Y T, Zhang Q C. Complex normal form for strongly nonlinear vibration systems exemplified by Dufing-van der Pol equation. Journal of Sound and Vibration, 1998, 213(5): 907 – 914

72 Leung A Y T, Zhang Q C. High order normal form and period averaging. Journal of Sound and Vibration, 1998, 217(5): 795 – 806

73 Leung A Y T, Zhang Q C. Normal form computation without central nanifold reduction. Journal of Sound and Vibration, 2003, 266(223): 261 – 279

74 李承治. 关于平面二次系统的两个问题. 中国科学(A 辑), 1982, 12: 1087 – 1096

75 李骊. 强非线性振动系统的定性理论与定量方法. 北京: 科学出版社, 1997

76 李铁, 胡立阁. 营养盐对中肋骨条藻和新月菱形藻生长及氮磷组成的影响. 海洋与湖沼, 2000, 31(1): 46 – 52

77 李伟固. 正规形理论及其应用. 北京: 科学出版社, 2000

78 李欣业. 多自由度内共振系统的非线性模态及其分岔: [博士论文]. 天津: 天津大学, 2000

79 李欣业, 陈予恕等. 多自由度内共振系统非线性模态的分岔特性. 力学学报, 2002, 34 (3): 401 – 407

80 林昱,林荣澄等. 厦门西港引发有害硅藻水华磷的阈值研究. 海洋与湖沼,1999,30(4):391 – 395

81 刘菲,杨翊仁. 不可压缩流中二元机翼运动的分支问题. 西南交通大学学报,2002,37(增刊):95 – 97

82 刘秉正. 非线性动力学与混沌基础. 吉林:东北师范大学出版社,1995

83 刘华杰,王军. 经济系统中的非线性与混沌及其应用. 数量经济技术经济研究,1993,2:61 – 66

84 Liu J K, Zhao L C. Bifurcation analysis of airfoils in incompressible flow . Journal of Sound and Vibration,1992,154(1):117 – 124

85 刘济科. 二元机翼颤振的分岔点类别的判定. 力学与实践,1998,20(3):38 – 40

86 刘济科. 机翼非线性颤振的分叉点研究. 中山大学学报,1998,37(3):28 – 35

87 刘习军, 陈予恕. 机床速度型切颤振的非线性研究. 振动与冲击,1999,18(2):5 – 9

88 刘延柱, 陈文良, 陈立群. 振动力学. 北京:高等教育出版社,1998

89 刘元高,刘耀儒. Mathematica 4.0 实用教程. 北京:国防工业出版社,2000

90 陆启韶. 常微分方程的定性方法和分岔. 北京:北京航空航天大学出版社,1989

91 陆启韶. 分岔与奇异性. 北京:北京航空航天大学出版社,1995

92 陆启韶. 分岔与奇异性. 上海: 上海科技教育出版社,1997

93 陆启韶. 常微分方程的定性理论与几何方法. 北京:北京航空航天大学出版社,1988

94 罗雪山.人口模型中的分岔研究. 系统工程与电子技术,1990(10):9 – 12

95 Nayfeh A H,Mook D T. Nonlinear Oscillations. New York: John Wiley and Sons, 1979

96 Nayfeh A H. Method of normal forms. New York: John Wiley and Sons, 1993

97 乔方利,袁业立. 长江口海域赤潮生态动力学模型疾驰超控制因子研究. 海洋与湖沼,2000,31(1):93 – 100

98 乔宇,王洪礼,竺致文. 汽车主动悬架非线性振动的 VOFB 控制. 机械工程学报,2002,38(12):21 – 24

99 乔宇,王洪礼,竺致文等. 电力系统的分岔控制研究. 力学学报,2002,34:195 – 198

100 秦元勋,王慕秋,王联.运动的稳定性理论与应用.北京:科学出版社,1981

101 Oiwa N N, N Fiedler-Ferrara. A fast algorithm for estimating Lyapunov exponents from time series. Physics Letters A.1998,246(1):117 – 121

102 Shahrzad P,Mahzoon M. Limit cycle flutter of airfoils in steady and unsteady flows. Journal of Sound and Vibration,2002,256(2):213 – 225

103 Shen S F,Hsu C C. Analytical results of certain nonlinear flutter problems. J Aeronaut Sci., 1958,25:136 – 137

104 Shen S F. An approximate analysis of nonlinear flutter problems. Journal of Aeronautical Sciences,1959,28:25 – 32,45

105 盛昭瀚,马军海. 非线性动力系统分析引论. 北京: 科学出版社,2001
106 舒仲周.运动稳定性及其应用.北京:高等教育出版社,1992
107 Stfano Redaelli, Wise-law M Macek. Lyapunov exponent and entropy of the solar wind flow. Planetray and Space Science,2001,49(12):1211 - 1218
108 苏仲周.运动的稳定性.西安:西安交通大学出版社,1989
109 孙景,竺致文. 用形状记忆合金控制转子振动的稳定性研究. 机械强度,2000,22(4):297 - 299
110 Ueda Y. Steady motions exhibited by Duffing's equation: a picture cook of regular and chaotic motions. In:Homles P J,ed. New approaches to nonlinear problems in dynamics. Philadelphia. SIAM,1980
111 Ushiki S. Normal Form for singularities of vector fields. Japan Journal of Applied Mathematics, 1984,1:1 - 34
112 万振文,袁业立. 海洋赤潮生态模型参数优化研究. 海洋与湖沼,2000,31(2):1 - 5
113 Wang D. An introduction to the normal form theory of ordinary differential equation. Advances in Mathematics,1989,19(1):38 - 71
114 王海期. 非线性振动. 北京:高等教育出版社,1992
115 Wang Hongli, Zhu Zhiwen, Li Qiang. The study on nonlinear dynamics of rotor vibration control with SMA component. Proceedings of the Asia-Pacific Vibration Conference 2001, Hangzhou, 2001(3):650 - 655
116 王洪礼,竺致文,孙景. 用形状记忆合金控制转子振动的非线性动力学研究. 振动工程学报,2001,14(3):309 - 313
117 王洪礼, 张琪昌等.非线性动力学理论及应用.天津:天津科学技术出版社,2002
118 王洪礼,冯剑丰,沈菲. 渤海赤潮藻类生态动力学模型的非线性动力学研究. 海洋技术,2002,21(3):8 - 12
119 王洪礼,李强,孙景. 用形状记忆合金弹簧主动控制转子振动. 机械强度,2002,24(1):29 - 31
120 王洪礼,赵涛,孙景. 转子系统中形状记忆合金的非线性性能分析. 机械强度,2003,25(6):621 - 623
121 王洪礼,李超,冯剑丰,孙景. 赤潮藻类营养盐限制方程的非线性动力学研究. 海洋技术,2003,22(1):40 - 44
122 王洪礼,冯剑丰,李超,沈菲. 多种群赤潮生态模型的非线性动力学研究. 天津大学学报,2003,36(4):400 - 403
123 王洪礼,李强,竺致文. 梯度算法在转子时变控制中的应用研究. 天津大学学报,2003,36(2):156 - 159
124 王联,王慕秋. 非线性常微分方程定性分析. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1987

125 王寿松，冯国灿. 大鹏湾夜光藻赤潮的营养动力学模型. 热带海洋，1997，16(1)：1－6

126 王寿松，刘子煌等. 封闭环境中赤潮发生过程的数学模拟. 海洋与湖沼，1998，29(2)：163－168

127 Wang Xiaofeng, Chen Guoting, Wang Duo. Unique normal forms for the Takens-Bogdanov singularity in a special case. Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Series I Mathematics, 2001, 332(6): 551－555

128 王照林. 运动稳定性及其应用. 北京：高等教育出版社，1992

129 王周喜，胡斌，王洪萍. 人口预测模型的非线性动力学研究. 数量经济技术经济研究，2002，19(8)：53－56

130 Wiggins S. Global bifurcations and chaos: Analytical method. New York: Springer-Verlag, 1988

131 Wiggins S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos analytical method. New York: Springer-Verlag, 1990

132 Wong Y S, Lee BHK, Gong L. Dynamic response of a two-degree-of-freedom system with a cubic nonlinearity. Taiwan: 1995 3rd International Conference on Computational Physics

133 Woolston D S, Runyan H L, Byrdsong T A. Some effects of system nonlinearities in the problem of aircraft flutter. NACA TN 3539, 1955

134 Woolston D S, Runyan H L, Andrews R E. An investigation on effect of certain types of structural nonlinearities on wing and control surface flutter. Journal of the Aeronautical Sciences, 1957, 24: 57－63

135 吴志强. 计算规范形和非线性模型的直接方法：[博士论文]. 天津：天津大学力学系，1996

136 吴志强，陈予恕. 非半简分叉问题的范式. 应用数学和力学，1997，18(4)：325－330

137 吴志强，王克起等. 一类高余维静态分岔问题分析. 天津大学学报，2002，35(3)：336－339

138 吴志强，王克起等. 一类静态分岔问题. 非线性动力学学报，2002，7(1)：13－18

139 夏道行. 实变函数论与泛函分析. 北京：高等教育出版社，1985

140 夏综万，王寿松. 大鹏湾的赤潮生态仿真模型. 海洋与湖沼，1997，28(5)：468－473

141 徐前方. 上证指数中的奇异吸引子. 数量经济技术经济研究，1994，2：23－26

142 徐绪松，陈彦斌. 深沪股票市场非线性实证研究. 数量经济技术经济研究，2001，3：110－113

143 杨培才等. 经济混沌的一个实例及其可预报性. 数量经济技术经济研究，1992，4：17－22

144 杨绍清，章新华，赵长安. 一种最大李雅普诺夫指数估计的稳健算法. 物理学报，2000，49(4)：636－640

145 杨翊仁，赵令诚. 二元机翼带外挂系统极限环颤振次谐响应分析. 航空学报，1992，13

(7):410 - 415

146 Yang Y R, Zhao L C. Subharmonic bifurcation analysis of wing with store flutter. Journal of Sound and Vibration, 1992, 157(3):477 - 484

147 Yang Y R. KBM method of analyzing limit cycle flutter of a wing an external store and comparison with a wind-tunnel test. Journal of Sound and Vibration, 1995, 187(2):271 - 280

148 Yang Z C, Zhao L C. Analysis of limit cycle flutter of an airfoil in incompressible flow. Journal of Sound and Vibration, 1988, 123(1):213 - 225

149 叶敏,肖龙翔. 分析力学. 天津:天津大学出版社,2001

150 叶正寅,王刚,杨永年. 利用 N-S 方程模拟机翼气动方程的一种计算方法. 计算物理, 2001, 18(5):397 - 401

151 叶宗泽, 杨万禄. 常微分方程组与运动稳定性理论. 天津:天津大学出版社,1985

152 Yodziss P. Introduction to theoretical ecology. New York: Harper & Row, 1989

153 Yu P. Computation of normal forms via a perturbation technique. Journal of Sound and Vibration, 1998, 211(1):19 - 38

154 Yu P, Bi Q S. Analysis of non-linear dynamics and bifurcations of a double pendulum. Journal Sound Vibration, 1998, 217 (4): 691 - 736

155 Yu P. Simplest normal forms of Hopf and generalized Hopf bifurcations. Int J Bifurcation and Chaos, 1999, 9(10):1917 - 1939

156 Yu P, Zhang W, Bi Q S. Vibration analysis on a thin plate with the aid of computation of normal forms. International Journal Nonlinear Mechanics, 2001, 36 (4):597 - 627

157 Yu P, Yuan Y. The simplest normal form for the singularity of a pure imaginary pair and a zero eigenvalue. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems (DCDIS) Series B, Applications & Algorithms, 2001, 8:219 - 249

158 Yu P. Computation of the simplest normal forms with perturbation parameters based on Lie transform and rescaling. Journal of Compute and Applied Mathematics, 2002, 144(1 - 2):359 - 373

159 Yu N Bibikov. Local theory of nonlinear analytic ordinary differential equations. Lecture Notes in Mathematics 702, New York: Springer-Verlag, 1979

160 张琪昌. Hopf 分叉理论及其在非线性振动系统中的应用:[博士论文]. 天津:天津大学, 1991

161 张琪昌,陈予恕. 用动力系统理论研究多自由度非线性振动问题. 振动工程学报, 1991, 4(4):11 - 17

162 张琪昌, 梁以德. 用范式理论研究常微分方程焦点量问题. 应用数学和力学, 1995, 16 (9):829 - 838

163 Zhang Q C, Leung A Y T. Normal form of double Hopf bifurcation in forced oscillators. Journal of Sound and Vibration, 2000, 231(4):1057 - 1069.

164 Zhang Q C, Leung A Y T. Computation of normal forms for higher dimensional semi-simple systems. dynamics of continuous, discrete and impulsive systems, Series A: Mathematical Analysis, 2001(8):559 – 574

165 张琪昌, 贾启芬等. 计算中心流形的通用程序. 天津理工学院学报, 2002, 18(3):60 – 63

166 张伟. 非线性动力系统的规范形和余维 3 退化分叉. 力学学报, 1993, 25(5):548 – 559

167 张伟, 霍拳忠. 离心摆式减振器摆变参数振动的研究. 天津理工学院学报, 1995, 16(9):829 – 838

168 张伟, 陈予恕. 共轭算子法和非线性动力系统的高阶规范形. 应用数学和力学, 1997, 18(5):421 – 432

169 张伟, 陈予恕. 机械系统中的非线性动力学问题及其研究进展. 中国机械工程, 1998, 9(7):64 – 69

170 张伟, 杨绍普, 徐鉴. 非线性系统的周期振动和分岔. 北京: 科学出版社, 2002, 8 – 9

171 Zhang W Y, Huseyin K, Chen Y S. A new approach for obtaining normal forms of non-linear systems. Journal of Sound and Vibration, 1998, 210 (5):609 – 625

172 Zhang W Y, Huseyin K, Ye M. On the computation of the coefficients associated with high order normal forms. Journal of Sound and Vibration, 2000, 232(3):525 – 540

173 Zhang W Y, Huseyin K. On the relation between the methods of averaging and normal forms. Applied Mathematical Modeling, 2000, 24(4):279 – 295

174 张向惠, 贺建芸. 非线性颤振理论对机加工作用的探讨. 现代机械工程, 2001, 12:33 – 34

175 张向惠, 贺建芸, 徐红娟. 非线性颤振对切削加工过程影响初探. 机械工程师, 2002, 3:48 – 50

176 张向惠. 铣床非线性颤振的试验研究. 现代制造工程, 2002, 1:13 – 14

177 张新军, 陈艾荣, 项海帆. 大跨度桥梁的三维非线性颤振频域分析. 同济大学学报, 2001, 29(1):20 – 24

178 张新军, 陈艾荣, 项海帆等. 不同主截面形状的大跨度桥梁颤振机理研究. 中国公路学报, 2002, 15(2):52 – 56

179 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶等. 微分方程定性理论. 北京: 科学出版社, 1985

180 赵冬至. 渤海、黄海赤潮发生规律研究. 见: 渤海赤潮灾害监测与评估研究文集. 北京: 海洋出版社, 2000

181 Zhao L C, Yang Z C. Analysis of limit cycle flutter of an airfoil in incompressible flow. Journal of Sound and Vibration, 1988, 123(1):1 – 13

182 Zhao L C, Yang Z C. Chaotic motions of an airfoil with non-linear stiffness in incompressible flow. Journal of Sound and Vibration, 1990, 138(2):245 – 254

183 杨智春,赵令诚,姜节胜. 结构非线性颤振半主动控制理论及实验室研究. 航空学报,1993, 14(11):A640 – A643

184 褚亦清,李翠英. 非线性振动分析.北京:北京理工大学出版社,1996

185 朱杰华,朱思铭. 一类三次系统的中心条件和极限环分支. 科学通报,1997,42(9):903 – 906

186 朱正佑,丁睿. 音叉普适开折的若干动力学性质. 固体力学学报,1995,16(4):329 – 335

187 中山大学数力系.常微分方程.北京:人民教育出版社,1981

188 周纪卿,朱因远. 非线性振动. 西安: 西安交通大学出版社,1998

189 竺致文,王洪礼,孙景. 用记忆合金对转子振动进行变结构主动控制. 天津大学学报,2001,34(1): 273 – 276

190 竺致文,王洪礼,乔宇,沈菲. 应用形状记忆合金控制转子振动的若干研究. 力学学报,2002,34: 199 – 203

191 Zhu Zhiwen, Wang Hongli. Research on strong nonlinear dynamics characteristic of high speed rotor system with SMA bearing. Proceedings of the 5th International Conference on Frontiers of Design and Manufacturing,2002,2:443 – 447